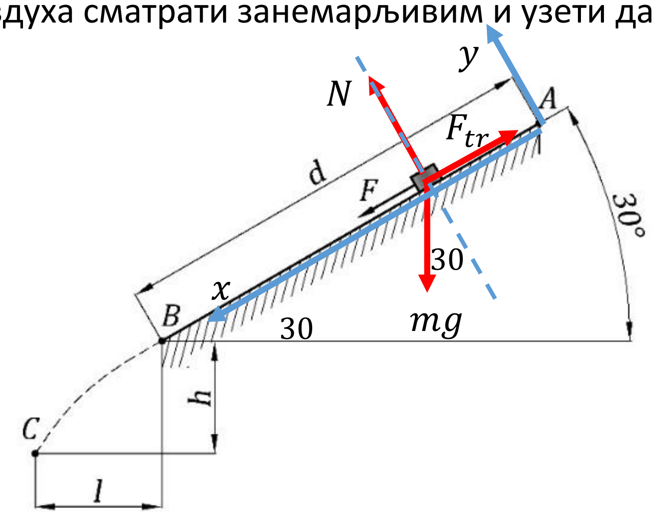
ЗАДАТАК БР. 1

Пакет масе m започиње кретање низ стрму раван из положаја А без почетне брзине. Све вријеме током кретања на пакет дјелује сила константног интензитета $F = 2mg$ [N] у правцу стрме равни. Коефицијент динамичког трења између пакета и подлоге је 0,58. Одредити:

- убрзање и брзину пакета у положају B који се у односу на положај A налази на растојању $d = 10$ m,
- положај пакета у тачки C, ако се зна да пакет из тачке B у тачку C путује 2 s (отпор ваздуха сматрати занемарљивим и узети да је $g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$).



A – B

$$m\vec{a} = \vec{F} \Longrightarrow \begin{cases} ma_x = F - F_{tr} + mg\sin 30° \\ ma_y = N - mg\cos 30° \end{cases}$$

Кретање је **само** у правцу осе x, што значи да је убрзање тачке у правцу осе y једнако нули:

$$0 = N - mg\cos 30° \Longrightarrow \boldsymbol{N} = mg\cos 30° = m10\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{5\sqrt{3}m}$$

$$F_{tr} = \mu N = 0{,}58 \cdot 5\sqrt{3}m = 5m$$

Из прве једначине добијамо:

$$ma_x = 2m10 - 5m + m10\frac{1}{2}$$

$$ma_x = 20m\ /{:}\,m$$

$$\boldsymbol{a_x = 20}$$

Пошто нема убрзања у правцу осе y, онда је укупно убрзање једнако убрзању у правцу се x.

$$a = 20 \Rightarrow a_B = 20$$

ПРВИ начин:

$$a = 20$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 20 \Rightarrow dv = 20dt \Rightarrow \int\limits_{v_0=v_A=0}^{v} dv = 20 \int\limits_{t_0=0}^{t} dt$$

$$\boldsymbol{v = 20t}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = 20t \Rightarrow ds = 20tdt \Rightarrow \int\limits_{s_0=x_0=0}^{s} ds = 20\int\limits_{0}^{t} tdt$$

$$\boldsymbol{s = 10t^2}$$

Претходна једначина важи за било који положај на дионици А-В, па самим тим важи и за тачку В:

$$s_B = 10t_B^2 \Rightarrow 10 = 10t_B^2 \Rightarrow \boldsymbol{t_B = 1\ \mathrm{s}}$$

$$\boldsymbol{v_B} = 20t_B = 20 \cdot 1 = \boldsymbol{20\frac{m}{s}}$$

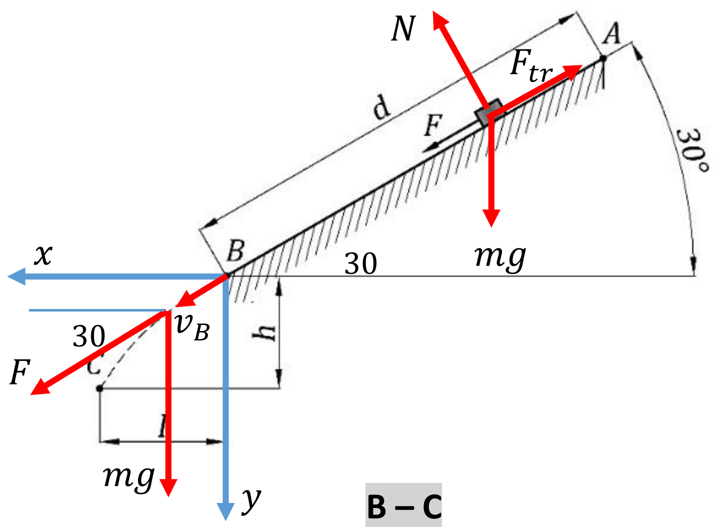
ДРУГИ начин:

$$a = 20$$

$$a = \frac{dv}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{vdv}{ds}$$

$$\frac{vdv}{ds} = 20 \Rightarrow \int\limits_{v_0=0}^{v} vdv = 20 \int\limits_{s_0=x_0=0}^{s} ds \Rightarrow \frac{v^2}{2} = 20s$$

$$\frac{v_B^2}{2} = 20s_B \Rightarrow v_B^2 = 40s_B \Rightarrow \boldsymbol{v_B} = \sqrt{40s_B} = \sqrt{400} = \boldsymbol{20\frac{m}{s}}$$



B – C

$$m\vec{a} = \vec{F} \Longrightarrow \begin{cases} ma_x = F\cos 30^\circ \\ ma_y = F\sin 30^\circ + mg \end{cases}$$

$$t_{B-C} = 2\ \mathrm{s}$$

$$ma_x = 2mg\frac{\sqrt{3}}{2}\ /{:}\,m$$

$$a_x = g\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\int_{v_{xB}=v_B\cos 30^\circ=10\sqrt{3}}^{v_x} dv_x = 10\sqrt{3}\int_0^t dt$$

$$v_x - 10\sqrt{3} = 10\sqrt{3}t$$

$$v_x = 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3}t$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{x_B=0}^{x} dx = \int_0^t \left(10\sqrt{3} + 10\sqrt{3}t\right)dt$$

$$x = 10\sqrt{3}t + 5\sqrt{3}t^2$$

$$\boldsymbol{x_C} = 10\sqrt{3}t_{B-C} + 5\sqrt{3}{t_{B-C}}^2 = \mathbf{40\sqrt{3}\ m} = \boldsymbol{l}$$

$$ma_y = F\sin 30° + mg$$

$$ma_y = 2mg$$

$$a_y = 20$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$\int_{v_{yB}=+v_B \sin 30°=10}^{v_y} dv_y = 20\int_0^t dt$$

$$v_y = 10 + 20t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

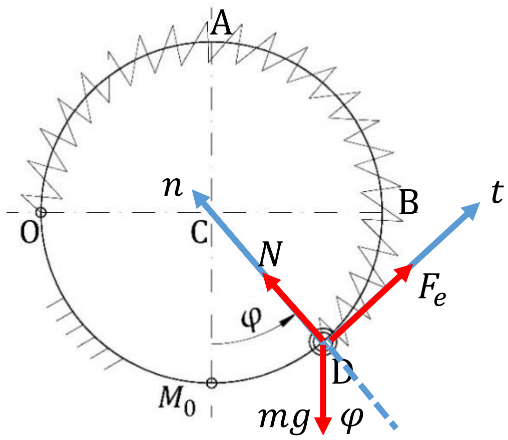
$$\int_{y_B=0}^{y} dy = \int_0^t (10 + 20t)dt$$

$$y = 10t + 10t^2$$

$$\boldsymbol{y_C} = 10t_{B-C} + 10t_{B-C}{}^2 = 20 + 40 = \mathbf{60\ m} = \boldsymbol{h}$$

ЗАДАТАК БР. 2

У вертикалној равни по глаткој вези кружног облика, полупречника R, креће се прстен масе m. Опруга крутости c ненапрегнуте дужине $l_0 = R\pi/2$, везана је једним крајем за непокретну тачку O, а другим за прстен. Ако је у почетном тренутку прстен мировао у положају M_0, одредити реакцију везе у положају B.



Веза је глатка – нема трења између везе и прстена.

$l_0 = R\pi/2$ (четвртина обима круга) – то значи да је недеформисана дужина опруге лучно растојање од тачке О ка тачки А.

Сила у опрузи је усмјерена увијек ка свом недеформисаном положају.

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_t = F_e - mg\sin\varphi \\ ma_n = N - mg\cos\varphi \end{cases}$$

$$N = ma_n + mg\cos\varphi = m\frac{\boldsymbol{v}^2}{R} + mg\cos\varphi$$

$$ma_t = F_e - mg\sin\varphi$$

Сила у опрузи једнака је производу крутости опруге и деформације опруге.

Деформација опруге је разлика тренутне дужине опруге и дужине недеформисане опруге.

Тренутна дужина опруге је:

$$\left(3\frac{\pi}{2} - \varphi\right)R$$

Деформација опруге је:

$$\left(3\frac{\pi}{2}-\varphi\right)R-l_0=\frac{3}{2}\pi R-\varphi R-\frac{1}{2}\pi R=\pi R-\varphi R$$

$$ma_t=c\pi R-c\varphi R-mg\sin\varphi\ \ /:m$$

$$a_t=\frac{c\pi R}{m}-\frac{cR}{m}\varphi-g\sin\varphi$$

$$a_t=\frac{dv}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi}=\frac{\omega dv}{d\varphi}=\frac{\frac{v}{R}dv}{d\varphi}$$

$$\frac{1}{R}\int_0^v vdv=\int_0^\varphi\left(\frac{c\pi R}{m}-\frac{cR}{m}\varphi-g\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$\frac{1}{R}\frac{v^2}{2}=\left(\frac{c\pi R}{m}\varphi-\frac{cR}{m}\frac{\varphi^2}{2}+g\cos\varphi\right)\Bigg|_0^\varphi$$

$$\frac{1}{R}\frac{v^2}{2}=\frac{c\pi R}{m}\varphi-\frac{cR}{m}\frac{\varphi^2}{2}+g(\cos\varphi-\cos 0)\ /2R$$

$$v^2=\frac{2c\pi R^2}{m}\varphi-\frac{cR^2}{m}\varphi^2+2gR(\cos\varphi-1)$$

Добијени израз за брзину тачке уврштавамо у израз за нормалну реакцију подлоге:

$$N=\frac{m}{R}\left(\frac{2c\pi R^2}{m}\varphi-\frac{cR^2}{m}\varphi^2+2gR(\cos\varphi-1)\right)+mg\cos\varphi$$

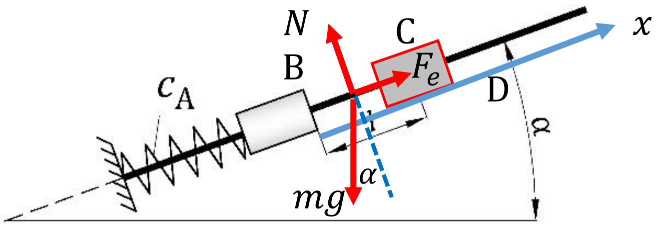
Добили смо нормалну реакцију подлоге у било ком положају на путањи. Нас интересује положај B у коме је $\varphi=\pi/2$.

$$\boldsymbol{N_B}=\frac{m}{R}\left(\frac{c\pi^2R^2}{m}-\frac{cR^2}{m}\frac{\pi^2}{4}-2gR\right)=\boldsymbol{\frac{3cR\pi^2}{4}-2mg}$$

ЗАДАТАК БР. 3

Одредити максимално растојање које ће прећи клизач масе $m = 2\ \mathrm{kg}$, крећући се по глатком нагнутом штапу, ако је у почетном положају (положај B) опруга на коју се наслања клизач била сабијена за $l = 200\ \mathrm{mm}$. Почетна брзина клизача (брзина у положају B) је једнака нули.

Дато је: $c_{\mathrm{A}} = c = 400\ \ \mathrm{N/m}\,, \alpha = 20°$.



Тијело није везано за опругу. То значи да ће дејство силе у опрузи престати онога тренутка када се опруга врати у свој недеформисани положај C. Према томе, кретање раздвајамо на два дијела – дио од B до C и дио од положаја C до положаја D у коме се материјална тачка зауставила.

B – C

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = F_e - mg\sin\alpha \\ ma_y = N - mg\cos\alpha \end{cases}$$

Сила у опрузи једнака је производу крутости и деформације. У положају B деформација опруге је l. У положају C деформација опруге је 0. Нас интересује деформација у произвољном положају на дијелу између B и C, дефинисаном координатом x. Дакле, деформација опруге у том положају је $l - x$.

$$ma_x = c(l - x) - mg\sin\alpha\ /: m$$

$$a_x = \frac{c}{m}l - \frac{c}{m}x - g\sin\alpha$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{v_x dv_x}{dx}$$

$$\int_{v_{xB}=0}^{v_x} v_x dv_x = \int_0^x \left(\frac{c}{m}l - \frac{c}{m}x - g\sin\alpha\right) dx$$

$$\frac{v_x^2}{2} = \frac{c}{m}lx - \frac{c}{m}\frac{x^2}{2} - g\sin\alpha\, x$$

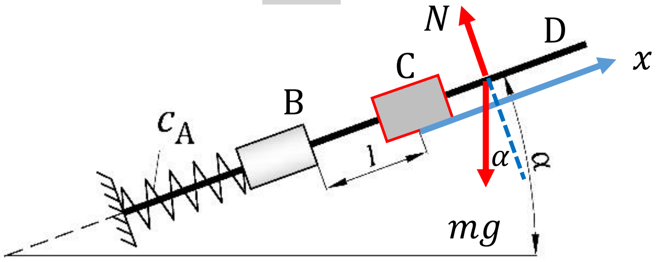
Претходни израз примјењујемо на положај C:

$$v_{xC} = \sqrt{2\left(\frac{c}{m} l x_C - \frac{c}{m}\frac{x_C^2}{2} - g\sin\alpha\, x_C\right)}$$

$$v_{xC} = \sqrt{2\left(\frac{c}{m} l^2 - \frac{c}{m}\frac{l^2}{2} - g\sin\alpha\, l\right)}$$

$$v_{xC} = \sqrt{2\left(\frac{400}{4} 0{,}2^2 \; - 9{,}81\sin 20° \cdot 0{,}2\right)} = 2{,}58\frac{m}{s}$$

C – D



Координатни почетак премјештамо у тачку C.

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = -mg\sin\alpha \\ ma_y = N - mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$a_x = -g\sin\alpha$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{v_x dv_x}{dx}$$

$$\int_{v_{xC}=2{,}58}^{v_x} v_x dv_x = -g\sin\alpha \int_0^x dx$$

$$\frac{v_x^2}{2} - \frac{2{,}58^2}{2} = -g\sin\alpha\, x$$

$$\frac{v_{xD}^2}{2} - \frac{2{,}58^2}{2} = -g\sin\alpha\, x_D \Rightarrow 0 - \frac{2{,}58^2}{2} = -g\sin\alpha\, x_D$$

$$x_D = \frac{2{,}58^2}{2g\sin\alpha} = 0{,}99 \text{ m}$$

Максимално растојање у односу на почетни положај B је: $0{,}2 + 0{,}99 = \mathbf{1{,}19\ m}$.