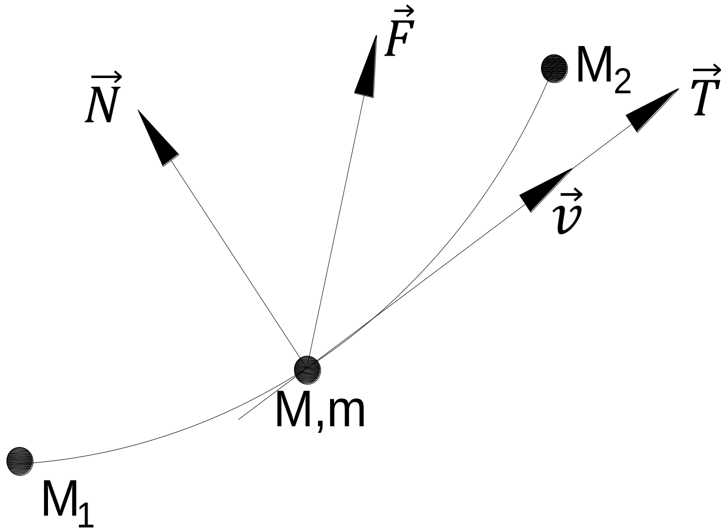
Teorema o priraštaju kinetičke energije (Zakon kinetičke energije)

Neka se materijalna tačka M, mase m kreće brzinom $\vec{v}$. Kinetička enegrija materijalne tačke je skalarna veličina jednaka polovini proizvoda mase i kvadrata brzine, tj.

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Polazimo od osnovne jednačine kretanja.



$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$ma_T = F_T \qquad a_T = \frac{dv}{dt}$$

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F_T \qquad m \cdot \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = F_T$$

$$m \cdot vdv = F_T ds = dA$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA$$

$dE_k = dA$ – zakon kinetičke energije u diferencijalnom obliku, glasi:

Diferencijal kinetičke energije na elementarnom pomjeranju materijalne tačke, jednak je elementarnom radu sile koja djeluje na materijalnu tačku na tom istom pomjeranju.

Ako izvršimo integraciju lijeve i desne strane jednačine u granicama koje odgovaraju početnom M_0 i krajnjem M_1 položaju materijalne tačke imaćemo:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA / \int .$$

$$\int_{v_0}^{v_1} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M_0}^{M_1} dA$$

$$\left(\frac{m{v_1}^2}{2}\right) - \left(\frac{m{v_0}^2}{2}\right) = A_{M_1 M_0}$$

$E_{k_1} - E_{k_2} = A_{M_1 M_0}$ - zakon promjene kinetičke energije u integranom obliku, glasi:

Priraštaj kinetičke energije materijalne tačke pri pomjeranju tačke pod dejstvom neke sile jednak je radu te sile na tom pomjeranju.

Kinetička energija je skalar i zove se još živa sila. Integraljenje ne treba vršiti:

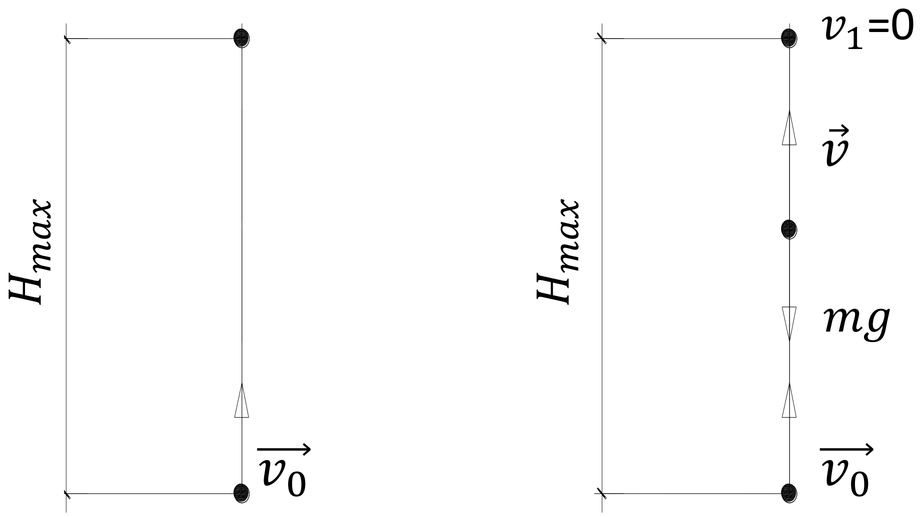
1) kada je sila konstantna

2) kada je sila funkcija položaja

Kinetičku energiju imamo pri radu, a rad u prisustvu sile.

Zadatak

Primjenom zakona o priraštaju kinetičke energije naći maksimalnu visinu penjanja materijalne tačke kod vertikalnog hica.



$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgz$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgH_{max}$$

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -mgH_{max}$$

$$-\frac{v_0^2}{2} = -gH_{max}$$

$$H_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Konzervativne sile

Zakon o održanju mehaničke energije

Ako je $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ takva da su njene koordinate određene relacijama:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

gdje je

$E_p = E_p(x, y, z)$ – funkcija položaja, onda kažemo da naša sila ima funkciju sile. Za takvu silu kažemo da je konzervativna.

$$dA = \vec{F}\, d\vec{r} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz\right) = -dE_p$$

Izraz na desnoj strani je totalni diferencijal funkcije sile.

E_p se naziva diferencijalna energija.

$$dA = -dE_p$$

Elementaran rad u polju sile koja ima funkciju sile je totalni diferencijal sa suprotnim znakom.

Rad konzervativne sile $\vec{F}$ na konačnom pomjeranju od položaja M_0 do M_1 je:

$$A_{M_0M_1} = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F}\,\overrightarrow{dr} = -\int_{M_0}^{M_1} dE_p = E_{p_{(M_0)}} - E_{p_{(M_1)}}$$

jednak razlici vrijednosti potencijala energije u početnom i krajnjem položaju. Iz jednačine slijedi da rad zavisi samo od početnog i krajnjeg položaja tačke, a ne od oblika i dužine putanje po kojoj se napadna tačka sile kreće.

Ovu osobinu imaju konzervativne sile i to su sile zemljine teže i elastična sila u opruzi.

Mehanička energija

Zakon o držanju mehaničke energije

Polazimo od poznatih relacija:

$$dE_k = dA$$

$$==> \quad dE_k = -dE_p$$

$$dA = -dE_p$$

$$d(E_k + E_p) = 0$$

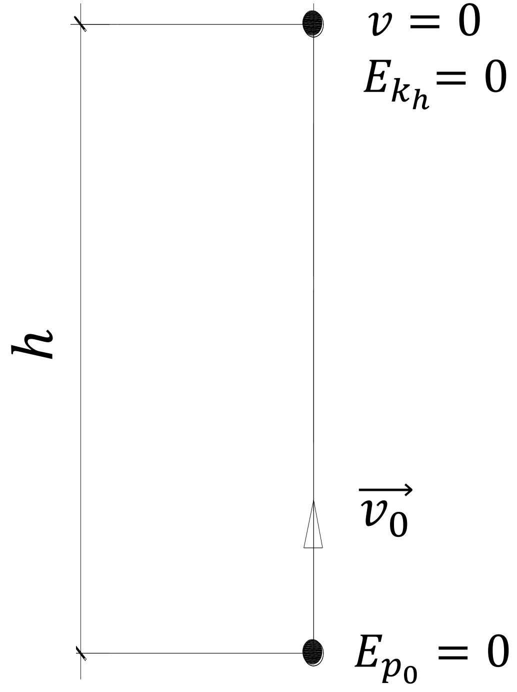
$$E_k + E_p = const$$

Zbir kinetičke E_k i potencijalne E_p energije nazivamo još i mehaničkom energijom.

U polju konzervativne sile važi zakon o održanju mehaničke energije, tj. zbir kinetičke i potencijalne energije je konstantan.

$$E_{k_0} + E_{p_0} = E_{k_1} + E_{p_1} = \ \dots . E_{k_h} + E_{p_h}$$

Primjer: vertikalni hitac



$$E_{k_0} + E_{p_0} = E_{k_h} + E_{p_h}$$

$$E_{k_0} = E_{p_h}$$

$$\frac{m{v_0}^2}{2} = mgh$$

$$h = \frac{{v_0}^2}{2g}$$