РАД СИЛЕ

Елементарни рад силе једнак је скаларном производу вектора силе и вектора елементарног помјерања које сила изазове:

$$\hat{d}A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

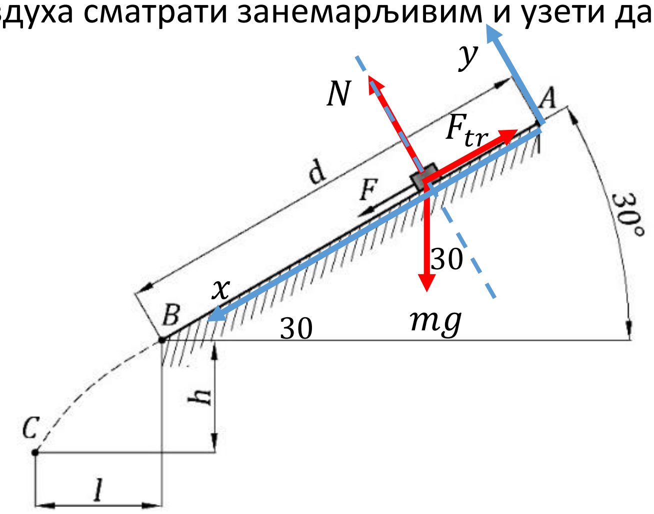
Интеграцијом претходног израза добијамо вриједност рада у конкретним случајевима.

За задатке постављене посљедњи пут одредити радове свих сила на одговарајућим помјерањима.

ЗАДАТАК БР. 1

Пакет масе m започиње кретање низ стрму раван из положаја А без почетне брзине. Све вријеме током кретања на пакет дјелује сила константног интензитета $F = 2mg$ [N] у правцу стрме равни. Коефицијент динамичког трења између пакета и подлоге је 0,58. Одредити:

- убрзање и брзину пакета у положају В који се у односу на положај А налази на растојању $d = 10$ m,
- положај пакета у тачки С, ако се зна да пакет из тачке В у тачку С путује 2 s (отпор ваздуха сматрати занемарљивим и узети да је $g \approx 10$ m/s^2).



А – В

Интересује нас рад свих сила које дјелују на тачку на помјерању из положаја А у положај В. Помјерање материјалне тачке врши се само у правцу осе x.

$$A^{\vec{F}} = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_0^{10} \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_0^{10} 2mgdx\cos 0 = \int_0^{10} 2mgdx = 20mg$$

$$A^{m\vec{g}} = \int_{x_A}^{x_B} m\vec{g}\cdot d\vec{x} = \int_0^{10} m\vec{g}\cdot d\vec{x} = \int_0^{10} mgdx\cos 60° = \int_0^{10} \frac{1}{2}mgdx = 5mg$$

$$A^{\vec{N}} = \int_{x_A}^{x_B} \vec{N}\cdot d\vec{x} = \int_0^{10} \vec{N}\cdot d\vec{x} = \int_0^{10} Ndx\cos 90° = 0$$

$$A^{\vec{F}_{tr}} = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F}_{tr}\cdot d\vec{x} = \int_0^{10} \vec{F}_{tr}\cdot d\vec{x} = \int_0^{10} 0{,}5mgdx\cos 180° = -5mg$$

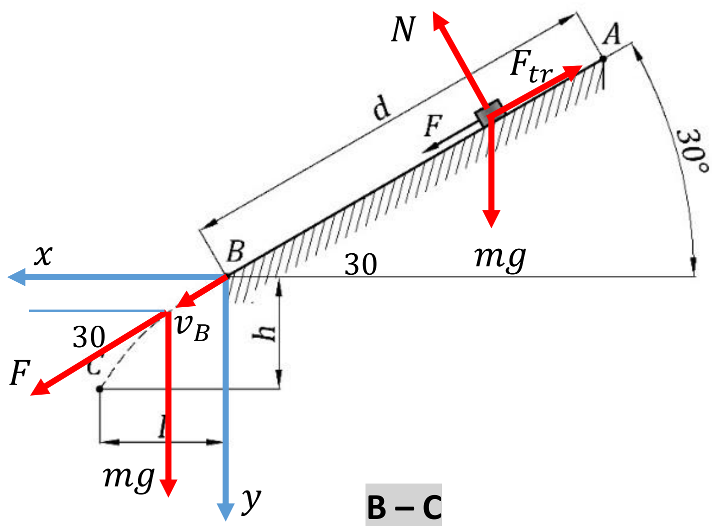
$$m\vec{a} = \vec{F} \Longrightarrow \begin{cases} ma_x = F - F_{tr} + mg\sin 30° \\ ma_y = N - mg\cos 30° \end{cases}$$

Кретање је **само** у правцу осе x, што значи да је убрзање тачке у правцу осе y једнако нули:

$$0 = N - mg\cos 30° \Longrightarrow \boldsymbol{N} = mg\cos 30° = mg\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{tr} = \mu N = 0{,}58\cdot mg\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}5mg$$

Укупан рад свих сила на помјерању тачке из положаја A у положај B је: $20mg$.



B – C

Интересује нас рад свих сила које дјелују на тачку на помјерању из положаја B у положај C. Помјерање материјалне тачке врши се у правцу обје осе.

Пошто је путања тачке крива линија, помјерање се врши по кривој линији која прати облик путање. Прираштај вектора положаја је:

$$d\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}$$

Рад силе која изазива помјерање тачке у овом случају могао би да се напише у облику:

$$A^{\vec{F}} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \left(F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath}\right) \cdot (dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}) = \int \left(F_x dx + F_y dy\right)$$
$$= \int F_x dx + \int F_y dy$$

У конкретном случају је:

$$\boldsymbol{A}^{\vec{F}} = \int_{x_B}^{x_C} F\cos 30°\, dx + \int_{y_B}^{y_C} F\sin 30°\, dy = \int_0^l 2mg\frac{\sqrt{3}}{2}dx + \int_0^h 2mg\frac{1}{2}dy$$

Дужине l и h су одређене у претходно постављеном материјалу: $l = 40\sqrt{3}\ \mathrm{m}$ $h = 60\ \mathrm{m}$

$$\boldsymbol{A}^{\vec{F}} = \int_0^{40\sqrt{3}} mg\sqrt{3}dx + \int_0^{60} mgdy = mg\sqrt{3}40\sqrt{3} + mg60 = 180mg$$

$$\boldsymbol{A}^{m\vec{g}} = \int_{x_B}^{x_C} mg\cos 90°\, dx + \int_{y_B}^{y_C} mg\sin 90°\, dy = 0 + \int_0^h mgdy = 60mg$$

Укупан рад свих сила на помјерању тачке из положаја A у положај B је: $240mg$.

Замислимо аксијалну опругу крутости c и координатну осу x која прати правац опруге, а чији је координатни почетак у тачки у којој је опруга недеформисана. Даље замислимо да је за опругу везана тачка чије кретање посматрано на дионици P-K, гдје је P почетни положај тачке, а K крајњи положај тачке. Сила у опрузи има интензитет једнак производу крутости опруге и деформације, а смјер увијек ка недеформисаном положају опруге. Рад силе у опрузи је:

$$A^{\overrightarrow{F^e}} = \int_{x_P}^{x_K} \overrightarrow{F^e} \cdot d\vec{x} = \int_{x_P}^{x_K} F^e dx \cos 0 = \int_{x_P}^{x_K} c\Delta dx = \int_{\Delta_P}^{\Delta_K} c\Delta d(-\Delta) = -c\frac{\Delta^2}{2}\bigg|_{\Delta_P}^{\Delta_K}$$

$$A^{\overrightarrow{F^e}} = \frac{1}{2}c(\Delta_P^2 - \Delta_K^2)$$

Δ_P је деформација опруге у почетном положају, а Δ_K деформација опруге у крајњем положају.

Сила земљине теже увијек је константног интензитета, у вертикалном правцу и усмјерена наниже. Да не бисмо сваки пут интеграцијом одређивали њен рад, можемо написати готов израз:

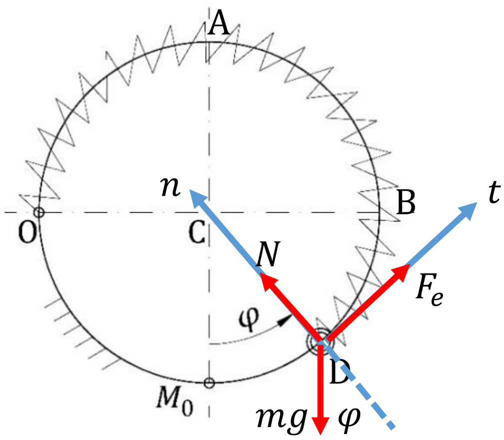
$$A^{m\vec{g}} = \pm mgh$$

h је висинска разлика између почетног и крајњег положаја. Знак „$+$“ ће фигурисати ако се тачка спушта у односу на почетни положај, а знак „$-$“ ако се тачка креће навише.

У свим задацима којима ћемо се бавити нормална реакција везе је увијек управна на правац помјерања, па је њен интензитет једнак нули.

ЗАДАТАК БР. 2

У вертикалној равни по глаткој вези кружног облика, полупречника R, креће се прстен масе m. Опруга крутости c ненапрегнуте дужине $l_0 = R\pi/2$, везана је једним крајем за непокретну тачку O, а другим за прстен. Ако је у почетном тренутку прстен мировао у положају M_0, одредити реакцију везе у положају B.



Интересује нас рад сила на помјерању прстена из почетног положаја M_0 у положај B. На прстен дјелују сила у опрузи, сила земљине теже и нормална реакција везе.

<u>*Сила у опрузи*</u>

$$A^{\vec{F_e}} = \frac{1}{2}c\left(\Delta_{M_0}^2 - \Delta_B^2\right)$$

Деформација опруге у почетном положају M_0 је лучно растојање од O до M_0 умањено за недеформисану дужину опруге:

$$\Delta_{M_0} = \frac{3\pi}{2}R - \frac{\pi}{2}R = \pi R$$

Деформација опруге у крајњем положају B је лучно растојање од O до B умањено за недеформисану дужину опруге:

$$\Delta_B = \pi R - \frac{\pi}{2}R = \frac{\pi}{2}R$$

$$A^{\vec{F_e}} = \frac{1}{2}c\left(\Delta_{M_0}^2 - \Delta_B^2\right) = A^{\vec{F_e}} = \frac{1}{2}c\left(\pi^2R^2 - \frac{\pi^2R^2}{4}\right) = \frac{3}{8}c\pi^2R^2$$

Препоручујем да се користите готовим изразом, али ако не желите може и на сљедећи начин:

$$ds = Rd\varphi$$

$$\Delta = R\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) - R\,\frac{\pi}{2} = R(\pi - \varphi)$$

$$A^{\overrightarrow{F_e}} = \int_0^{s_B} F_e ds = \int_0^{s_B} (c\Delta) ds = \int_0^{\varphi_B = \pi/2} c\,\underbrace{R(\pi - \varphi)}\,Rd\varphi = cR^2\left(\pi\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$A^{\overrightarrow{F_e}} = cR^2\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{3}{8}c\pi^2 R^2$$

Сила земљине теже

$$A^{m\vec{g}} = -mgR$$

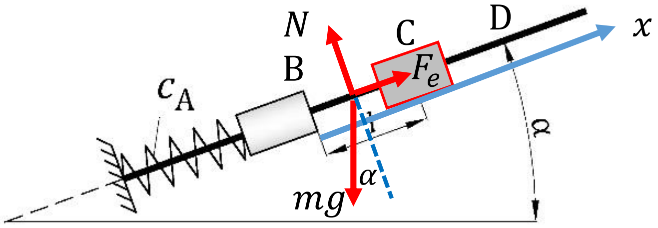
Нормална реакција везе

$$A^{\vec{N}} = 0$$

ЗАДАТАК БР. 3

Одредити максимално растојање које ће прећи клизач масе $m = 2\,\mathrm{kg}$, крећући се по глатком нагнутом штапу, ако је у почетном положају (положај B) опруга на коју се наслања клизач била сабијена за $l = 200\,\mathrm{mm}$. Почетна брзина клизача (брзина у положају B) је једнака нули.

Дато је: $c_{\mathrm{A}} = c = 400\ \mathrm{N/m}\,, \alpha = 20°$.



Сила у опрузи врши рад од почетног положаја B до положаја у коме је опруга недеформисана (положај C).

$$A^{\overrightarrow{F_e}} = \frac{1}{2}c(\Delta_B^2 - \Delta_C^2) = \frac{1}{2}c(l^2 - 0^2) = \frac{cl^2}{2} = \frac{400 \cdot 0{,}2^2}{2} = 8\,\mathrm{J}$$

Сила земљине теже врши рад од почетног (B) до крајњег положаја (D).

$$A^{m\vec{g}} = -mgh = -mg\overline{BD}\sin\alpha = -8\,\mathrm{J}$$

Растојање $\overline{BD}$ је одређено у претходно постављеном материјалу и износило је $1{,}19\ \mathrm{m}$.

Нормална реакција подлоге не врши рад.

Дакле, сумарни рад свих сила на помјерању из почетног положаја у крајњи једнак је нули.