

V Predavanje - zadaci

1. Prilikom mjerenja dužine pantljikom, koso po terenu, dobijena je vrijednost $D_{koso}=58,27$ m. Visinska razlika između krajnjih tačaka je $\Delta H=2,11$ m. Sračunati horizontalnu dužinu primjenom tačne i primjenom približne formule.

Primjenom tačne formule, horizontalna dužina se dobija kao:

$$D_{hor} = \sqrt{D_{koso}^2 - \Delta H^2} = \sqrt{58.27^2 - 2.11^2}$$

$$D_{hor} = 58.23 \text{ m}$$

Rezultat se zaokružuje na dvije decimale, kako je i data kosa dužina.

Napomena: U svim zadacima jedinice izvedene (sračunate) veličine treba zaokružiti na tačnost jedinice elemenata iz kojih su one sračunate.

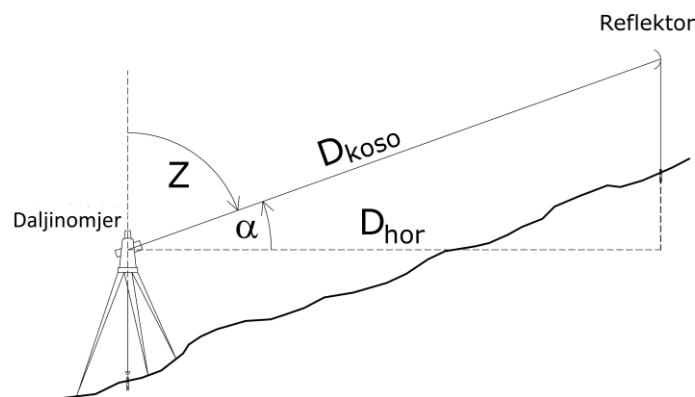
Primjenom približne formule, horizontalna dužina se dobije kao:

$$D_{hor} = D_{koso} - \frac{\Delta H^2}{2 * D_{koso}} - \frac{\Delta H^4}{8 * D_{koso}^3} = 58.23 - \frac{2.11^2}{2 * 58.27} - \frac{2.11^4}{8 * 58.27^3}$$

$$D_{hor} = 58.23 \text{ m}$$

Dobijeni rezultat je isti kao i primjenom tačne formule.

2. Elektromagnetnim daljinomjerom je na terenu izmjerena kosa dužina $D_{koso}=151,22$ m i zenitno odstojanje $Z = 87^\circ 23' 11''$. Sračunati horizontalnu dužinu.



Bez obzira na vrijednosti mjerenih veličina Z ili α iz slike gore se dobijaju formule za računanje horizontalnih dužina:

$$D_{hor} = D_{koso} * \sin Z \quad \text{ili}$$

$$D_{hor} = D_{koso} * \cos \alpha$$

U ovom zadatku dato je zenitno odstojanje pa će tražena horizontalna dužina biti:

$$D_{hor} = D_{koso} * \sin Z = 151.22 \text{ m} * \sin 87^{\circ}23'11''$$

$$D_{hor} = 151.06 \text{ m}$$

3. Elektromagnetnim daljinomjerom je na terenu izmjerena kosa dužina $D_{koso}=97.98 \text{ m}$ i vertikalni ugao $\alpha = -4^{\circ}07'59''$. Sračunati horizontalnu dužinu.

Horizontalna dužina se računa po formuli:

$$D_{hor} = D_{koso} * \cos \alpha$$

Pošto za vrijednost vertikalnog ugla imamo negativan broj, na njega će se dodati 360° .

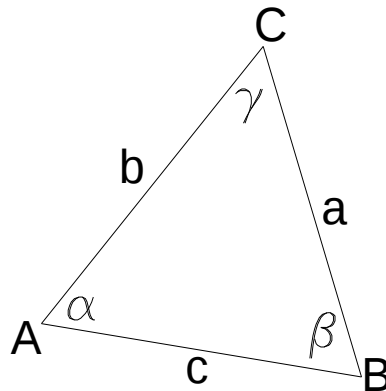
$$\alpha = -4^{\circ}07'59''(+360^{\circ}) = 355^{\circ}52'01''$$

$$D_{hor} = 97.88 \text{ m} * \cos 355^{\circ}52'01''$$

$$D_{hor} = 97.63 \text{ m}$$

4. Za trougao na slici sračunati preostale elemente ako su dati podaci:

$\alpha = 57^{\circ}28'39''$, $\beta = 64^{\circ}04'57''$ i $b=49.53\text{m}$.



Vrijednost ugla γ se dobija iz uslova da je zbir unutrašnjih uglova u trouglu jednak 180° :

$$\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta = 180^{\circ} - 57^{\circ}28'39'' - 64^{\circ}04'57''$$

$$\gamma = 58^{\circ}26'24''$$

Za računanje nepoznatih stranica u ovom slučaju se može primijeniti sinusna teorema koja za ovako postavljene elemente trougla na slici glasi:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m$$

Iz date proporcije se može sračunati dužina a preko formule:

$$a = \frac{b * \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{49.53 m * \sin 57^\circ 28' 39''}{\sin 64^\circ 04' 57''}$$

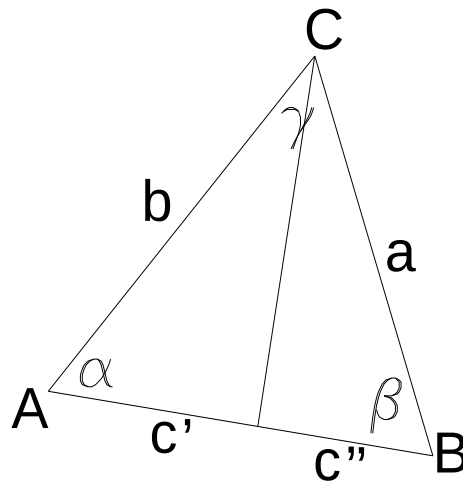
$$a = 46.43 m$$

I na kraju se sračuna dužina c preko:

$$c = \frac{a * \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{46.43 m * \sin 58^\circ 26' 24''}{\sin 57^\circ 28' 39''}$$

$$c = 46.92 m$$

Kontrola se vrši spuštanjem visine na stranicu c čime se stranica c dijeli na dva dijela c' i c'' . Zbir ta dva dijela treba da bude jednak stranici $c = c' + c''$.

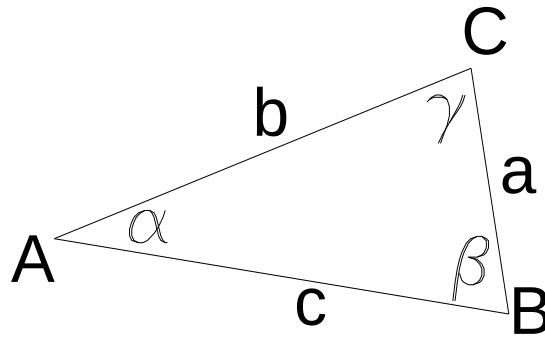


Sa slike se vidi da je $c' = b * \cos \alpha$ i $c'' = a * \cos \beta$, pa se kontrola sračunatih elemenata trougla se može izvršiti preko formule:

$$c = b * \cos \alpha + a * \cos \beta = 49.53 * \cos 57^\circ 28' 39'' + 46.43 * \cos 64^\circ 04' 57''$$

$$c = 46.92 m$$

5. Za trougao na slici sračunati preostale elemente ako su dati podaci:
 $\beta = 80^\circ 14' 22''$, $a = 37.21\text{m}$ i $b = 62.29\text{m}$.



Dati element predstavljaju situaciju kada su date dvije stranice i ugao naspram duže od njih. U ovom slučaju postoji samo jedno rješenje za vrijednosti preostalih elemenata i potrebno je za date elemente postaviti sinusnu teoremu:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m$$

Iz nje se može izraziti sinus ugla α kao:

$$\sin \alpha = \frac{a * \sin \beta}{b} \text{ odakle je:}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{a * \sin \beta}{b} = \arcsin \frac{37.21 * \sin 80^\circ 14' 22''}{62.29}$$

$$\alpha = 36^\circ 03' 58''$$

Zatim se može sračunati vrijednost ugla β iz pravila da je zbir unutrašnjih uglova u trouglu 180° :

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 36^\circ 03' 58'' - 80^\circ 14' 22''$$

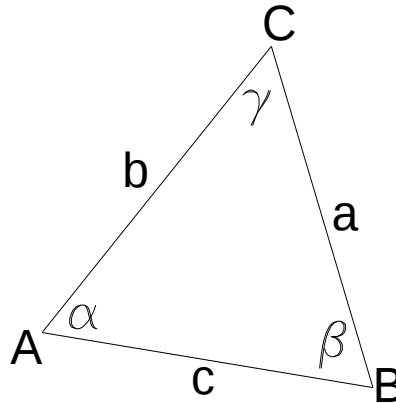
$$\beta = 63^\circ 41' 40''$$

I na kraju stranica b:

$$b = \frac{a * \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{37.21 * \sin 63^\circ 41' 40''}{\sin 36^\circ 03' 58''}$$

$$b = 56.66 \text{ m}$$

6. Za trougao na slici sračunati preostale elemente ako su dati podaci:
 $\gamma = 23^\circ 15' 21''$, $a = 58.81$ m i $b = 56.32$ m.



U ovom slučaju nije moguće riješiti trougao preko sinusne teoreme već je to moguće preko tangensne teoreme, kosinusne teoreme ili diobom trougla na dva pravougla trougla. Ovdje će biti obrađeno rješenje trougla preko kosinusne teoreme.

Kosinusna teorema za ovako postavljene elemente glasi:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Odnosno:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = \sqrt{58.81^2 + 56.32^2 - 2 * 58.81 * 56.32 * \cos 23^\circ 15' 21''}$$

$$c = 23.33 \text{ m}$$

Zatim se možemo vratiti na sinusnu teoremu:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m \text{ odakle se može sračunati ugao } \beta:$$

$$\sin \beta = \frac{b * \sin \gamma}{c} \text{ odnosno}$$

$$\beta = \arcsin \frac{b * \sin \gamma}{c} = \arcsin \frac{56.32 * \sin 23^\circ 15' 21''}{23.33}$$

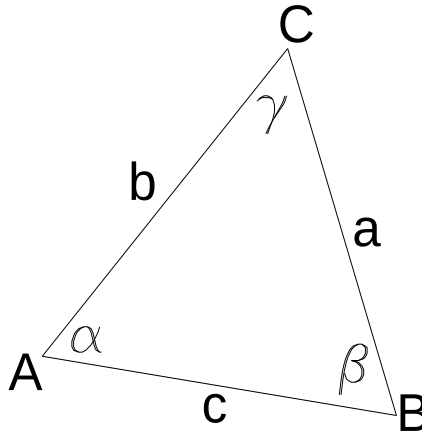
$$\beta = 72^\circ 23' 40''$$

I na kraju, poslednji ugao dobijamo preko:

$$\alpha = 180^\circ - \gamma - \beta = 180^\circ - 23^\circ 15' 21'' - 72^\circ 23' 40''$$

$$\alpha = 84^\circ 20' 59''$$

7. Za trougao na slici sračunati preostale elemente ako su dati podaci:
a=49.47 m, b=43.89 m i c=50.51 m.



Iz jednog od oblika kosinusne teoreme:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ može se izraziti vrijednost kosinusa ugla α :

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ odakle je:}$$

$$\alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \arccos \frac{43.89^2 + 50.51^2 - 49.47^2}{2 * 43.89 * 50.51}$$

$$\alpha = 62^\circ 44' 49''$$

Za računanje preostala dva ugla u trouglu vratićemo se sinusnoj teoremi:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m \text{ odakle je:}$$

$$\sin \beta = \frac{b * \sin \alpha}{a} \text{ odnosno:}$$

$$\beta = \arcsin \frac{b * \sin \alpha}{a} = \arcsin \frac{43.89 * \sin 62^\circ 44' 49''}{49.47}$$

$$\beta = 52^\circ 03' 57''$$

I na kraju, poslednji ugao dobijamo preko:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 62^\circ 44' 49'' - 52^\circ 03' 57''$$

$$\gamma = 65^\circ 11' 14''$$