

Vježbe 9

1. (a) Kreirati ternarni Hamming-ov kod (4,2), ako je generatorski polinom $x^2 + 2x + 2$ (napisati odgovarajuću kontrolnu matricu).
- (b) Kodirati poruku $2x + 1$ kreiranim Hamming-ovim kodom.
- (c) Generisana je greška težine 1 na poziciji 1. Provjeriti rad kreiranog Hamming-ovog koda u ovom slučaju.
- (d) Generisana je greška težine 2 na poziciji 1. Provjeriti rad kreiranog Hamming-ovog koda u ovom slučaju.
- (e) Kreirati generatorsku matricu ovoga koda.

Rješenje:

- (a) Označimo sa α korjene posmatranog generatorskog polinoma. Dalje možemo pisati:

$$\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0, \text{ odnosno}$$

$$\alpha^2 = -2\alpha - 2 = \alpha + 1 \text{ (oduzimanje sa 2 nam se svodi na sabiranje sa 1!)}$$

$$\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha$$

Zapišimo dobijene rezultate u vektorskom obliku:

$$\alpha^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kontrolna matrica H je tada:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (b) Kodiranu poruku, po definiciji, dobijamo množenjem informacionih simbola i generatorskog polinoma:

$$\begin{aligned} c(x) = i(x)g(x) &= (2x + 1)(x^2 + 2x + 2) = 2x^3 + 4x^2 + 4x + x^2 + 2x + 2 = \\ &= 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2 = 2x^3 + 2x^2 + 2 \end{aligned}$$

Dakle, dobijena kodirana riječ je [2 2 0 2].

- (c) Generišimo grešku težine 1 na poziciji 1. U tom slučaju je primljena poruka: [2 2 1 2]. Dekodiranje obavljamo dijeljenjem polinoma dobijene poruke i generatorskog polinoma:

$$(2x^3 + 2x^2 + x + 2) : (x^2 + 2x + 2) = 2x + 1$$

$$\underline{2x^3 + x^2 + x}$$

$$x^2 + 2$$

$$\underline{x^2 + 2x + 2}$$

$$-2x \Rightarrow x$$

Ostatak odgovara koloni $[1 \ 0]^T$, pa odavde nedvosmisleno zaključujemo da je greška težine 1 detektovana na poziciji α^1 , odnosno da je ispravna poruka [2 2 0 2].

- (d) Generišimo grešku težine 2 na poziciji 1. U tom slučaju je primljena poruka: [2 2 2 2]. Dekodiranje obavljam o dijeljenjem polinoma dobijene poruke i generatorskog polinoma:

$$(2x^3 + 2x^2 + 2x + 2) : (x^2 + 2x + 2) = 2x + 1$$

$$\underline{2x^3 + x^2 + x}$$

$$x^2 + x + 2$$

$$\underline{x^2 + 2x + 2}$$

$$-x \Rightarrow 2x$$

Ostatak odgovara umnošku prve kolone kontrolne matrice (koja odgovara poziciji α^1), odnosno $2 \times [1 \ 0]^T = [2 \ 0]^T$. Odavde nedvosmisleno zaključujemo da je greška težine 2 detektovana na poziciji α^1 , odnosno da je ispravna poruka [2 2 0 2].

- (e) Pođimo od definicija generatorkse i kontrolne matrice nebinarnih kodova:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k \mid \mathbf{R}] \quad \mathbf{H} = [\mathbf{P}^T \mid \mathbf{I}]$$

Prisjetimo se da $\mathbf{GH}^T = \mathbf{0}$ mora biti zadovoljeno. Stoga je:

$$\mathbf{GH}^T = \mathbf{P} + \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

U dijelu pod (a) smo odredili da je kontrolna matrica za ovaj kod:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

što dalje znači da je:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

U skladu sa napisanim jednačinama, veoma je jednostavno odrediti R:

$$P + R = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Stoga je generatorska matrica:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$