DINAMIKA

Osnovni pojmovi i zadaci dinamike

- Klasična teorijska mehanika dijeli se na tri discipline: statiku, kinematiku i dinamiku.

- Zovemo je klasičnom mehanikom zato što je bazirana na osnovnim Njutnovim principima mehanike.

- Proučava materijalnu tačku i materijalno tijelo, nedeformabilne sisteme.

- U kinematici osnovni pojmovi bili su prostor i vrijeme a ostali pojmovi koji se javljaju: brzina, ubrzanje, sektorska brzina, izvedeni su iz osnovnih pojmova.

- Putanje, brzine, ubrzanja u kinematici se izučavaju kao posljedice. Uzrok kretanja, sila F, izučava se u dinamici.

- Sila je količinska mjera mehaničkog međudejstva između dva tijela u potpunosti definisana Njutnovim zakonima.

- Sila je vektorska veličina, određena intenzitetom, pravcem i smjerom.

- Ni jedno kretanje ne može da se izvede bez sile.

- U dinamici osnovni pojmovi su prostor, vrijeme i masa, pa dinamika izučava kretanje materijalnih objekata.

- Tijela koja imaju masu ili materijalna tijela, međudejstvuju jedno na drugo, a mjera tog dejstva je sila. Zato su osnovni pojmovi u dinamici: prostor, vrijeme i sila.

- Ako znamo masu tijela i ubrzanje onda znamo i silu, pa je sila izvedeni pojam.
- Osnovni modeli u dinamici, sa stanovišta predmeta proučavanja, su materijalna tačka, sistem materijalnih tačaka i materijalno (kruto).
- Materijalna tačka je najjednostavniji model u dinamici.
- Tačka je tijelo bez dimenzija.
- Ovakva idealizacija je moguća ako su pređena rastojanja mnogo veća od dimenzija tijela koje se kreće.

- Sve mehanike pručavaju tačku i tijelo. Neke oblasti proučavaju kao geometrijske oblike a neke kao masene oblike.

- U dinamici kruto tijelo je tijelo koje ima masu i koje se pod dejstvom sila u toku kretanja ne deformiše, tj. ne mijenja oblik i dimenzije.

- Dinamika se bazira na Njutnovim principima.

- U klasičnoj mehanici tj. u dinamici proučavamo brzine mnogo manje od brzine svjetlosti - $\vec{v} \ll c$

Osnovni zakoni dinamike
Njutnovi zakoni

Osnovni zakoni dinamike ili Njutnovi zakoni imaju status aksioma tj. usvajaju se bez dokazivanja i predstavljaju iskustvom potvrđene istine.

Isak Njutn je 1687. godine definisao četiri poznata aksioma, u svom djelu ,,Matematički osnovi prirodne filozofije” ili Principi koji se odnose na model materijalne tačke:

A1) Aksiom inercije

Svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili u stanju jednolikog pravolinijskog kretanja, sve dok pod uticajem sila ne bude prinudjeno da to stanje promijeni.

A2) Aksiom o kretanju tijela, odnosno o promjeni količine kretanja

Proizvod mase i ubrzanja materijalne tačke koje ona dobija kada na nju djeluje sila, po intenzitetu jednak je toj sili, a njegov pravac i smjer se poklapaju sa pravcem i smjerom sile tj.

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{1}$$

Jednačina (1) se naziva osnovna jednačina dinamike materijalne tačke.

Ovaj aksiom se može definisati kao:

Promjena količine kretanja tijela proporcionalna je sili koja djeluje i vrši se u pravcu i smjeru djelovanja sile:

$$\vec{K} = m\vec{V}\ ,\ \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}\ ,\ \text{odnosno}\quad m\vec{a} = \vec{F}$$

A3) Aksiom akcije i reakcije

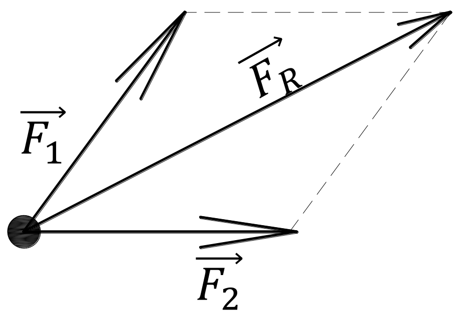
Dvije izolovane materijalne tačke djeluju jedna na drugu silama istih intenziteta i suprotnih smjerova duž prave koja spaja te dvije tačke:

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\ \overrightarrow{F_{21}}$$

Često se kraće kaže akcija (dejstvo) tijela je jednaka reakciji (protivdejstvu).

Ovaj princip ukazuje da je za postojanje sile potrebno najmanje dva materijalna tijela, od kojih je jedno izvor sile.

A4) Aksiom o nezavisnosti dejstva, odnosno paralelogram sila



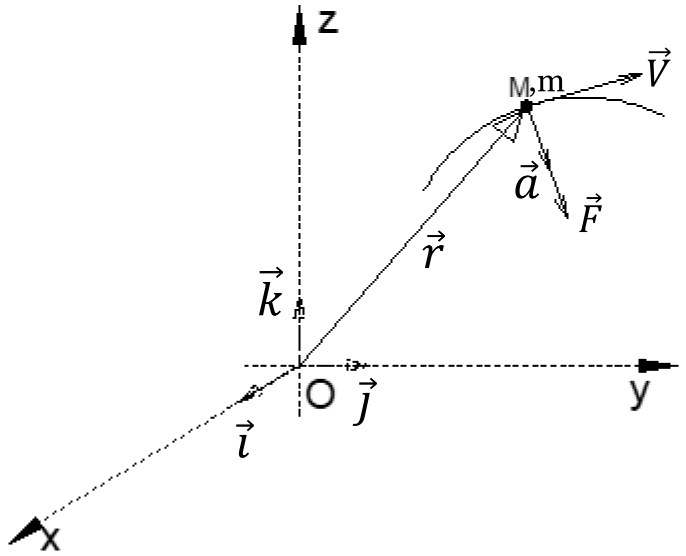
Ako na tijelo dejstvuju dvije sile ono će se pomjerati po dijagonali paralelograma konstruisanog nad tim silama kao stranicama.

Ovaj princip ukazuje na prirodu sile, da je sila vektorska veličina.

Sva četiri principa u potpunosti definišu silu.

Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke

Neka se tačka M, mase m, kreće pod dejstvom sile $\vec{F}$. Neka je $\vec{r}$ vektor položaja tačke M u odnosu na Dekartov koordinatni sistem:



Koristeći relaciju (1) dobijamo diferencijalnu jednačinu kretanja materijalne tačke u vektorskom obliku:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \qquad (2)$$

a) Diferencijalne jednačine u Dekartovim koordinatama

Vektorskoj jednačini (2) u Dekartovom koordinatnom sistemu odgovaraju tri skalarne jednačine i to:

$$m\ddot{x} = F_x \, , \ddot{y} = F_y \, , m\ddot{z} = F_z \qquad (3)$$

koje se dobijaju projektovanjem jednačine (2) na ose x, y, z.

Vektori $\vec{a}, \overrightarrow{F}$ imaju svoje projekcije na navedene ose i to:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$$

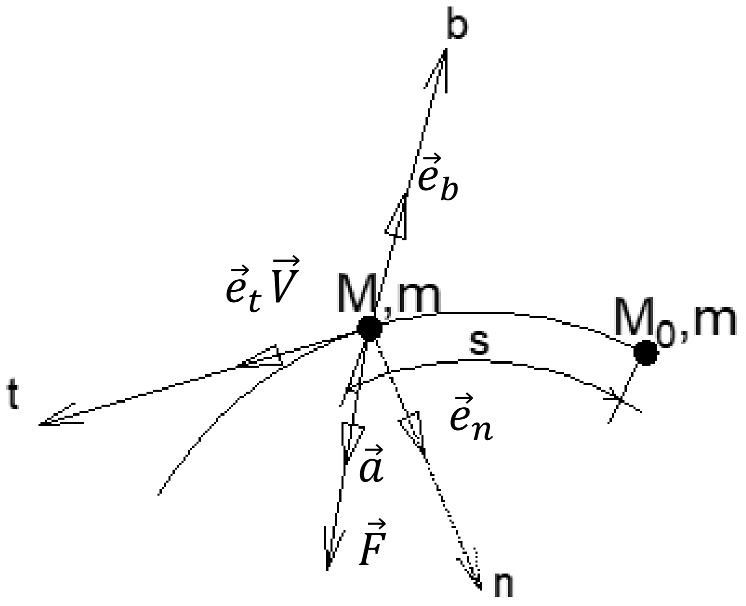
Ukoliko se tačka M kreće u ravni, imamo dvije jednačine:

$$m\ddot{x} = F_x\ ,\ m\ddot{y} = F_y \tag{4}$$

Kod pravolinijskog kretanja , na primjer duž x ose imamo samo jednu jednačinu

$$m\ddot{x} = F_x \tag{5}$$

Diferencijalne jednačine kretanja u prirodnim koordinatama (Ojlerove jednačine)



Ako je kretanje materijalne tačke definisano u prirodnom koordinatnom sistemu određenom sa $\vec{e}_t$, $\vec{e}_n$, $\vec{e}_b$, osa tangente, normale i binormale, tada vektorska jednačina (2) projektovana na ose prirodnog koordinatnog sistema ima sledeći oblik:

$$m\frac{dV}{dt} = F_t$$

$$\frac{V^2}{R^2} = F_n \qquad (6)$$

$$F_b = 0$$

gdje je:

$$\vec{F} = F_t\vec{e}_t + F_n\vec{e}_n + F_b\overrightarrow{e_b}$$

Jednačine (6) zovu se Ojlerove diferencijalne jednačine kretanja tačke. One se koriste kada je poznata putanja tačke.

Dinamika tačke. Osnovni zadaci dinamike tačke

- Postoje dva osnovna zadatka dinamike tačke i dinamike uopšte:

Prvi zadatak

Kako odrediti silu koja dejstvuje na tačku mase m ako je njeno kretanje poznato

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

- Da bi odredili silu, diferenciraćemo jednačine

$$x = x(t) \rightarrow \dot{x} = \dot{x}(t) \rightarrow \ddot{x} = \ddot{x}(t) \overset{m}{\Rightarrow} \vec{F}_x = m \cdot \ddot{x} \qquad cos\alpha_x = \frac{F_x}{F}$$

$$y = y(t) \rightarrow \dot{y} = \dot{y}(t) \rightarrow \ddot{y} = \ddot{y}(t) \overset{m}{\Rightarrow} \vec{F}_y = m \cdot \ddot{y} \qquad cos\beta_x = \frac{F_y}{F}$$

$$z = z(t) \rightarrow \dot{z} = \dot{z}(t) \rightarrow \ddot{z} = \ddot{z}(t) \overset{m}{\Rightarrow} \vec{F}_z = m \cdot \ddot{z} \qquad cos\gamma_x = \frac{F_z}{F}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

1. Zadatak

Tačka mase m kreće se pravolinijski po pravoj x=ksinωt. Odrediti silu koja uslovljava to kretanje.

Neka je osa x pravac kretanja tačke:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = k\omega cos\omega t$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -k\omega^2 sin\omega t = -\omega^2 x$$

$$F = F_x = m\ddot{x} = -m\omega^2 x$$

2. Zadatak

Tačka M mase m = 4kg kreće se tako da se pravougle Dekatove koordinate mijenjaju po zakonu $x = t^2 + 2t - 1$ $y = 2t^2 - 4$ $z = 4t^2 - 1$
gdje su x, y i z u cm a t u s. Odrediti intenzitet sile.

$$x = t^2 + 2t - 1 \rightarrow \dot{x} = 2t + 2 \rightarrow \ddot{x} = 2 \rightarrow F_x = 4 \cdot 2 = 8\,N$$

$$y = 2t^2 - 4 \rightarrow \dot{y} = 4t \rightarrow \ddot{y} = 4 \rightarrow F_y = 4 \cdot 4 = 16\,N$$

$$z = 4t^2 - 1 \rightarrow \dot{z} \rightarrow 8t \rightarrow \ddot{z} = 8 \rightarrow F_z = 4 \cdot 8 = 32\,N$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 36.6\,N$$

$$cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{8}{36.6}$$

$$cos\beta = \frac{F_y}{F} = \frac{16}{36.6}$$

$$cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{32}{36.6}$$

3. Zadatak

Tačka M mase m kreće se po horizontalnoj ravni tako da se njene polarne koordinate mijenjaju po zakonu $r = pt$, $\varphi = qt$, p i q je konstantno. Odrediti silu koja proizvodi ovo kretanje.

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = rp^2$$

$$a_\varphi = 2r\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 2rq$$

$$a = \sqrt{a_r{}^2 + a_\varphi{}^2} = \sqrt{r}$$

$$\dot{r} = p$$

$$\ddot{r} = 0$$

$$\dot{\varphi} = q$$

$$\ddot{\varphi} = 0$$

$$a_r = -ptg^2$$

$$a_\varphi = 2pg$$

$$F_r = ma_r = -mptq^2$$

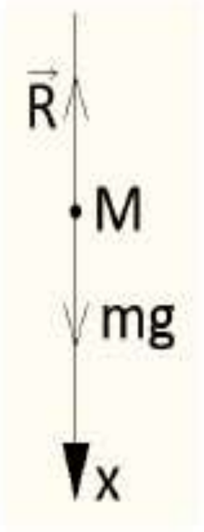
$$F_\varphi = ma_\varphi = 2mpq$$

$$F = \sqrt{F_r{}^2 + F_\varphi{}^2} = mpq\sqrt{t^2q^2 + 4}$$

4. Zadatak

Balon mase 1 g, pada pod dejstvom sile pri čemu je njegovo kretanje određeno relacijom $x = 490t - 245(1 - e^{-2t})$

gdje je x u cm a t u s, a osa Ox usmjerena je vertikalno naniže. Odrediti u dinima silu R otpora vazduha u zavisnosti od njegove brzine uzimajući da je $g = 980 cm/s^2$, $R = f(\dot{x}) = ?$



$$m \cdot \ddot{x} = mg - R$$

$$R = mg - m\ddot{x}$$

$$x = 490t - 245(1 - e^{-2t}) = 490t - 245 + 245e^{-2t}$$

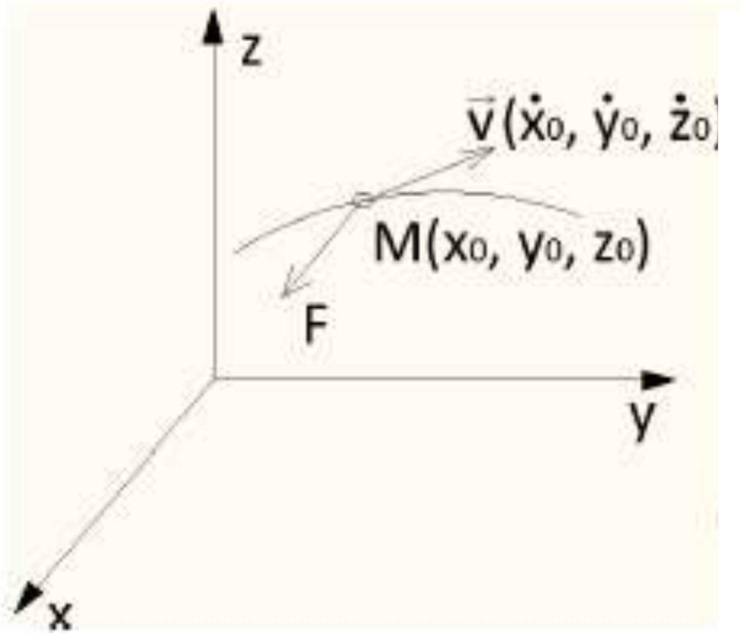
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 490 + 245e^{-2t}(-2) = 490(1 - e^{-2t})$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -490e^{-2t}(-2) = 980e^{-2t}$$

$$R = 1[g] \cdot 980 \left[\frac{cm}{s^2}\right] - 1[g] \cdot 980e^{-2t} = 980(1 - e^{-2t}) = 2 \cdot 490(1 - e^{-2t}) = 2 \cdot \dot{x}$$

Drugi zadatak

Drugi osnovni zadatak dinamike je obrnut prethodnom zadatku i predstvalja suštinski problem dinamike. Sastoji se u sljedećem: Treba integraljenjem diferencijalnih jednačina kretanja materijalne tačke koje odgovaraju izabranom koordinatnom sistemu referencije, odrediti zakon kretanja tačke ako je poznata sila, masa i tzv. početno kinematičko stanje (početni položaj $\vec{r}(t_0)=\vec{r}_0$ *i početna brzina* $\vec{v}(t_0)=\vec{v}_0$*).*



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

$$\boldsymbol{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{F}(c, t\,\vec{r}, \vec{v})} \qquad (7)$$

gdje sila $\vec{F}$ *može biti proizvoljna funkcija vremena, položaja, brzine*

U Dekartovom koordinatnom sistemu diferencijalne jednačine kretanja su:

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad m\ddot{x} = F_x(c, t, \vec{r}, \vec{v})$$

$$m\ddot{y} = F_y, \qquad m\ddot{y} = F_y(c, t, \vec{r}, \vec{v}) \qquad (8)$$

$$m\ddot{z} = F_z, \qquad m\ddot{z} = F_z(c, t, \vec{r}, \vec{v})$$

Kako su jednačine (8) diferencijalne jednačine drugog reda, to znači da će u njihovim rješenjima biti šest integracionih konstanti koje određujemo iz početnog kinematičkog stanja za $t = t_{0,}$ $\vec{r} = \vec{r}_0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$, tj.

$$t = t_0 \begin{Bmatrix} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \dot{y} = \dot{y}_0 \\ \dot{z} = \dot{z}_0 \end{Bmatrix}$$

Na taj način dolazimo do rješenja za traženi zakon kretanja:

x=x(t), $x = x(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t)$

y=y(t), $y = y(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t)$

z=z(t), $z = z(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t)$

Slično radimo i kod drugih koordinatnih Sistema.

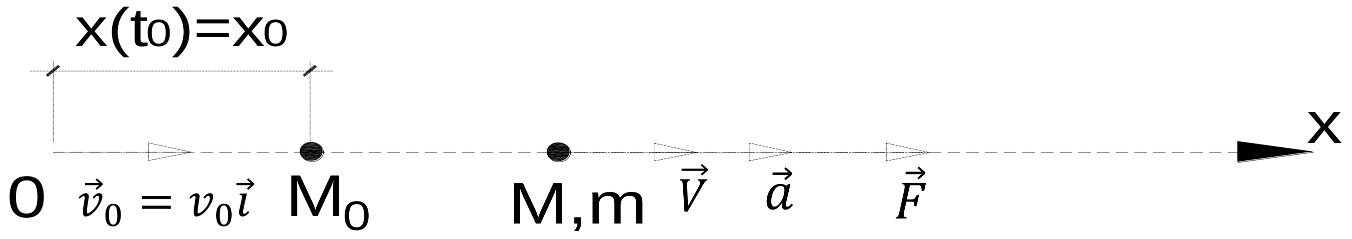
Drugi zadatak dinamike je komplikovaniji od prvog zadatka dinamike, zato što integraljenje desnih strana jednačina (8) je otežano jer su sile u opštem slučaju proizvoljne funkcije vremena, položaja i brzine.

Pravolinijsko kretanje tačke

Teorema 1

Potreban i dovoljan uslov da kretanje bude pravolinijsko jeste da početna brzina ima pravac sile (ako je početna brzina nula, u pravcu sile).

Pretpostavimo da sila $\vec{F}$ ima pravac x ose:



$$\vec{V} = V\vec{\imath} = \dot{x}\vec{\imath}$$

$$\vec{a} = a\vec{\imath} = \dot{V}\vec{\imath} = \ddot{x}\vec{\imath}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} = F\vec{\imath}$$

Diferencijalna jednačina kretanja (7) projektovana na Dekartove koordinate je:

$$m\ddot{x} = F_x$$

$$\ddot{m}y = 0$$

$$m\ddot{z} = 0$$

Integraljenjem jednačina:

$$\ddot{y} = 0 ==> \ \dot{y} = c_1, \quad y = c_1 t + c_3$$

$$\ddot{z} = 0 ==> \ \dot{z} = c_2, \quad z = c_2 t + c_4$$

i korišćenjem početnih uslova

$$t = t_0 ==> \ x_0 = y_0 = z_0, \quad \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0$$

dobijamo da je $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$

i rješenje

$$y = 0$$

$$z = 0$$

predstavlja dvije koordinatne ravni koje u presjeku daju x-osu. Tačka se kreće pravolinijski po x osi, čime je dokazana teorema 1.

Pravolinijsko kretanje sa konstantnom silom

Ukoliko je sila koja djeluje na tačku konstantna i data početna brzina $\overrightarrow{v_0}$, onda iz jednačine (2) slijedi:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

$$m\ddot{x} = F_x \; , F_x = const$$, pa je

$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m} = a = const$$

Tada imamo jednako promjenljivo pravolinijsko kretanje, pa je zakon promjene brzine:

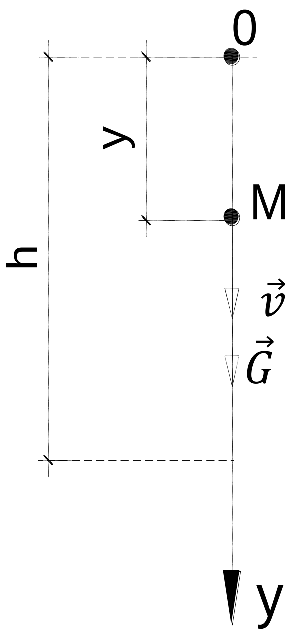
$$\dot{x} = at + v_0$$

a jednačina kretanja materijalne tačke je

$$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$

Slobodni pad materijalne tačke zanemarujući otpor vazduha

Tačka M, težine G slobodno pada sa visine h iznad površine Zemlje. Odrediti zakon kretanja tačke ako je njena težina konstantna i zanemaren otpor vazduha.



Neka je početni položaj tačke ujedno koordinatni početak O, a proizvoljan položaj tačke M određen je koordinatom y kao na slici.

Na tačku dejstvuje konstantna sila težine $\vec{G}$

$$m\vec{a} = \vec{G} = m\vec{g}$$

$$m\ddot{y} = mg$$

$$\ddot{y} = g \tag{a}$$

Integracijom ove jednačine dobijamo

$$\dot{y} = gt + c_1$$

za $t_0 = 0, \ \ y_0 = 0 \ \ i \ \ \dot{y}_0 = 0$ pa je $c_1 = 0$

Brzina slobodnog padanja tijela $\dot{y} = gt$

Integracijom ove jednačine i korišćenjem početnih uslova dobijamo jednačinu kretanja tačke:

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$y(t) = h$$

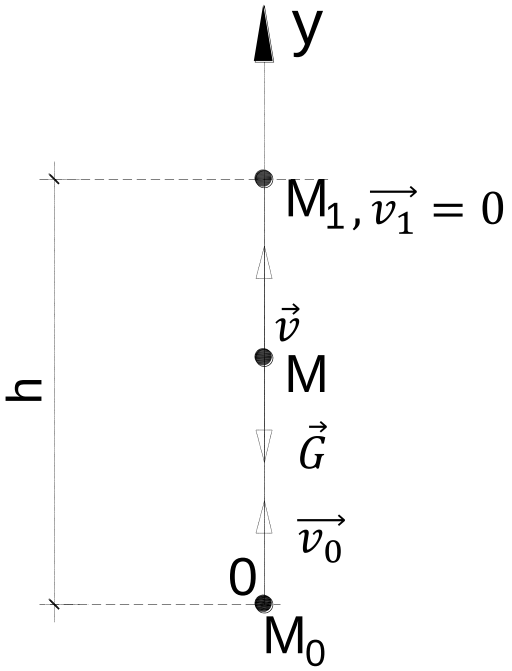
$\frac{1}{2}gt^2 = h ==> t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ – vrijeme slobodnog padanja tačke

a $\quad v = \sqrt{2gh}$ je brzina kojom tačka udari o zemlju pri slobodnom padu.

Galilej je prvi eksperimentalno utvrdio brzinu, vrijeme i jednačinu kretanja materijalne tačke u bezvazdušnom prostoru pri slobodnom padu bez početne brzine pod dejstvom njene težine.

Vertikalni hitac pod dejstvom sile težine materijalne tačke u bezvazdušnom prostoru

Materijalna tačka M, težine G bačena je sa površine Zemlje vertikalno uvis sa početnom brzinom $\overrightarrow{v_0}$. Odrediti zakon kretanja tačke.
Početni položaj tačke M_0 ujedno je i početak koordinatnog sistema sa smjerom naviše tj. u smjeru kretanja tačke.



$$m\ddot{y} = -G = -mg ==> \ddot{y} = -g\,, \quad \dot{y} = -gt + c_1$$

$$\text{za } t_0 = 0,\ \ \dot{y}_0 = v_0 \quad i \quad \dot{y}_0 ==> c_1 = v_0$$

$$\dot{y} = -gt + v_0$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + c_2$$

za $t_0 = 0, y_0 = 0\ c_2 = 0$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

za $y_{max} = h$ dobijamo vrijeme penjanja

$$v_0 - gt_1 = 0 ==> t_1 = \frac{v_0}{g}$$

$y_{max} = h = \frac{{v_0}^2}{2g}$ – najveća visina penjanja

Pošto je tačka dostigla najveću visinu ona nastavlja da slobodno pada.

Pravolinijsko kretanje tačke kada sila zavisi od vremena

Zadatak

Tačka M mase m počinje kretanje iz stanja mirovanja po horizontalnoj pravolinijskoj putanji pod uticajem sile čiji je intenzitet proporcionalan vremenu.

$$F = k \cdot t$$

$t_0 = 0, x_0 = 0, y_0 = 0$

$$m\ddot{x} = kt$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{k}{m}t$$

$$d\dot{x} = \frac{k}{m}tdt$$

$$\dot{x} = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2} + C_1$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2} + C_1$$

$$dx = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2}dt + C_1dt$$

$$x = \frac{k}{2m}\frac{t^3}{3} + C_1t + C_2$$

$$t_0 = 0, x_0 = 0, y_0 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$t_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$x = \frac{kt^3}{6m}$$