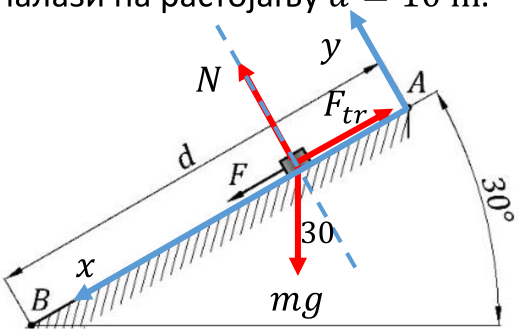
ЗАКОН О ПРОМЈЕНИ (ПРИРАШТАЈУ) КИНЕТИЧКЕ ЕНЕРГИЈЕ ТАЧКЕ

ЗАДАТАК БР. 1

Пакет масе m започиње кретање низ стрму раван из положаја A без почетне брзине. Све вријеме током кретања на пакет дјелује сила константног интензитета $F = 2mg$ $[\mathrm{N}]$ у правцу стрме равни. Коефицијент динамичког трења између пакета и подлоге је 0,58. Користећи се законом о промјени кинетичке енергије тачке, одредити брзину пакета у положају B који се у односу на положај A налази на растојању $d = 10$ m.



Интересује нас рад свих сила које дјелују на тачку на помјерању из положаја A у положај B. Помјерање материјалне тачке врши се само у правцу осе x.

$$\boldsymbol{A}_{AB}^{\vec{F}} = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{0}^{10} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{0}^{10} 2mgdx \cos 0 = \int_{0}^{10} 2mgdx = 20mg$$

$$\boldsymbol{A}_{AB}^{m\vec{g}} = \int_{x_A}^{x_B} m\vec{g} \cdot d\vec{x} = \int_{0}^{10} m\vec{g} \cdot d\vec{x} = \int_{0}^{10} mgdx \cos 60° = \int_{0}^{10} \frac{1}{2} mgdx = 5mg$$

$$\boldsymbol{A}_{AB}^{\vec{N}} = \int_{x_A}^{x_B} \vec{N} \cdot d\vec{x} = \int_{0}^{10} \vec{N} \cdot d\vec{x} = \int_{0}^{10} Ndx \cos 90° = 0$$

$$\boldsymbol{A}_{AB}^{\vec{F}_{tr}} = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F}_{tr} \cdot d\vec{x} = \int_{0}^{10} \vec{F}_{tr} \cdot d\vec{x} = \int_{0}^{10} 0{,}5mgdx \cos 180° = -5mg$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \Longrightarrow \begin{cases} ma_x = F - F_{tr} + mg \sin 30° \\ ma_y = N - mg \cos 30° \end{cases}$$

Кретање је **само** у правцу осе x, што значи да је убрзање тачке у правцу осе y једнако нули:

$$0 = N - mg\cos 30° \Longrightarrow \boldsymbol{N} = mg\cos 30° = mg\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{tr} = \mu N = 0{,}58 \cdot mg\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}5mg$$

Укупан рад свих сила на помјерању тачке из положаја А у положај В је:

$$A_{AB} = 20mg + 5mg + 0 - 5mg = 20mg$$

$$E_{kB} - E_{kA} = A_{AB}$$

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = A_{AB}$$

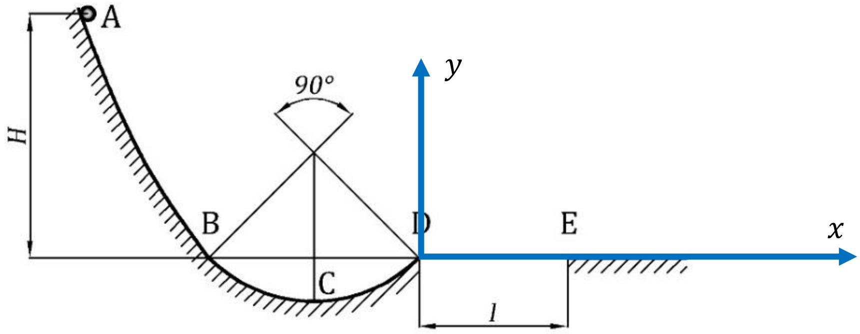
$$\frac{mv_B^2}{2} = 20mg$$

$$v_B^2 = 40g$$

$$\boldsymbol{v_B = 20\frac{m}{s}}$$

ЗАДАТАК БР. 2

Куглица се креће по глаткој вези $ABCD$ при чему дио BCD има облик четвртине кружнице. Са које висине H треба пустити куглицу без почетне брзине да би по напуштању везе у положају D прескочила канал ширине l?



A – D

$$E_{kD} - E_{kA} = A_{A-D}$$

Сила земљине теже:

$$A^{m\vec{g}} = +mgH$$

Нормалну реакцију везе:

$$A^{\vec{N}} = 0$$

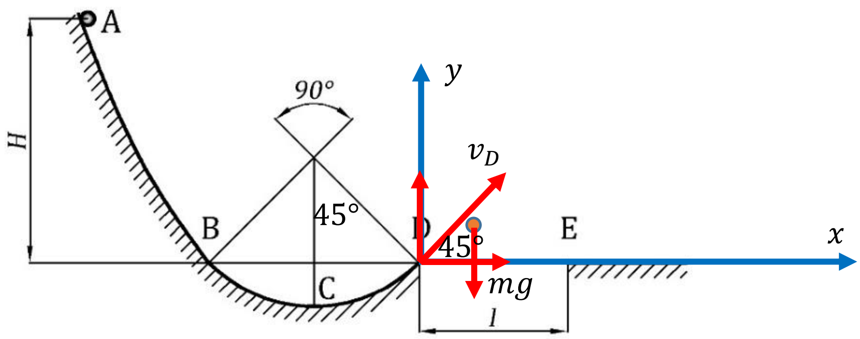
$$\frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mgH \ /: m/ \cdot 2$$

$$v_D^2 - v_A^2 = 2gH$$

Кретање је започето без почетне брзине: $v_A = 0$

$$v_D^2 = 2gH$$

$$\boldsymbol{H = \frac{v_D^2}{2g}}$$



D – E

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -mg \end{cases}$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$a_x = 0$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\int_{v_{x0}=v_{Dx}=v_D\cos 45°}^{v_x} dv_x = 0\int_0^t dt$$

$$v_x - v_D \cos 45° = 0$$

$$v_x = v_D\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{x_0=x_D=0}^{x} dx = v_D\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^t dt$$

$$x = v_D\frac{\sqrt{2}}{2}t$$

Претходна релација важи за било који положај на дијелу D – E, па самим тим важи и за E:

$$x_E = l = v_D \frac{\sqrt{2}}{2} t_E$$

$$\boldsymbol{v_D = l \frac{2}{\sqrt{2} t_E}}$$

$$a_y = -g$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$\int_{v_{Dy} = v_D \sin 45°}^{v_y} dv_y = -g \int_0^t dt$$

$$v_y = v_D \frac{\sqrt{2}}{2} - gt$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\int_{y_0 = y_D = 0}^{y} dy = \int_0^t \left(v_D \frac{\sqrt{2}}{2} - gt \right) dt$$

$$y = v_D \frac{\sqrt{2}}{2} t - g \frac{t^2}{2}$$

Претходна релација важи за било који положај на дијелу D – E, па самим тим важи и за E:

$$y_E = v_D \frac{\sqrt{2}}{2} t_E - g \frac{t_E^2}{2}$$

$$v_D \frac{\sqrt{2}}{2} t_E - g \frac{t_E^2}{2} = 0$$

$$g t_E^2 - \sqrt{2} v_D t_E = 0$$

$$t_E \left(g t_E - \sqrt{2} v_D \right) = 0$$

$$g t_E = \sqrt{2} v_D$$

$$t_E = \frac{\sqrt{2}v_D}{g}$$

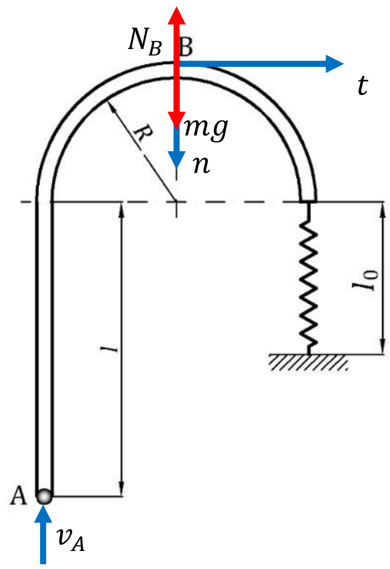
$$v_D = l\frac{2}{\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}v_D}{g}}$$

$$\boldsymbol{v_D^2 = gl}$$

$$\boldsymbol{H = \frac{v_D^2}{2g} = \frac{gl}{2g} = \frac{l}{2}}$$

ЗАДАТАК БР. 3

Кугла масе $0{,}5\ \mathrm{kg}$ убаци се почетном брзином $4\sqrt{gR}$ у отвор А непокретне глатке цијеви, облика и димензија датих на слици, која лежи у вертикалној равни. Одредити брзину кугле и реакцију везе у положају B, а потом највеће сабијање вертикалне опруге крутости $300\ \mathrm{N/m}$ након што кугла напушти цијев, ако је l_0 дужина недеформисане опруге. Дато је: $l = 3R$ и $R = 1\ \mathrm{m}$.



A – B

$$E_{kB} - E_{kA} = A_{A-B}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mg(l+R)$$

$$v_B^2 = v_A^2 - 2g(l+R)$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2g(l+R)}$$

$$v_B = \sqrt{\left(4\sqrt{gR}\right)^2 - 2g(3R+R)}$$

$$\boldsymbol{v_B = \sqrt{8gR}}$$

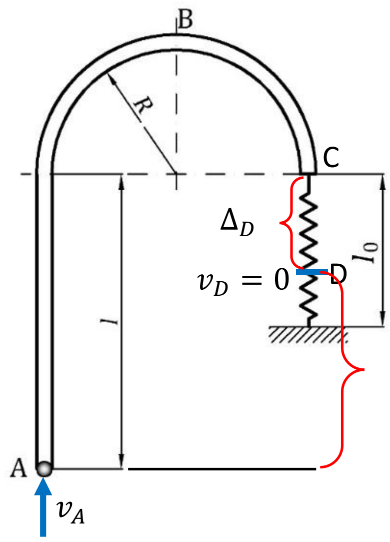
Да бисмо одредили нормалну реакцију везе увијек нам је потребна једначина кретања у правцу **нормале**.

$$m\vec{a}_B = \vec{F}_B$$

$$ma_{nB} = mg - N_B$$

$$\boldsymbol{N_B} = mg - ma_{nB} = m\left(g - \frac{v_B^2}{R}\right) = m\left(g - \frac{8gR}{R}\right) = \boldsymbol{-7mg}$$

Погрешно претпостављен смјер N_B.



A – D

$$E_{kD} - E_{kA} = A_{A-D}$$

$$\frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = A_{A-D}^{mg} + A_{C-D}^{F_e} + A_{A-C}^{N}$$

$$-\frac{1}{2}mv_A^2 = -mg(l - \Delta_D) + \frac{1}{2}c(\Delta_C^2 - \Delta_D^2) + 0$$

$$\Delta_C = 0$$

$$-\frac{1}{2}mv_A^2 = -mg(l - \Delta_D) - \frac{1}{2}c\Delta_D^2$$

$$-\frac{1}{2}0{,}5 \cdot 16 \cdot 9{,}81 = -0{,}5 \cdot 9{,}81(3 - \Delta_D) - \frac{1}{2}300\Delta_D^2$$

$$-39{,}24 = -14{,}715 + 4{,}905\Delta_D - 150\Delta_D^2$$

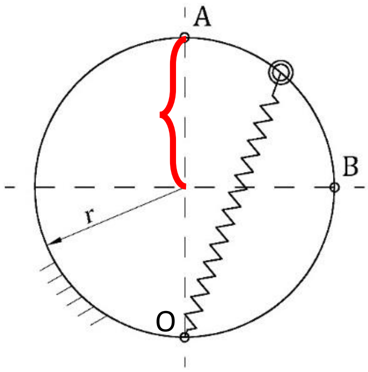
$$150\Delta_D^2 - 4{,}905\Delta_D - 24{,}525 = 0$$

$$\Delta_{D1/2} = \frac{4{,}905 \pm \sqrt{24{,}06 + 14715}}{300} = \frac{4{,}905 \pm 121{,}4}{300}$$

$$\boldsymbol{\Delta_D = 0{,}42\ \mathrm{m}} = \Delta_{\max}$$

ЗАДАТАК БР. 4

Прстен масе $5\,\mathrm{kg}$, везан за еластичну опругу, може да се креће по непокретном глатком кружном обручу полупречника $r = 1\,\mathrm{m}$ који лежи у вертикалној равни. Опруга је крутости $c = 400\,\mathrm{N/m}$ и дужине у недеформисаном стању $l_0 = r$. Ако прстен почиње да се креће из положаја А почетном брзином од $1\,\,\mathrm{m/s}$, одредити брзину прстена и реакцију везе у положају B.



$$E_{kB} - E_{kA} = A_{A-B}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = A_{A-B}^{mg} + A_{A-B}^{F_e} + A_{A-B}^{N}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = +mgr + \frac{1}{2}c(\Delta_A^2 - \Delta_B^2) + 0$$

$$\Delta_A = \overline{OA} - l_0 = 2r - r = r = 1$$

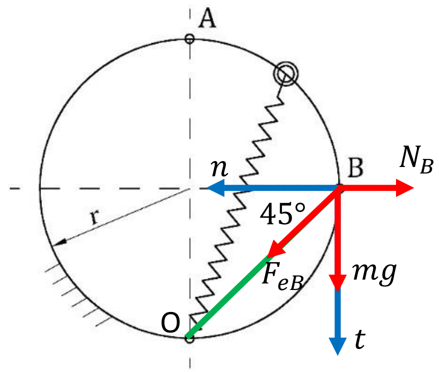
$$\Delta_B = \overline{OB} - l_0 = r\sqrt{2} - r = r\left(\sqrt{2} - 1\right) = \sqrt{2} - 1$$

$$mv_B^2 = mv_A^2 + 2mgr + c(\Delta_A^2 - \Delta_B^2)$$

$$v_B^2 = \frac{mv_A^2 + 2mgr + c(\Delta_A^2 - \Delta_B^2)}{m}$$

$$v_B^2 = \frac{5 + 10 \cdot 9{,}81 \cdot 1 + 400\left(1 - \left(\sqrt{2} - 1\right)^2\right)}{5} = 86{,}89$$

$$\boldsymbol{v_B = 9{,}32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$



$$ma_{nB} = F_{eB}\cos 45° - N_B$$

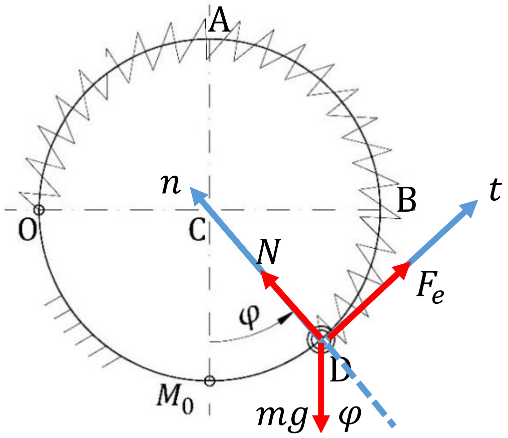
$$N_B = F_{eB}\cos 45° - ma_{nB}$$

$$N_B = c\Delta_B \frac{\sqrt{2}}{2} - m\frac{v_B^2}{r}$$

$$\boldsymbol{N_B} = 400\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{\sqrt{2}}{2} - 5\frac{86{,}89}{1} = -\mathbf{317{,}29\ N}$$

ЗАДАТАК БР. 5

У вертикалној равни по глаткој вези кружног облика, полупречника R, креће се прстен масе m. Опруга крутости c ненапрегнуте дужине $l_0 = R\pi/2$, везана је једним крајем за непокретну тачку O, а другим за прстен. Ако је у почетном тренутку прстен мировао у положају M_0, одредити реакцију везе у положају B.



Интересује нас рад сила на помјерању прстена из почетног положаја M_0 у положај B. На прстен дјелују сила у опрузи, сила земљине теже и нормална реакција везе.

__Рад силе у опрузи__

$$A^{\vec{F_e}} = \frac{1}{2}c\left(\Delta_{M_0}^2 - \Delta_B^2\right)$$

Деформација опруге у почетном положају M_0 је лучно растојање од O до M_0 умањено за недеформисану дужину опруге:

$$\Delta_{M_0} = \frac{3\pi}{2}R - \frac{\pi}{2}R = \pi R$$

Деформација опруге у крајњем положају B је лучно растојање од O до B умањено за недеформисану дужину опруге:

$$\Delta_B = \pi R - \frac{\pi}{2}R = \frac{\pi}{2}R$$

$$A^{\vec{F_e}} = \frac{1}{2}c\left(\Delta_{M_0}^2 - \Delta_B^2\right) = A^{\vec{F_e}} = \frac{1}{2}c\left(\pi^2R^2 - \frac{\pi^2R^2}{4}\right) = \frac{3}{8}c\pi^2R^2$$

__Рад силе земљине теже__

$$A^{m\vec{g}} = -mgR$$

Рад нормалне реакције везе

$$A^{\vec{N}} = 0$$

Рад свих сила на помјерању из положаја M_0 у положај B је:

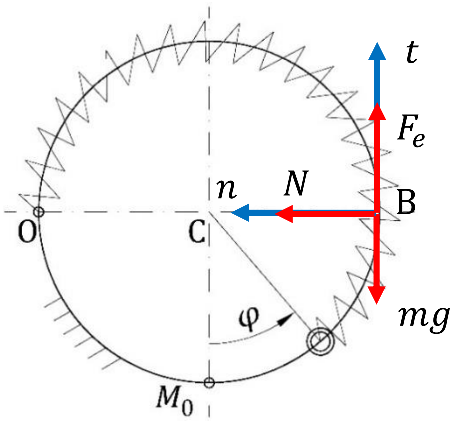
$$A_{M_0B} = \frac{3}{8}c\pi^2R^2 - mgR$$

$$E_{kB} - E_{kM_0} = A_{M_0B}$$

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_{M_0}^2}{2} = \frac{3}{8}c\pi^2R^2 - mgR$$

$$v_B^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{3}{8}c\pi^2R^2 - mgR\right) = \frac{3}{4}\frac{c}{m}\pi^2R^2 - 2gR$$

Постављамо основну једначину динамике у правцу нормале за положај B:



$$ma_{nB} = N_B$$

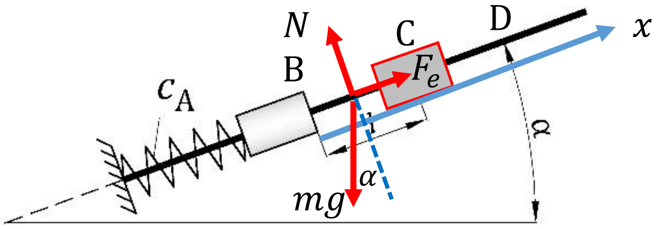
$$N_B = m\frac{v_B^2}{R}$$

$$\boldsymbol{N_B} = \frac{m}{R}\left(\frac{3}{4}\frac{c}{m}\pi^2R^2 - 2gR\right) = \boldsymbol{\frac{3}{4}c\pi^2R - 2mg}$$

ЗАДАТАК БР. 6

Одредити максимално растојање које ће прећи клизач масе $m = 2\,\mathrm{kg}$, крећући се по глатком нагнутом штапу, ако је у почетном положају (положај B) опруга на коју се наслања клизач била сабијена за $l = 200\,\mathrm{mm}$. Почетна брзина клизача (брзина у положају B) је једнака нули.

Дато је: $c_{\mathrm{A}} = c = 400\ \mathrm{N/m}\,, \alpha = 20°$.



Максимално растојање је растојање од положаја B, из кога је кретање започето, до положаја D, у коме се клизач зауставља.

Сила у опрузи врши рад од почетног положаја B до положаја у коме је опруга недеформисана (положај C).

$$A^{\overrightarrow{F_e}} = \frac{1}{2}c(\Delta_B^2 - \Delta_C^2) = \frac{1}{2}c(l^2 - 0^2) = \frac{cl^2}{2} = \frac{400 \cdot 0{,}2^2}{2} = 8\ \mathrm{J}$$

Сила земљине теже врши рад од почетног (B) до крајњег положаја (D).

$$A^{m\vec{g}} = -mgh = -mg\overline{BD}\sin\alpha = -6{,}71\overline{BD}$$

Нормална реакција подлоге не врши рад.

Рад свих сила на помјерању из положаја B у положај D је:

$$A_{BD} = 8 - 6{,}71\overline{BD}$$

$$E_{kD} - E_{kB} = A_{BD}$$

$$0 = 8 - 6{,}71\overline{BD}$$

$$\overline{\boldsymbol{BD}} = \frac{8}{6{,}71} = \mathbf{1,19\ m}$$

ЗАДАТАК БР. 7

Користећи се законом о промјени количине кретања, одредити константну силу која убрзава аутомобил масе $1\ \mathrm{t}$, на праволинијском помјерању, од мировања до брзине од $100\ \mathrm{km/h}$ за вријеме од $10\ \mathrm{s}$.

$$m = 1\ \mathrm{t} = 1000\ \mathrm{kg}$$

$$100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 100\,\frac{1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = 27{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Закон о промјени количине кретања каже да је промјена вектора количине кретања тачке на помјерању из једног положаја у други једнака вектору импулса свих сила које на тачку дјелују током тог помјерања:

$$\vec{I} = \vec{K}_1 - \vec{K}_0.$$

Вектор количине кретања једнак је производу масе тачке и вектора њене брзине:

$$\vec{K} = m\vec{v}.$$

Прираштај импулса силе једнак је производу силе и прираштаја времена:

$$d\vec{I} = \vec{F}dt \Rightarrow \vec{I} = \int \vec{F}dt.$$

У конкретном задатку имамо:

$$\vec{I} = \vec{K}_1 - \vec{K}_0 = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0$$

Пошто је кретање праволинијско, онда ће претходној векторској једначини одговарати једна скаларна:

$$I = K_1 - K_0 = mv_1 - mv_0$$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F dt = F\int_{t_0}^{t_1} dt = F(t_1 - t_0)$$

$$F(t_1 - t_0) = mv_1 - mv_0$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{mv_1 - mv_0}{t_1 - t_0} = \frac{mv_1}{t_1} = \frac{1000 \cdot 27{,}78}{10} = \mathbf{2778\ N}$$