

Vježbe 1

1. Radnik svaki dan na posao ide autobusom, taksijem ili biciklom. U 50% slučajeva ide autobusom, u 20% slučajeva se odlučuje za taksijem, a u 30% slučajeva ide biciklom. Vjerovatnoća da će zbog kašnjenja autobusa zakasni na posao je 0.05, u slučaju izbora taksija 0.1, a biciklom kasni sa vjerovatnoćom 0.01.
- Izračunati vjerovatnoću sa kojom radnik kasni na posao.
 - Ako je radnik zakasnio na posao, koliko je vjerovatnoća da je išao biciklom?

Rješenje:

Označimo događaje:

Z – „Radnik određenog dana kasni na posao“

A – „Radnik ide na posao autobusom“

T – „Radnik ide na posao taksijem“

B – „Radnik ide na posao biciklom“

- $P(A)=0.5; \quad P(T)=0.2; \quad P(B)=0.3;$
 $P(Z|A)=0.05; \quad P(Z|T)=0.1; \quad P(Z|B)=0.01;$
 $P(Z)=P(A)P(Z|A)+P(T)P(Z|T)+P(B)P(Z|B)=$
 $=0.5 \cdot 0.05+0.2 \cdot 0.1+0.3 \cdot 0.01=0.048.$
- $P(B|Z)=\frac{P(B)P(Z|B)}{P(Z)}=\frac{0.3 \cdot 0.01}{0.048}=0.0625.$

2. Tri komunikaciona kanala se koriste za prenos podataka i to čine na sljedeći način:

- Prvi kanal prenosi 10 bita, od čega su 4 neispravna;
- Drugi kanal prenosi 6 bita, od čega je 1 neispravan;
- Treći kanal prenosi 8 bita, od čega su 3 neispravna.

Iz slučajno odabranog kanala se nasumice odabira jedan bit.

- Odrediti vjerovatnoću da je odabrani bit neispravan.
- Odrediti vjerovatnoću da je odabrani bit iz drugog kanala, ako se zna da je taj bit ispravan.

Rješenje:

Označimo događaje:

A – „odabrani bit je neispravan“

B_i – „odabrani bit potiče iz komunikacionog kanala $i \in \{1,2,3\}$ “

- Pošto je $\{B_1, B_2, B_3\}$ potpun sistem događaja, očigledno je:

$$P(B_i)=\frac{1}{3}, i \in \{1,2,3\} \quad (\text{Imajte u vidu da su odabiri kanala međusobno nezavisni događaji})$$

$$P(A|B_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}, \quad P(A|B_2)=\frac{1}{6}, \quad P(A|B_3)=\frac{3}{8}.$$

Na osnovu formule totalne vjerovatnoće možemo pisati:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{113}{360} \approx 0.3139.$$

b) Imajući u vidu definiciju događaja A, definišimo da je događaj:

\bar{A} – „odabrani bit je ispravan“

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.3139 = 0.6861,$$

$$P(\bar{A}|B_2) = 1 - P(A|B_2) = \frac{5}{6},$$

pa primjenom Bajesove jednakosti dobijamo da je:

$$P(B_2|\bar{A}) = \frac{P(B_2)P(\bar{A}|B_2)}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}}{0.6861} \approx 0.4049.$$

3. Firma ima na raspolaganju 6 telefonskih linija. Neka je X broj linija zauzetih u određenom trenutku. Zakon raspodjele za X je dat sa:

$$X: \begin{matrix} x_i \\ p(x_i) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.1 & 0.15 & 0.2 & 0.25 & 0.2 & 0.06 & 0.04 \end{pmatrix}$$

a) Izračunati vjerovatnoće sljedećih događaja:

A – „bar 3 linije su zauzete“,

B – „manje od 2 linije su zauzete“,

C – „najmanje 4 linije nijesu zauzete“,

D – „zauzeto je između 2 i 5 linija“.

b) Naći funkciju raspodjele $P_{\xi}(x), x \in R$.

Rješenje:

a) Tražene vjerovatnoće su:

$$P(A) = P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 0.25 + 0.2 + 0.06 + 0.04 = 0.55;$$

$$P(B) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.1 + 0.15 = 0.25;$$

$$P(C) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.1 + 0.15 + 0.2 = 0.45;$$

$$P(D) = P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.2 + 0.25 + 0.2 + 0.06 = 0.71.$$

$$b) P_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.1 & 0 \leq x < 1 \\ 0.25 & 1 \leq x < 2 \\ 0.45 & 2 \leq x < 3 \\ 0.7 & 3 \leq x < 4 \\ 0.9 & 4 \leq x < 5 \\ 0.96 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & 6 \leq x \end{cases}$$

4. Na pravcu kretanja automobila se nalaze 3 semafora. Vjerovatnoća zaustavljanja automobila na prvom semaforu je 0.4, na drugom 0.6 i na trećem 0.5. Pretpostaviti da semafori rade

nezavisno jedan od drugog. Naći raspodjelu slučajne promjenljive X koja predstavlja broj semafora koje je vozač automobila prošao do prvog zaustavljanja. Uradite sami!