

Vježbe 7

- (a) Poruku 110011 treba kodirati sa pravougaonim kodom (12, 6). Bitovi parnosti se postavljaju na posljednjim pozicijama u kodu.
(b) Odrediti kontrolnu matricu ovog koda.
(c) Do greške u rezultujućoj poruci je došlo na poziciji 7. Odrediti sindrom i uporediti sa odgovarajućom kolonom kontrolne matrice.

Riešenje:

(a) Pravougaoni kod (12, 6) koristi ukupno $n=12$ bita, od čega su $k=6$ informacioni biti. Pogodan način zapisa je:

i_1	i_2	i_3	q_1
i_4	i_5	i_6	q_2
q_3	q_4	q_5	q_6

pri čemu su sa i označeni informacioni biti, a sa q kontrolni biti. Naša poruka sa sada može zapisati na sljedeći način:

1	1	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0

Kodirana poruka je sada:

i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0

(b) Za kreiranje kontrolne matrice potrebno je znati koje informacione biti kontrolišu pojedini kontrolni biti:

q_1 – kontroliše bite i_1, i_2, i_3

q_2 – kontroliše bite i_4, i_5, i_6

q_3 – kontroliše bite i_1, i_4

q_4 – kontroliše bite i_2, i_5

q_5 – kontroliše bite i_3, i_6

q_6 – kontroliše bite $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$

Stoga je kontrolna matrica sljedećeg oblika:

$$H = \begin{matrix} & i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(c) Primitljena je poruka sa greškom na 7. om bitu:

$$\begin{array}{cccccccccccc} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Sindrom S nam daje poziciju greške, i određuje se kao proizvod primljene poruke c i transponovane kontrolne matrice H :

$$S = cH^T = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0] \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Ovim smo dobili vrijednost koja odgovara 7.oj koloni kontrolne matrice H , pa zaključujemo da je greška nastala na bitu q_1 .

Napomena: ne zaboravite da se prilikom računanja sindroma koristi \oplus umjesto običnog $+$.

2. (a) Dat je trougaoni kod (15,10). Izvršiti kodiranje poruke 1101101010. Bitove parnosti postaviti na posljednjim pozicijama u kodu.
- (b) Odrediti kontrolnu matricu za ovaj kod.
- (c) Do greške u prenosu je došlo na poziciji 6. Izvršiti dekodiranje poruke na osnovu kontrolne matrice.

Rješenje:

(a) Trougaoni kod (15, 10) koristi ukupno $n=15$ bita, od čega su $k=10$ informacioni bita. Pogodan način zapisa je:

i_1	i_2	i_3	i_4	q_1
i_5	i_6	i_7	q_2	
i_8	i_9	q_3		
i_{10}	q_4			
q_5				

pri čemu su sa i označeni informacioni bita, a sa q kontrolni bita. Naša poruka sa sada može zapisati na sljedeći način:

1	1	0	1	1
1	0	1	1	
0	1	0		
0	0			
0				

Kodirana poruka je sada:

$$\begin{array}{cccccccccccc} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(b) Za kreiranje kontrolne matrice potrebno je znati koje informacione biti kontrolišu pojedini kontrolni biti:

q_1 – kontroliše bite i_1, i_2, i_3, i_4

q_2 – kontroliše bite i_4, i_5, i_6, i_7

q_3 – kontroliše bite i_3, i_7, i_8, i_9

q_4 – kontroliše bite i_2, i_6, i_9, i_{10}

q_5 – kontroliše bite i_1, i_5, i_8, i_{10}

Stoga je kontrolna matrica sljedećeg oblika:

$$H = \begin{matrix} & i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(c) Primitljena je poruka sa greškom na 6. om bitu:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Sindrom S je u ovom slučaju:

$$S = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]$$

Ovim smo dobili vrijednost koja odgovara 6. oj koloni kontrolne matrice H , pa zaključujemo da je greška nastala na bitu i_6 .

3. (a) Poruku 1101 kodirati Hamming-ovim kodom (7,4).

(b) Generisati grešku na poziciji 6 koju treba detektovati i ispraviti. Hamming-ov kod je sa pravilnim binarnim rasporedom bitova.

(c) Odrediti kontrolnu matricu i generatorsku matricu za ovaj kod.

Riešenje:

(a) Hamming-ov kod (7, 4) koristi ukupno $n=7$ bita, od čega su $k=4$ informacioni biti, a 3 kontrolni biti. Kontrolni biti se nalaze na pozicijama stepena dvojke, odnosno u našem slučaju na pozicijama 1, 2, 4.

Koje pozicije provjeravaju biti parnosti? U našem slučaju se kodiranje obavlja sa 7 bita. Zapišimo binarno brojeve od 1 do 7. Bit na poziciji 1 provjerava parnost na onim pozicijama, gdje je u ovoj sekvenci jedinica na posljednjem mjestu (mjestu bita najmanje važnosti), bit na poziciji 2 kontrolira pozicije gdje je jedinica na narednom bitu, a bit na poziciji 4 kontrolira one pozicije gdje je jedinica na prvom bitu (bitu najveće važnosti). Odnosno:

q_1 – kontrolira pozicije 1, 3, 5, 7
 q_2 – kontrolira pozicije 2, 3, 6, 7
 q_3 – kontrolira 4, 5, 6, 7

001
010
011
100
101
110
111

Stoga se kodirana riječ zapisuje na sljedeći način:

$$q_1 \ q_2 \ 1 \ q_3 \ 1 \ 0 \ 1$$

odnosno:

$$1010101$$

(b) Neka je primljena poruka sa greškom na 6.oj poziciji, odnosno poruka:

$$1010111$$

Provjerimo kontrolne bite:

$$q_1 = 1+1+1+1=0 \text{ – nema greške}$$

$$q_2 = 0+1+1+1=1 \text{ – greška!}$$

$$q_3 = 0+1+1+1=1 \text{ – greška!}$$

Čitajući dobijene vrijednosti (od bita najveće ka bitu najmanje težine) dobijamo poziciju greške:

$$110_{(2)}=6_{(10)}.$$

(c) Imajući u vidu koje informacione bite kontroliraju pojedini kontrolni biti, kontrolna matrica je oblika:

$$H = \begin{matrix} & q_1 & q_2 & i_1 & q_3 & i_2 & i_3 & i_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ovo je kontrolna matrica zapisana sa pravilnim binarnim rasporedom. Zapišimo je sada u ustaljenom obliku (informacioni biti, a potom kontrolni biti):

$$H = \begin{matrix} & i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & q_1 & q_2 & q_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Generatorska matrica za ovaj slučaj se može definisati kao: $G = [I_4 | P]$. Imajući u vidu da je

$H = [P^T | I_3]$, generatorska matrica se može zapisati kao:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$