



AF

Arhitektonski fakultet u Podgorici
Univerzitet Crne Gore

ARHITEKTONSKI FAKULTET - PODGORICA

OSNOVNE STUDIJE

GEODEZIJA

V Predavanje

Definicija dužine i metra i metode mjerenja dužina.
Direktno mjerenje dužina. Optičko mjerenje dužina.
Elektromagnetno mjerenje dužina. Određivanje dužina i
uglova iz pomoćnog trougla – triangulacija. Računanje
dužine iz koordinata tačaka.

Doc. dr Radovan Đurović, dipl.inž.geod.

Podgorica, 2018

Definicija dužine i metra i metode mjerenja dužina.

Dužina - jedna od osnovnih veličina SI sistema.

Veličina koja materijalizuje rastojanje između dvije tačke prostoru ili put koji između njih treba preći pri pravolinijskom kretanju.

Uobičajeni znak za dužinu je „l” a mjerna jedinica metar.

Metar je dužina putanje koju u vakuumu pređe svjetlost za vrijeme od $1/(299\,792\,458)$ sekundi.

Ostale mjere za dužinu su: kilometar ($1\text{ km}=1000\text{ m}$), decimetar ($1\text{ dm}=0,1\text{ m}$), centimetar ($1\text{ cm}=0,01\text{ m}$), milimetar ($1\text{ mm}=0,001\text{ m}$) mikrometar ($1\text{ }\mu\text{m}=0,000001\text{ m}$). Stare mjere za dužinu su: col ($2,62\text{ cm}$), palac ($0,0254\text{ m}$), stopa ($0.3048\text{ m} - 12\text{ cola}$), lakat (71.118 cm), jard ($0,944\text{ m}$), hvat ($1,8965\text{ m}$) itd.

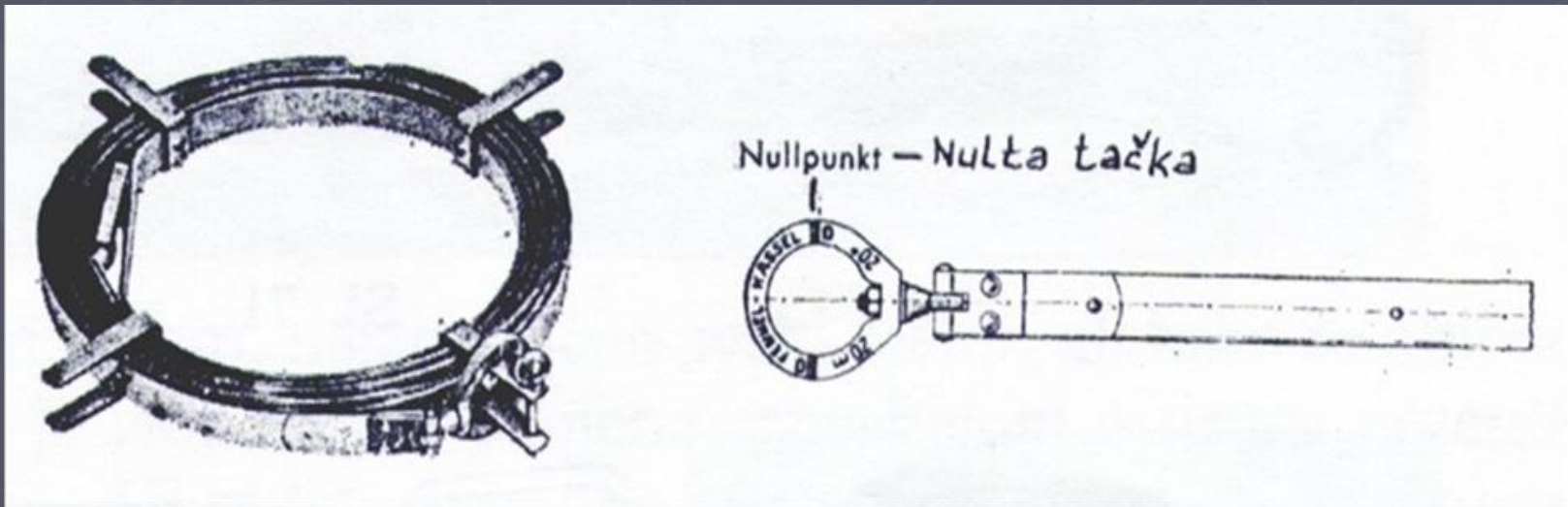
Mjerenje dužina:

- Direktno;
- Indirektno; optičko, elektromagnetno, iz pomoćnog trougla.

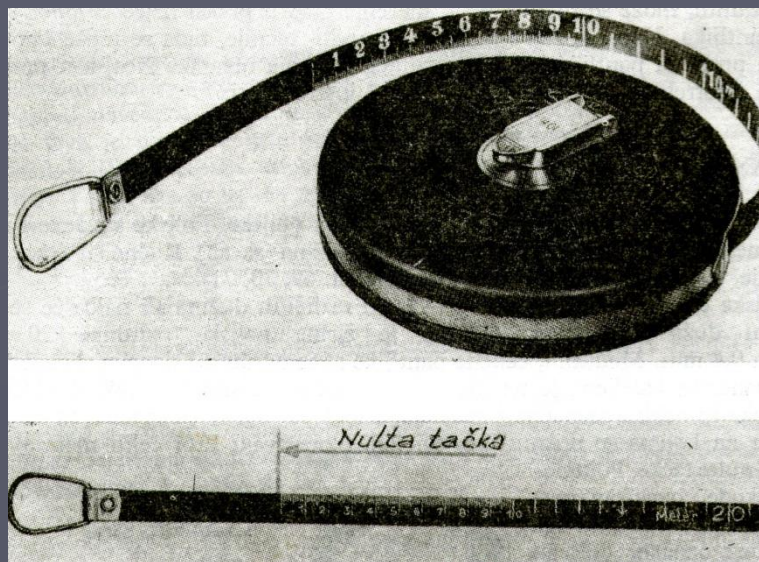
Direktno mjerenje dužina

Mjerenje dužina, do prije nekoliko desetina godina, izvodilo se isključivo ovim putem i to trakama od metala, koje su se zvale pantljike.

U početku izrađivane od metala širine najčešće 1.5 cm, debljine 2 mm i dužine od 20 m do 50 m. Pantljike dužine od 25 m do 50 m zvale su se poljske pantljike i služile su za mjerenje rastojanja od 30 m do 200 m.



Pantljike dužine 10 m, 20 m i 25 m zvale su se ručne pantljike i obično su se namotavale na valjak koji se vrti rukom, pa otuda i naziv ručna pantljika.

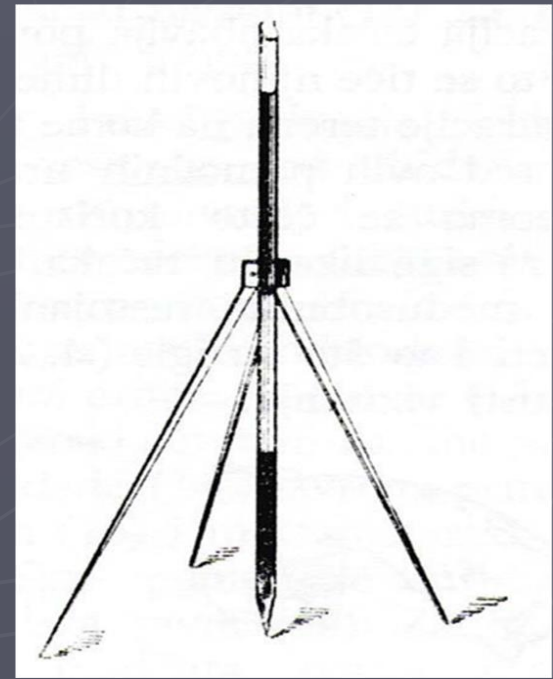
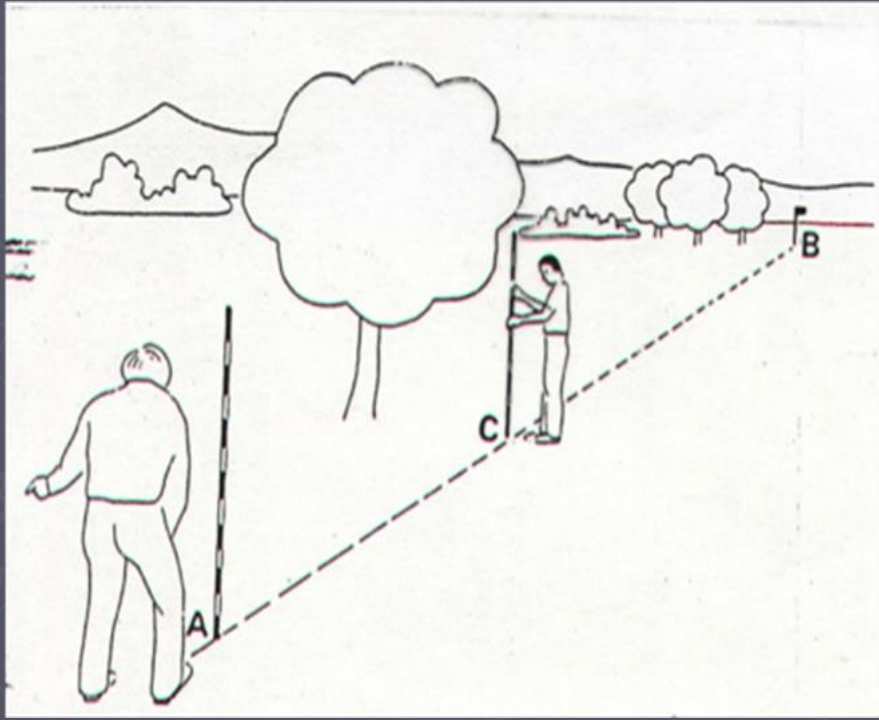


Da bi se izbjegla korozija, pantljike su presvlačene providnom plastikom a kasnije su kompletno izrađivane od plastike.



Postupak mjerenja pantljikama:

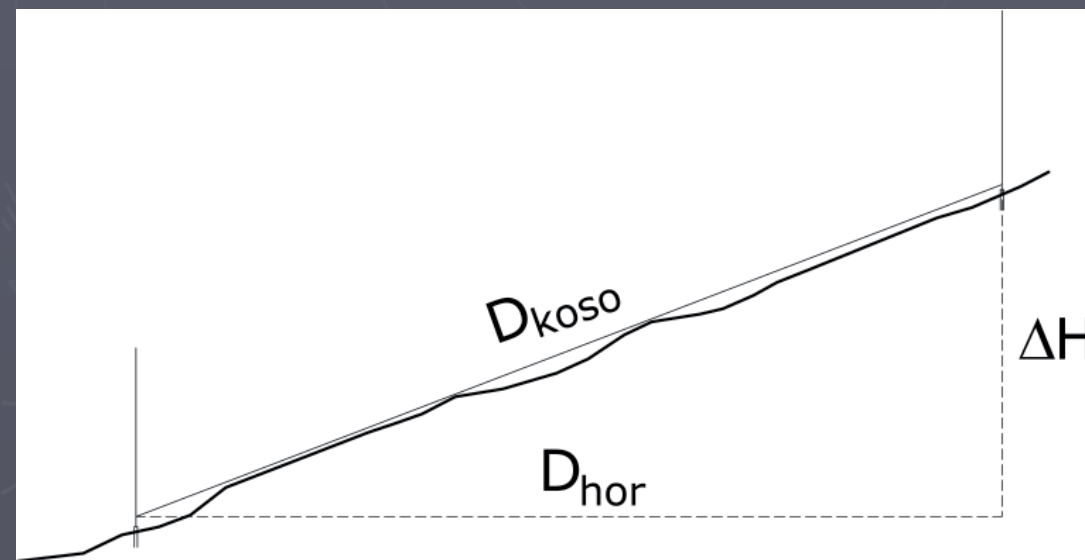
- Krajnje tačke se signališu značkama.
- Pantljika se pruža po pravcu duži koja treba da se izmjeri.
- Za postavljanje pantljike u pravac, koristi se treća značka.
- Pantljika se zategne duž pravca tako da se kraj pantljike poklopi sa početnom tačkom.
- Drugi kraj pantljike se obilježi na zemlji.
- Pantljika se povlači i mjeri se od obilježenog kraja prve dužine pantljike prema drugom kraju mjerene duži.
- Broj pantljika se pomnoži sa nominalnom dužinom i na tu dužinu se doda ostatak koji se mjeri od obilježenog kraja poslednje cijele pantljike do druge krajnje tačke mjerene duži.
- Kontrolno mjerenje se sprovodi ponovnim mjerenjem duži sa drugog kraja.



Invarske žice - instrument za mjerenje dužina osnovica u trigonometrijskoj mreži – najpreciznije mjerenje dužina u to vrijeme (greška mjerenja je bila 1 mm na 1 km).

Ova strana trougla se zove “baza” i od nje je razvijan veliki broj trouglova, koji je pokrivaio pojedine regione u kojima su se dužine određivale indirektno.

Mjerenje dužina pantljikom, vrši se koso po terenu.



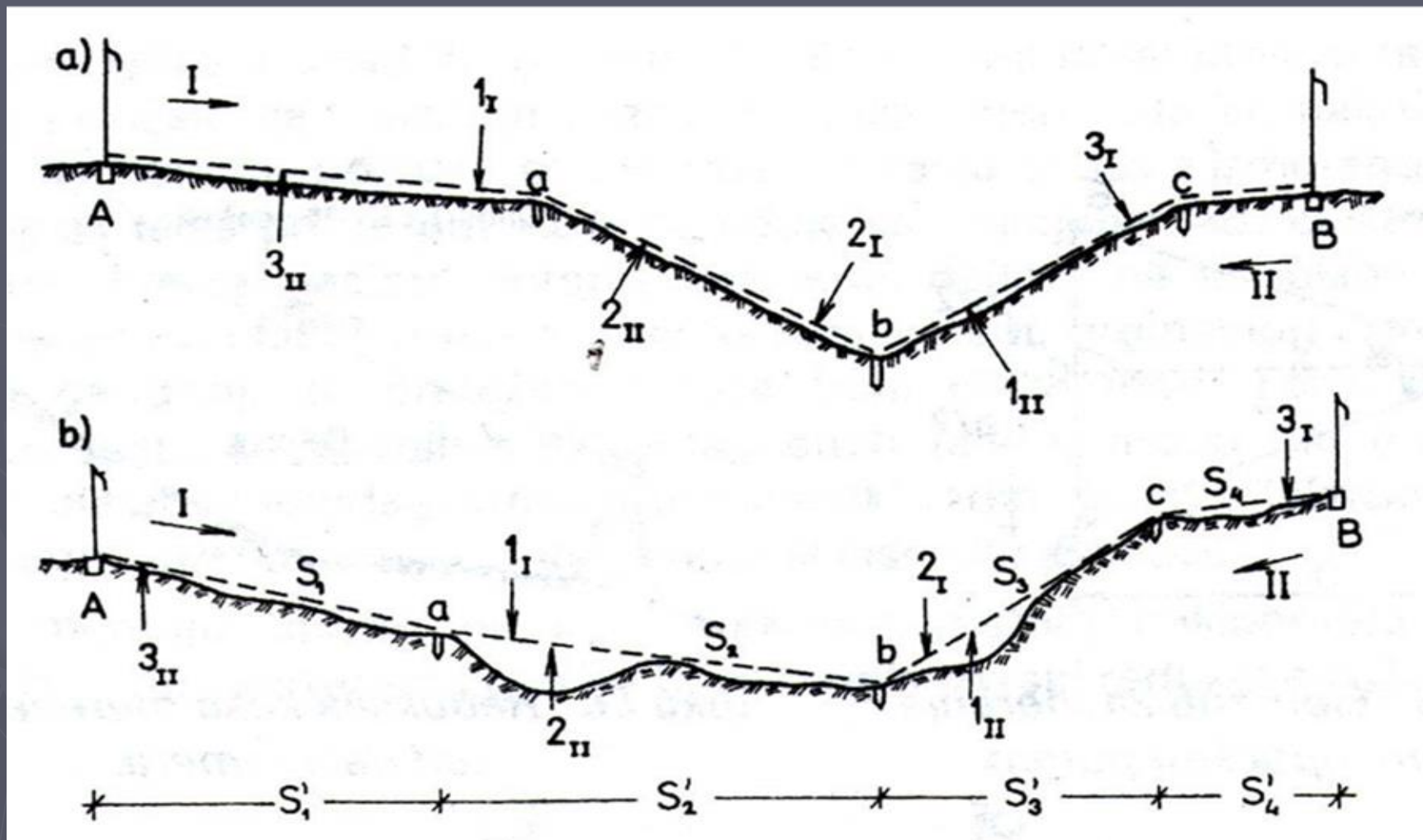
$$D_{koso}^2 = D_{hor}^2 + \Delta H^2$$

$$D_{hor} = \sqrt{D_{koso}^2 - \Delta H^2}$$

Približna formula:

$$D_{hor} = D_{koso} - \frac{\Delta H^2}{2 * D_{koso}} - \frac{\Delta H^4}{8 * D_{koso}^3}$$

Obično je dužinu između tačaka potrebno podijeliti na nekoliko djelova u kojima je pad približno ravnomjeran.



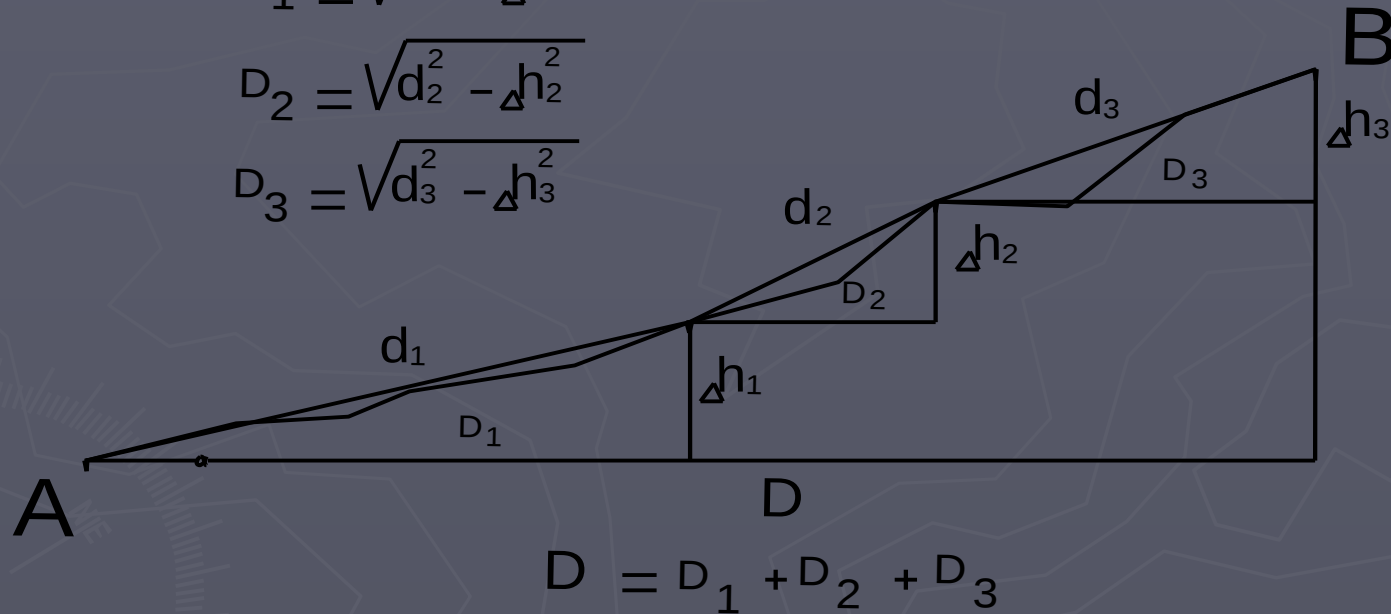
Redukcija na horizontalnu - projekcionu ravan – moraju se znati visinske razlike.

Ukupna horizontalna redukovana dužina jednaka je zbiru pojedinačnih redukovanih dužina.

$$D_1 = \sqrt{d_1^2 - \Delta h_1^2}$$

$$D_2 = \sqrt{d_2^2 - \Delta h_2^2}$$

$$D_3 = \sqrt{d_3^2 - \Delta h_3^2}$$



Mjerenje dužina pantljikom bio je veoma zamoran i dugotrajan posao, naročito kad se radilo o većem broju tačaka a skoro nemoguć u slučajevima kad je teren obrastao šibljem ili šumom.

100 m na ravnom terenu mjereći u dva smjera, nije bilo moguće izmjeriti sa tačnošću većom od ± 5 cm (kada je neravno ± 15 cm).

Optičko mjerenje dužina

Prva zamjena pantlijeke - konstruisani durbini teodolita osposobljeni končanicom, sa kojom se vršilo očitavanje odsječka na letvi.

Specijalne letve su imale specijalnu podjelu nanešenu na njima i postavljale su se na tački do koje se od instrumenta određivalo rastojanje.

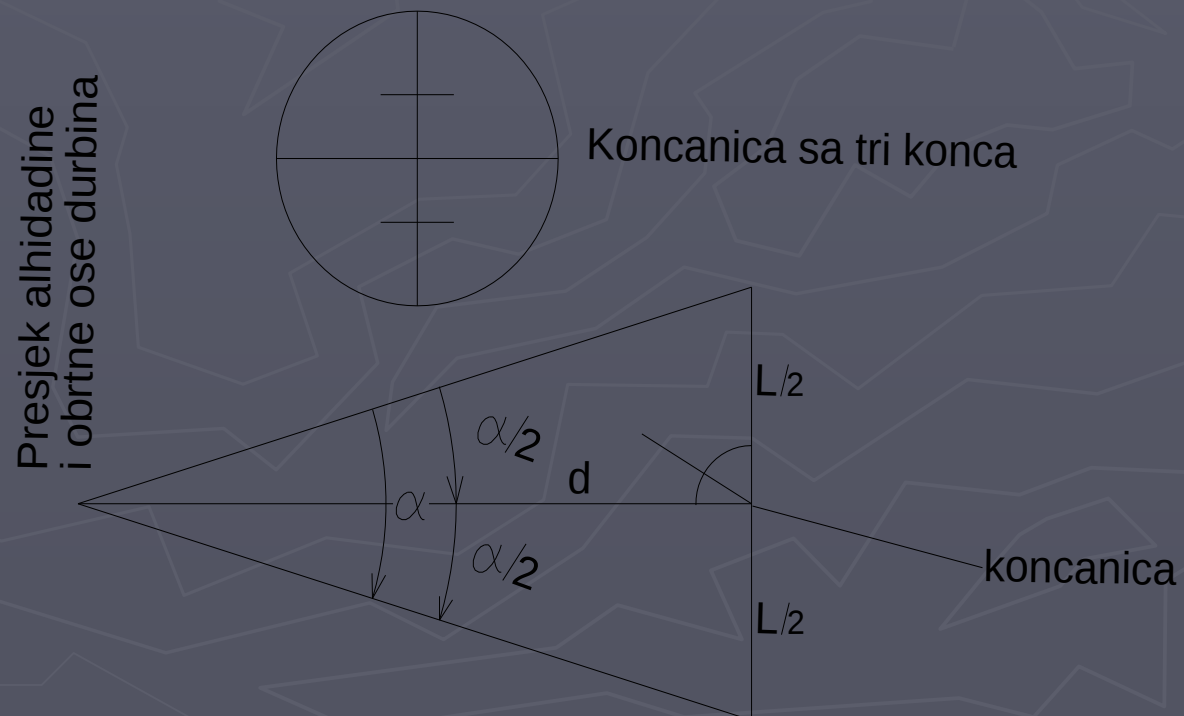
Konstrukcija končanice sa tri konca postavljena u durbinu instrumenta na konstantno rastojanje od alhidadine osovine, odnosno centra vertikalnog limba.

Rajhenbahov daljinomjer

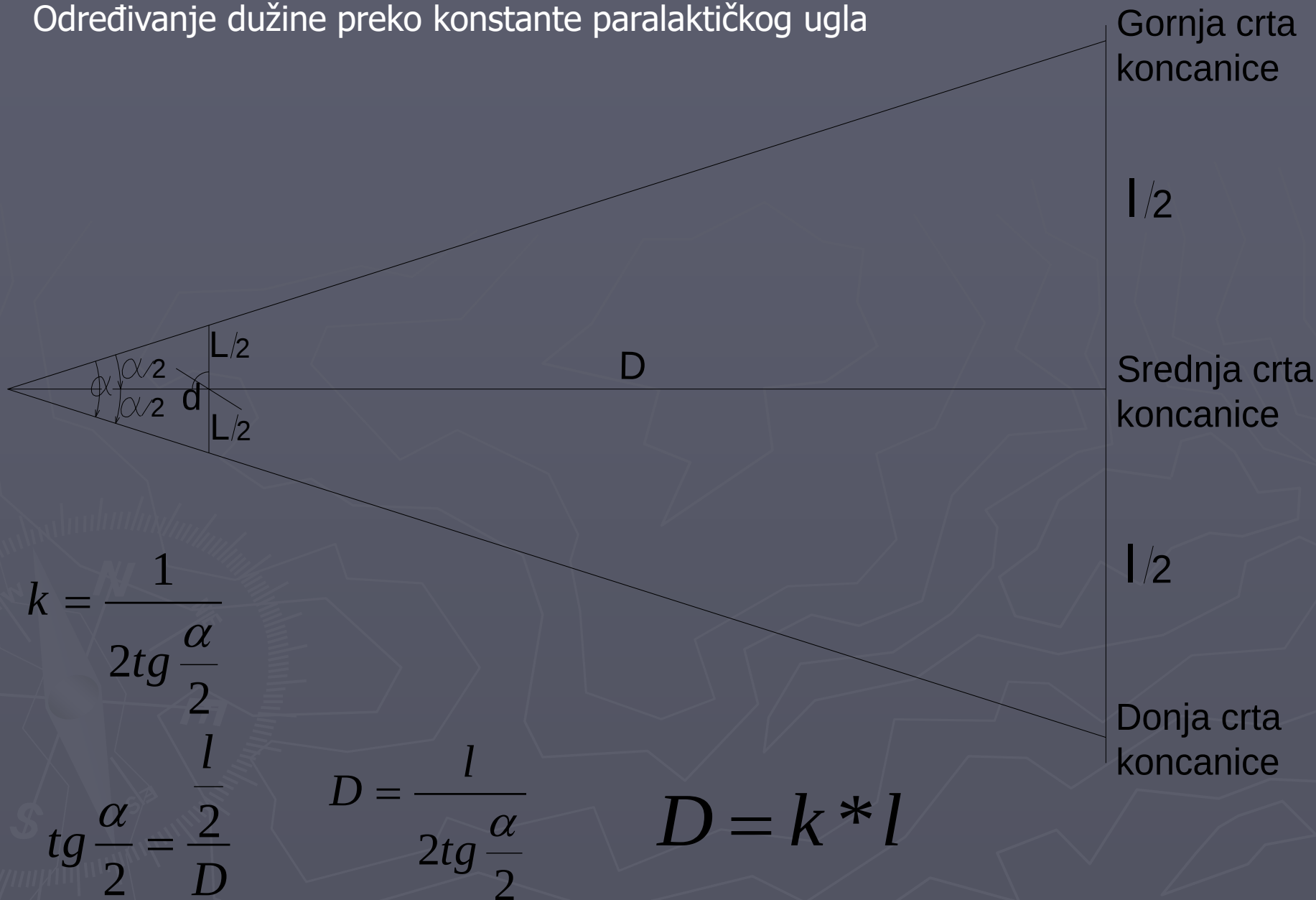
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{L}{d}$$

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{L} = k$$

Konstanta paralaktičkog ugla



Određivanje dužine preko konstante paralaktičkog ugla



Razmjernik koji se postavlja vertikalno na tački do koje se mjeri rastojanje zove se letva. Izrađena od drveta ili plastike, prosječne dužine do 2 m, širine 5 cm i debljine 1.5 cm. Na prednjoj strani izgravirana podjela do na cm.

Sa druge strane ima ugrađene držače i centričnu libelu za dovođenje u vertikalu. Čitanje podele letve se vrši pomoću crte končanice i to tako što se: čitaju decimetri, odbroje centimetri a unutar centimetara milimetri ocijene od oka.

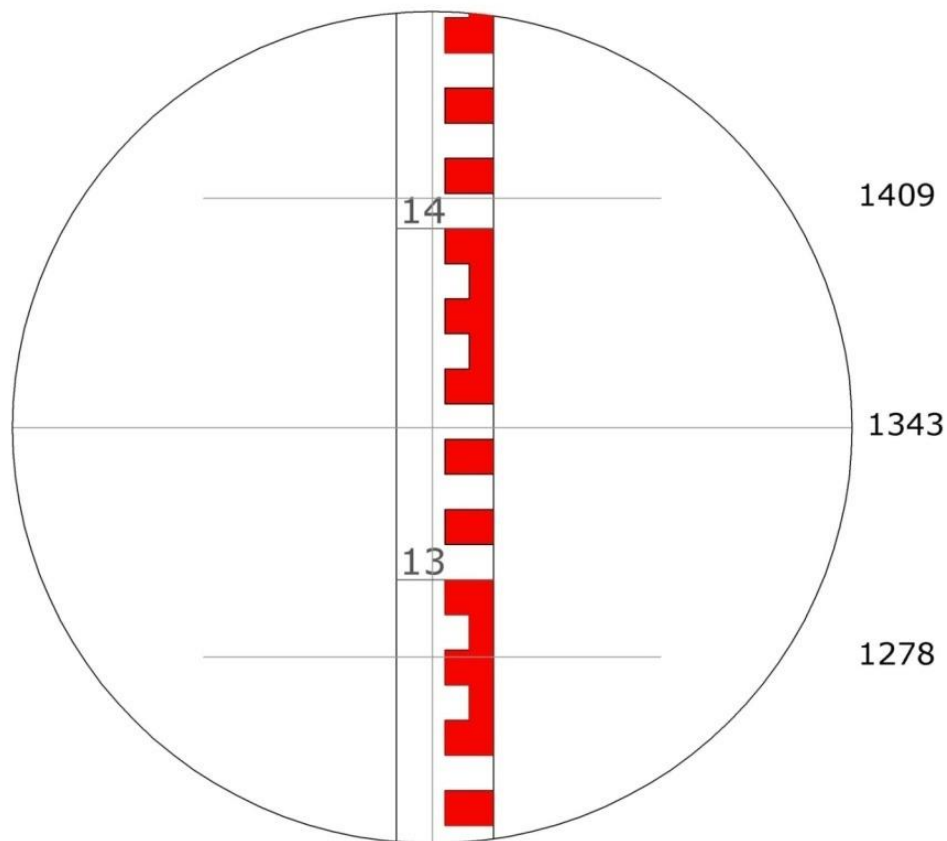
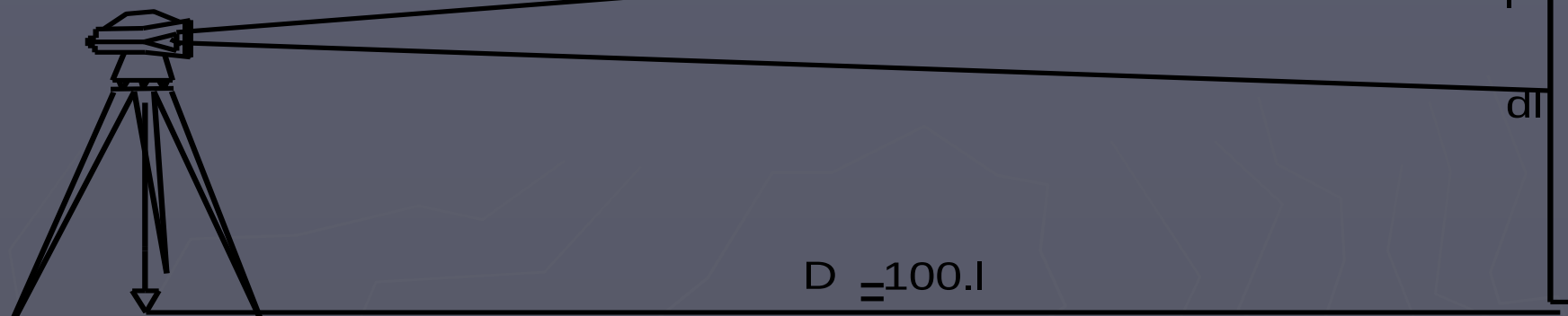
Sa sva tri konca končanice očita letva i nađe razlika čitanja

$$l = g - d$$

g - čitanje letve gornim koncem
d - čitanje letve donjim koncem

Ovi instrumenti su konstruisani tako da je konstanta k ima okruglu vrijednost 100.





$g=1409$ čitanje gornjim kon cem

$s=1343$ čitanje srednjim kon cem

$d=1278$ čitanje donjim kon cem

$$(g+d)/2=1343.5$$

$$(g-d)*100=13.1m$$

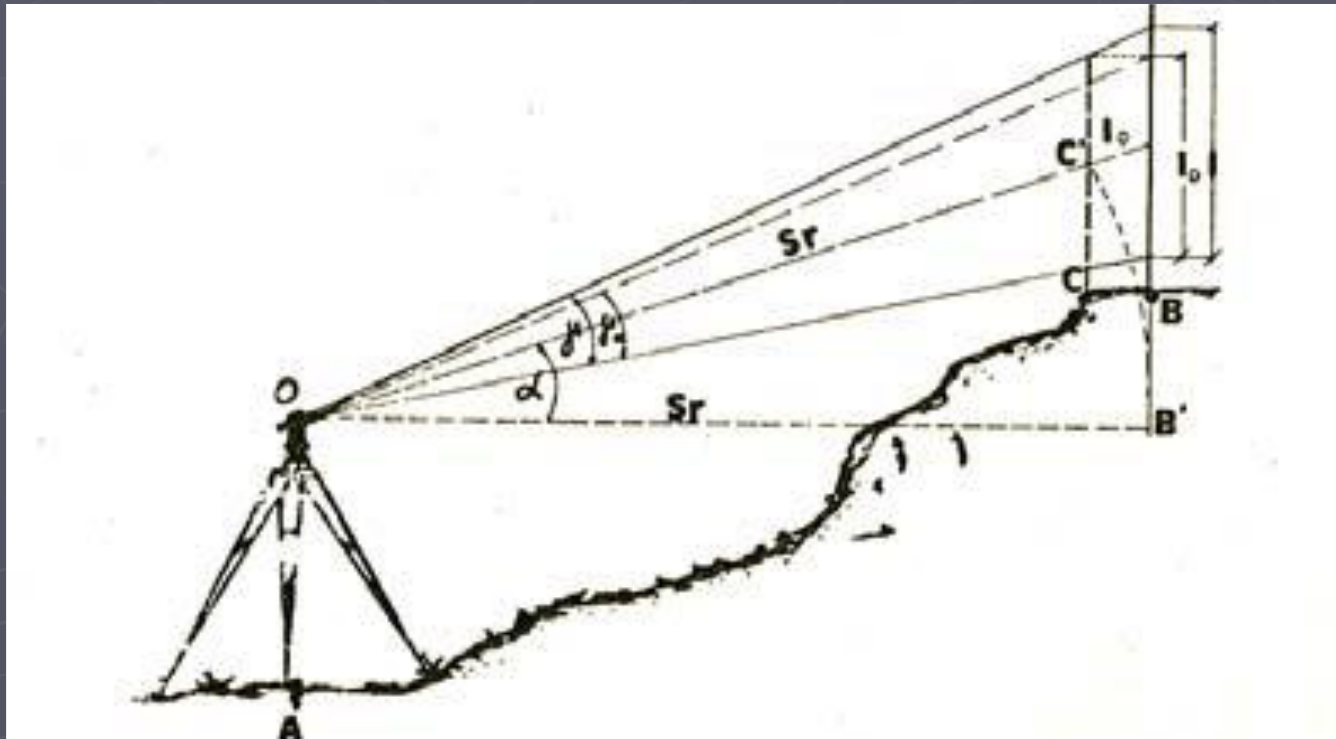
Instrumentom koji ima končanicu sa 3 konca, mogu se mjeriti kose dužine i redukovati na projekcionu odnosno horizontalnu ravan (potrebno znati visinske razlike).
Veliki utrošak vremena - usporavao izradu podloga za projektovanje.

Tačnost ovako izmjerenog rastojanja od 100 m kretala se do ± 15 cm pri čemu se kraće rastojanje mjerilo sa većom a duže rastojanje sa manjom tačnošću.

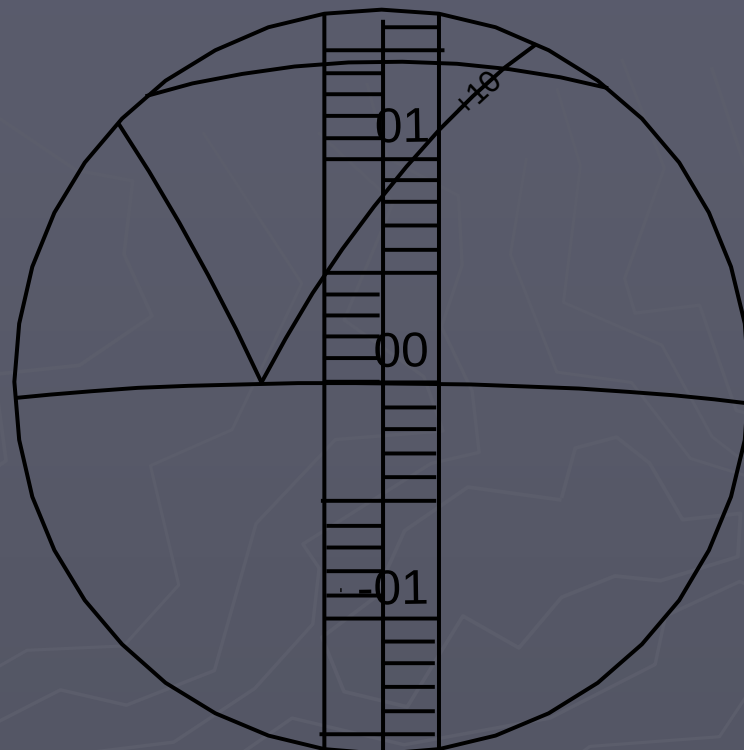
Konstrukcija autoredukcionog dijagrama u končanici durbina – autoredukcionim daljinomjeri.

Na osnovu odsječka na letvi pomnoženog konstantom dobija se horizontalna dužina između instrumenta i letve.
Očitava se i visinska razlika.

Princip rada:
povećanjem nagnutosti vizure (povećanjem vertikalnog ugla α) smanjuje se paralaktički ugao.



Konstruisan je poseban dijagram (Hamer- Fenelov dijagram) koji nije simetričan u odnosu na glavni poluprečnik i u sebi ima nulti konac (vizura ide do njegovog presjeka sa vertikalnim koncem), konac za dužine i nekoliko konaca za visinske razlike sa odgovarajućim konstantama.



Konac za dužine pogađa letvu na 0.143 m (rastojanje se dobija *100).

$$D = 0.143 m * 100 = 14.3 m$$

Konac za visine pogađa letvu na 0.083 m (visinska razlika se dobija * konstanta (+10)).

$$\Delta h = 0.083 m * 10 = 0.83 m$$

Tačnost u granicama tačnosti mjerenja končanicom sa tri konca.

Prednost – automatsko dobijanje horizontalnih dužina.

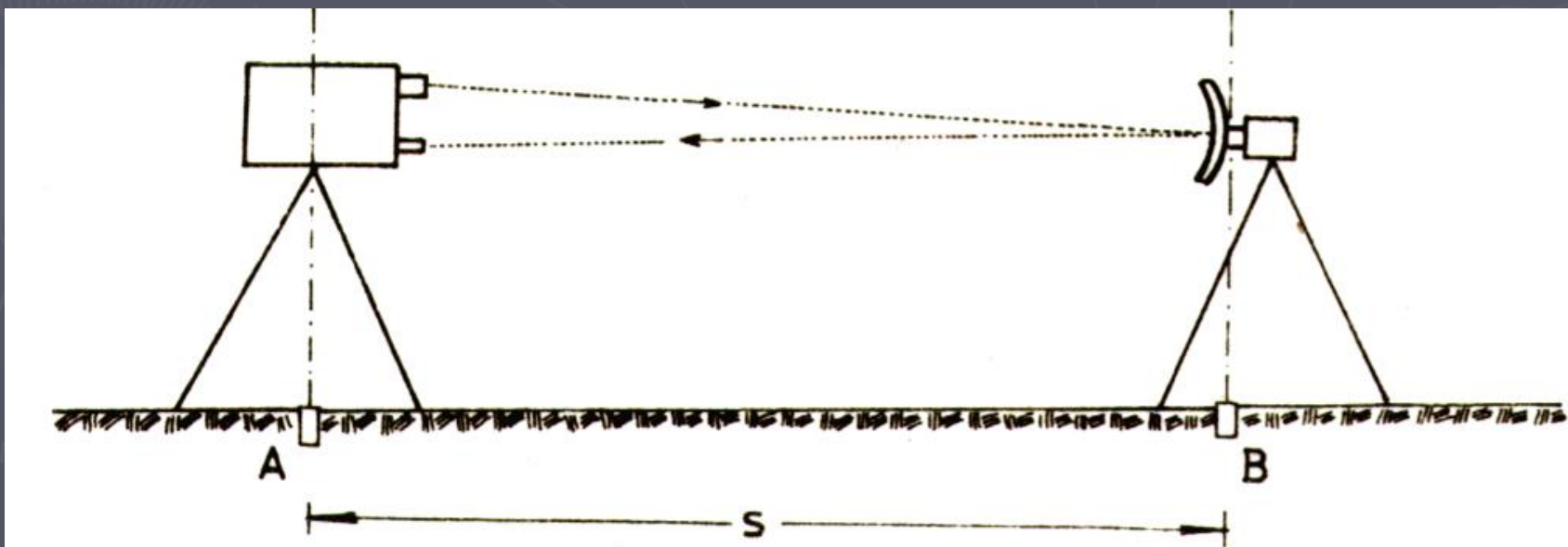
Elektromagnetno mjerenje dužina

Koriste laserski zrak za veoma precizno mjerenje dužina.

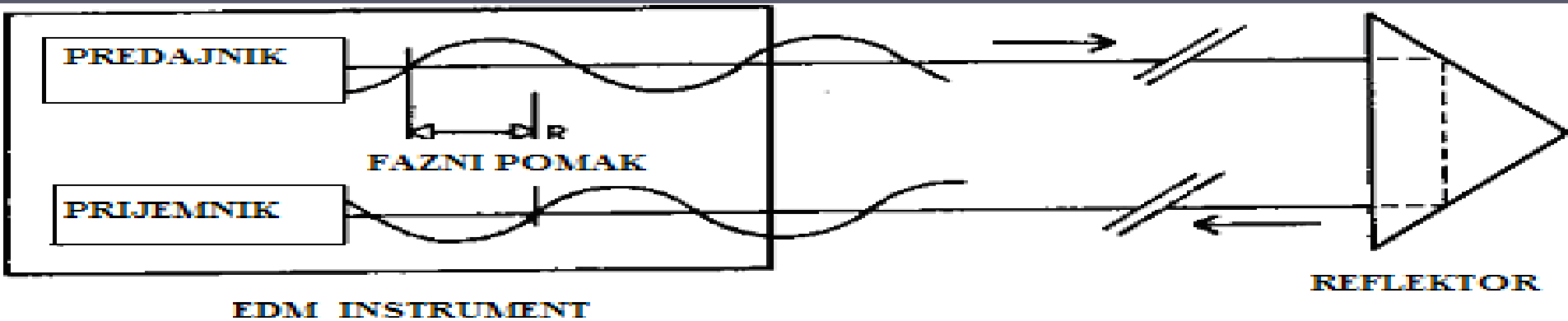
Elektromagnetni daljinomeri se po principu određivanja dužina dijele na:

- Impulsne daljinomjere;
- Fazne daljinomjere;
- Radio daljinomjere;
- Elektrooptičke daljinomjere.

Princip elektronskog mjerenja dužina se zasniva na mjerenju vremena koje je elektromagnetnom talasu potrebno za prelazak mjerene dužine u oba smjera.



Kod totalnih stanica - na durbin instrumenta integrisan emiter elektromagnetnih talasa, koji se usmjerava na prizmu do koje se mjeri dužina, od prizme odbija i ponovo vraća do prijemne optike instrumenta koja se nalazi na durbinu neposredno pored emitera.



Softver (sastavni dio instrumenta) - odbrojava vrijeme koje elektromagnetni talas pređe od instrumenta do prizme i nazad i na indirektan način broji talasne dužine elektromagnetnog talasa koji množi sa njihovom frekvencijom i na ekranu pokazuje rastojanje od instrumenta do prizme.

Poznavajući vrijeme kada talasi napuste instrument i vrijeme kada se ponovo vrate u instrument, računa se mjerena dužina pomoću formule:

$$D = \frac{c * \Delta t}{2}$$

D - dužina između tačaka,
 c - brzina elektromagnetnog talasa,
 Δt - vrijeme koje je potrebno talasu da dva puta pređe mjerenu dužinu.

Brzina elektromagnetnog talasa jednaka je proizvodu njegove talasne dužine i frekvencije.



Može se mjeriti kosa i redukovana dužina.

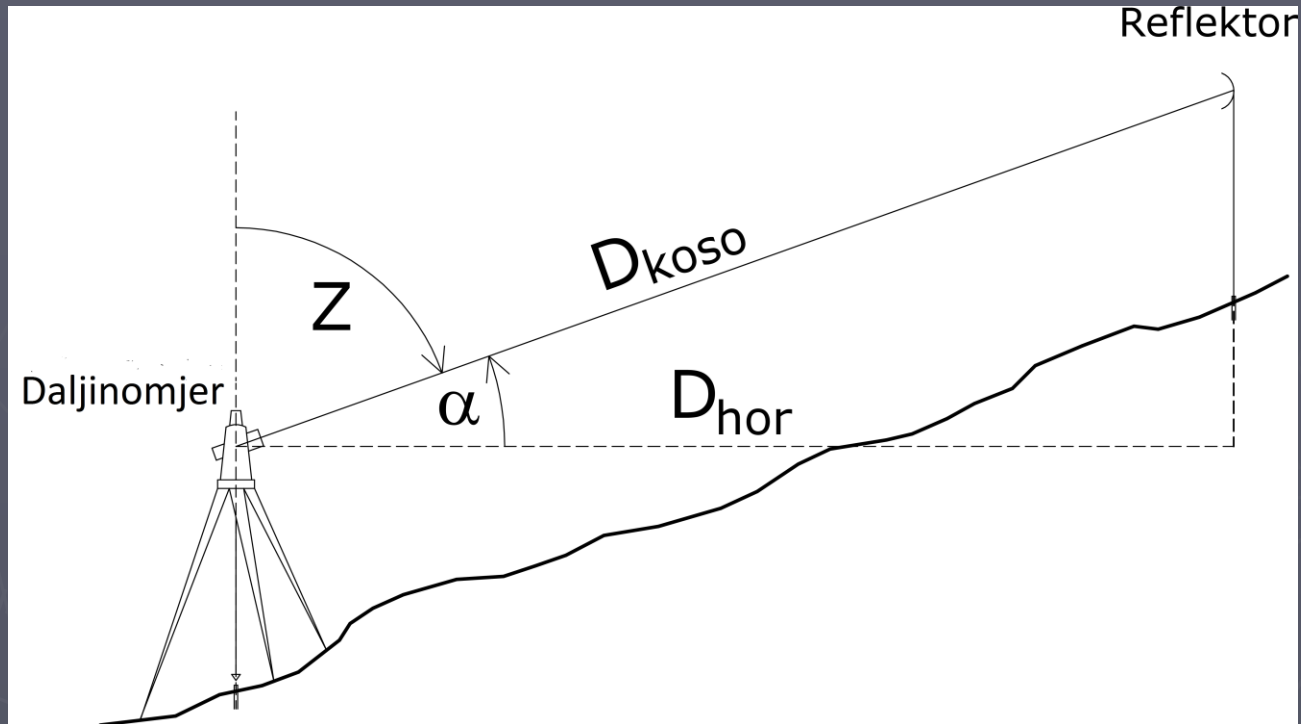
Kosa dužina - za izračunavanje visinske razlike.

Horizontalna dužina - za izračunavanje koordinata tačke X i Y u horizontalnoj ravni.

Ima mogućnost registrovanja i digitalnog očitavanja horizontalnog i vertikalnog ugla.

Podaci se mogu vidjeti na displeju instrumenta, zapisani su u memoriji i jednostavno se mogu transportovati u računar.

Mjeri se dužina od prekreta durbina daljinomera, koji je na vertikali iznad jedne tačke (stanica), do centra reflektora, koji je na vertikali iznad druge tačke (vizurna tačka).



Za računanje horizontalnih dužina se pored mjerenja kose dužine D_{koso} izmjeri i zenitno odstojanje Z (ili vertikalni ugao α).

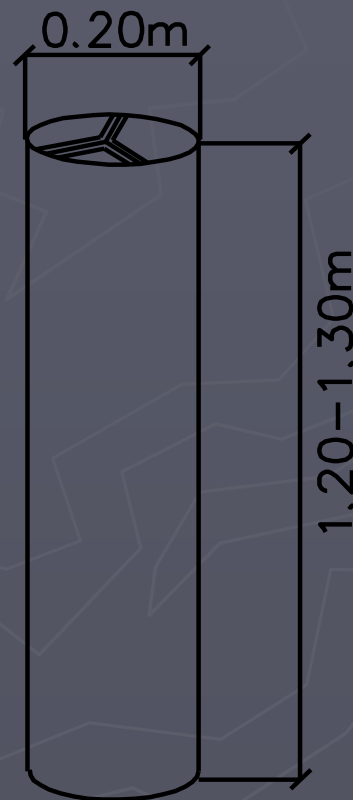
$$D_{hor} = D_{koso} * \sin Z$$

$$D_{hor} = D_{koso} * \cos \alpha$$

Tačnost izmjerenog rastojanja zavisi od:

- Modela totalne - imaju deklarisanu tačnost mjerenja dužine;
 - Načina i tačnosti centrisanja instrumenta i prizme.
- Dužina od 100 m od ± 1 mm do ± 15 mm.

Najpreciznije kada se instrument i prizma centrišu na posebnim stubovima sa ugrađenim uređajem za "prisilno centrisanje".



betonski stub
za centrisanje

uredjaj za
centrisanje



presjek A-A



Neke od prednosti ovakvog načina mjerenja dužina su:

- Visoka tačnost merenja;
- Moguće je mjeriti velika rastojanja (do nekoliko km);
- Brzo mjerenje (nekoliko sekundi);
- Očitavanje rezultata na displeju.

Za mjerenje dimenzija unutrašnjosti objekata koriste se ručni laserski daljinomjeri.



Određivanje dužina i uglova iz pomoćnog trougla - triangulacija

Do pojave elektromagnetnih daljinomjera, mjerenje dužina većih od 500 m, uglavnom je vršeno indirektnim putem.

Često javlja situacija da se potrebni ugao ili dužina ne mogu izmjeriti direktno na terenu, zbog toga što se tačke ne dogledaju ili nijesu pristupačne za postavljanje instrumenta ili signala.

Tada se formiraju pomoćni trouglovi.

Mjere se druge stranice ili uglovi, a potrebni uglovi ili dužine se dobijaju indirektno, računskim putem, računanjem nepoznatih elemenata u trouglu.

Moguće je pronaći nepoznate elemente (stranice ili uglove) u trouglu ukoliko je poznato (izmjereno) najmanje tri elementa, s tim da mora biti poznata najmanje jedna stranica trougla.

Računanje nepoznatih elemenata u trouglu kada su dati dva ugla i stranica

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

Dato α , β i a .

Zatim iz sinusne teoreme:

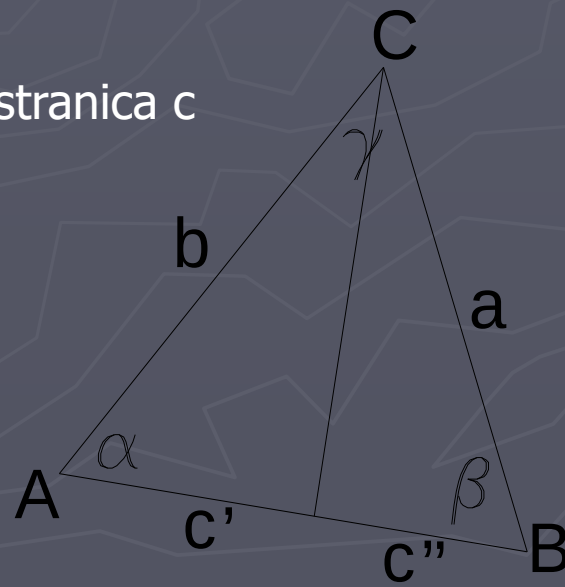
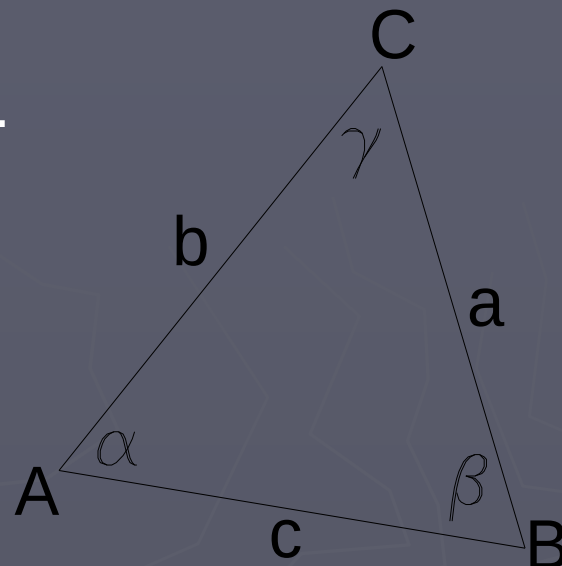
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m = 2R$$

$$b = \frac{a * \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{c * \sin \beta}{\sin \gamma} \quad c = \frac{a * \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{b * \sin \gamma}{\sin \beta}$$

Kontrola se vrši spuštanjem visine na stranicu c čime se stranica c dijeli na dva dijela c' i c'' .

$$c = c' + c''$$

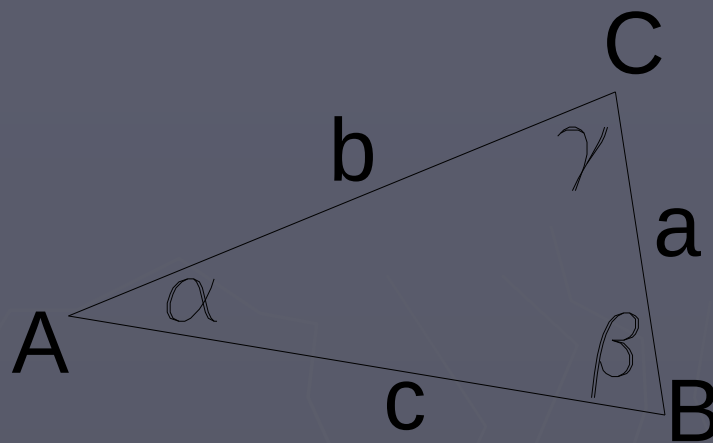
$$c = b * \cos \alpha + a * \cos \beta$$



Računanje nepoznatih elemenata u trouglu kada su dati dvije stranice i ugao naspram jedne od njih.

Dva slučaja:

I. Date bilo koje dvije stranice (a i b) i ugao naspram duže od njih (β)



Postoji samo jedno rješenje za vrijednosti preostalih elemenata.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m \quad \sin \alpha = \frac{a * \sin \beta}{b} \quad \alpha = \arcsin \frac{a * \sin \beta}{b}$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

$$b = \frac{a * \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{c * \sin \beta}{\sin \gamma}$$

II. Date bilo koje dvije stranice (a i b) i ugao naspram kraće od njih (α)

U ovom slučaju, u zavisnosti od datih elemenata postoji više rješenje a postoji i njihov odnos kada trougao nema rješenje pa ovdje neće biti detaljnije obrađivan.

Računanje nepoznatih elemenata u trouglu kada su dati dvije stranice i ugao između njih.

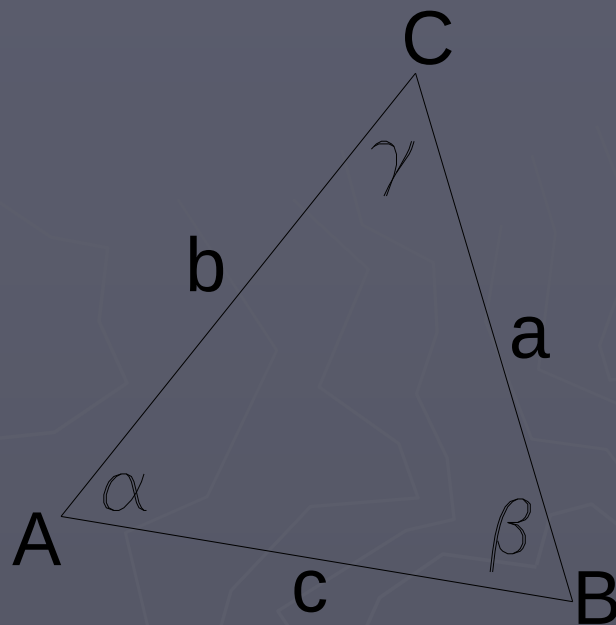
Date su dvije stranice (b i c) i ugao između njih – α .

Preko tangensne teoreme, **kosinusne teoreme** ili diobom trougla na dva pravougla trougla.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Prvo se sračuna stranica a

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

Zatim preko sinusne teoreme

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m \quad \text{ugao } \beta:$$

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

$$\beta = \arcsin \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

Računanje nepoznatih elemenata u trouglu kada su date sve tri stranice.

Dato: a , b i c .

Preko kosinusne teoreme:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

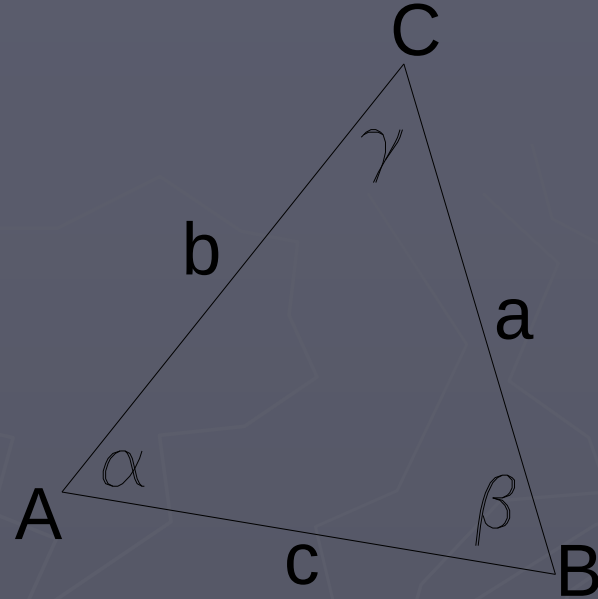
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Zatim preko sinusne teoreme $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m$ ugao β :

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} \quad \beta = \arcsin \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$



Računanje dužine iz koordinata tačaka

Horizontalna dužina se između bilo koje dvije tačke može sračunati ukoliko su poznate njihove koordinate u bilo kom pravouglom koordinatnom sistemu.

$$D_{A-B} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$$

Ukoliko je sračunat direkciono ugao iz datih koordinata tačaka, tada se može izvršiti i kontrola računanja dužine.

$$\sin v_A^B = \frac{\Delta Y}{D_{A-B}}$$

$$D_{A-B} = \frac{\Delta Y}{\sin v_A^B}$$

$$\cos v_A^B = \frac{\Delta X}{D_{A-B}}$$

$$D_{A-B} = \frac{\Delta X}{\cos v_A^B}$$

