ZAKON O PROMJENI KINETIČKE ENERGIJE TAČKE

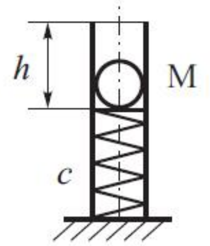
ZADATAK BR. 1 (Kuzmanović et al. (2012). Zbirka zadataka iz MEHANIKE I, Un. u Beogradu, Saobraćajni fakultet)

Zad. 2.2. Kuglica M mase m postavljena je u vertikalnu cev, u kojoj je sabijena opruga za veličinu h. Odrediti:

a) intenzitet brzine v_1 kojom kuglica napušta cev,

b) uslov koji mora biti zadovoljen da bi kuglica napustila cev, pošto se oslobodi opruga,

c) visinu H do koje će se kuglica popeti.

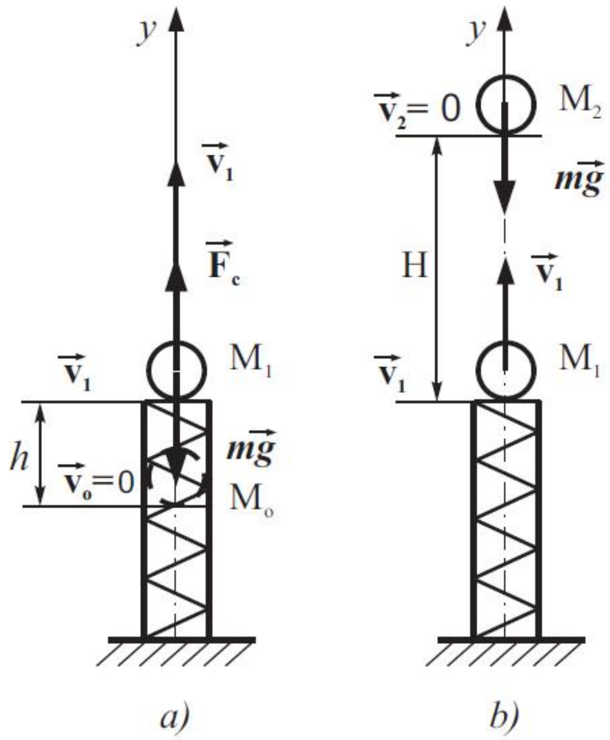


Slika 2.5: uz zadatak 2.2.

Trenje u cevi i otpor vazduha zanemariti.

Rešenje:

a) Primenom zakona o promeni kinetičke energije (na tačku deluju sila u opruzi i sila teže), dobija se brzina kojom kuglica napušta cev:



Slika 2.6: uz rešenje zadatka 2.2.

$$E_{k_1} - E_{k_0} = \sum_{i=1}^{N} A(\mathbf{F}_i) \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \cancelto{0}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{1}{2}ch^2 - mgh, \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}ch^2 - mgh \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{ch^2}{m} - 2gh}}.$$

b) Iz uslova da je $\dfrac{ch^2}{m} - 2gh > 0$ (potkorena veličina veća je od nule za realne funkcije), dobija se uslov napuštanja cevi

$$\boxed{c > \frac{2mg}{h}}.$$

c) Ponovo, koristeći zakon promene kinetičke energije (na tačku deluje samo sila teže) dobija se visina do koje će se kuglica popeti:

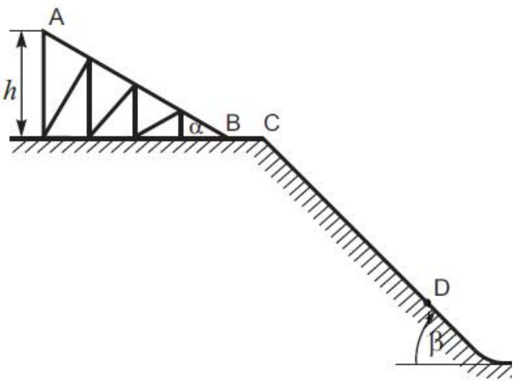
$$E_{k_2} - E_{k_1} = \sum_{i=1}^{N} A(\mathbf{F}_i) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -mgy, \quad y_{\max} = H, \text{ za } v_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgH \quad \Rightarrow \quad H = \frac{v_1^2}{2g},$$

$$H = \frac{1}{2g}\left(\frac{ch^2}{m} - 2gh\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = \frac{h}{2g}\left(\frac{ch}{m} - 2g\right)}.$$

ZADATAK BR. 2 (Kuzmanović et al. (2012). Zbirka zadataka iz MEHANIKE I, Un. u Beogradu, Saobraćajni fakultet)

Skijaš se spušta niz zaletište, nagnuto pod uglom $\alpha = 30°$. Pred odskok on prođe kratku horizontalnu platformu BC (čija se dužina u proračunu zanemaruje). U trenutku odskoka on, sam sebi, saopšti vertikalnu komponentu brzine $v_y = 1\,[m/s]$. Visina zaletišta je $h = 9\,[m]$, koeficijent trenja skija o sneg $\mu = 0,08$, ugao $\beta = 45°$. Odrediti dužinu doskoka skijaša.



Slika 2.15: uz zadatak 2.7.

Dato kretanje može da se posmatra iz dva dela. Prvo na putu $A-B-C$ (prinudno kretanje, pravolinijsko na delovima $A-B$ i $B-C$), a zatim slobodno $C-D$ (let do doskoka).

Sile koje deluju na skakača (materijalna tačka – translatorno kretanje) su: $m\mathbf{g}$ – težina, $\mathbf{N}$ – normalna reakcija podloge, $\mathbf{F}_\mu$ – sila trenja.

Kako je sila trenja proporcionalna normalnoj komponenti, to iz projekcije diferencijalne jednačine ($m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{S}_i$) na pravac normale, dobija se:

$$ma_n = -mg\cos 30° + N = 0 \quad \text{(nema kretanja u pravcu normale!)} \quad \Rightarrow$$

$$N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg,$$

pa je intenzitet ove sile $F_\mu = \mu N = \mu \frac{\sqrt{3}}{2} mg$.

Rad ovih sila, na delu AB (kako je $\sin 30^\circ = h/\overline{AB}$, to je dužina puta $\overline{AB} = 18\,[m]$) je:

$$A(\mathbf{F}_\mu) = \int\limits_0^{s=18} \left(-\mu \frac{\sqrt{3}}{2} mg\right) \mathrm{d}s = -\mu mg \frac{\sqrt{3}}{2} s \Bigg|_0^{s=18} \quad \Rightarrow$$

$$A(\mathbf{F}_\mu) = -9\sqrt{3}\mu\, mg,$$

$$A(m\mathbf{g}) = \int\limits_A^B m\mathbf{g}\, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_{s_A=0}^{s_B=18} mg\cos 60^\circ\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} mg\, s \Bigg|_0^{s=18} = mgh = 9mg.$$

Iz zakona promene kinetičke energije, na delu putanje $A-B$, izračunava se intenzitet brzine u položaju B, v_B, tj.

$$E_{kB} - E_{kA} = A(m\mathbf{g}) + A(\mathbf{F}_\mu) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m \cancelto{0}{v_A^2} = mgh - 9\sqrt{3}\mu\, mg \quad \Rightarrow$$

$$v_B = 12,33\,[m/s]$$

Duž horizontalnog puta nema komponenti sila u tom pravcu, pa se ni brzina ne menja, tj. $v_B = v_C = v_x$, do trenutka odskoka, gde se javlja još dodatna komponenta v_y. Prema tome, početni uslovi (ako je koordinatni početak u tački C), za deo $C-D$, su:

$$x(0) = x_C = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_C = v_C = v_x = 12,33\,[m/s],$$
$$y(0) = y_C = 0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_C = v_y = 1\,[m/s].$$

Rešavanjem diferencijalnih jednačina kretanja dobijaju se parametarske jednačine:

$$m\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \dot{x}_C = v_x \quad \Rightarrow \quad x = v_x t + \cancelto{0}{x_C},$$

$$m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \dot{y} = -gt + \dot{y}_C = -gt + v_y \Rightarrow y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_y t + \cancelto{0}{y_C}.$$

Eliminacijom parametra t dobija se trajektorija

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_x^2} + v_y \frac{x}{v_x}. \tag{a}$$

Tačka D, koja leži i na paraboli (a) i na pravoj CD (njena jednačina je $y = -x$), dobija se u preseku ove dve krive (za $y_D = -x_D$)

$$-x_D = -x_D\left(\frac{g\,x_D}{2v_x^2} - \frac{v_y}{v_x}\right) \quad \Rightarrow \quad x_D = \frac{2\,v_x}{g}\,(v_x + v_y)$$

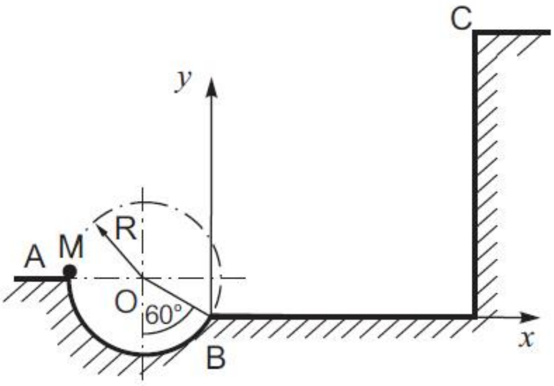
Domet d (rastojanje CD) jednak je (slika 2.16)

$$d = \overline{CD} = \frac{x_D}{\cos\beta} = \sqrt{2}x_D \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{d = 47,388\,[m]}.$$

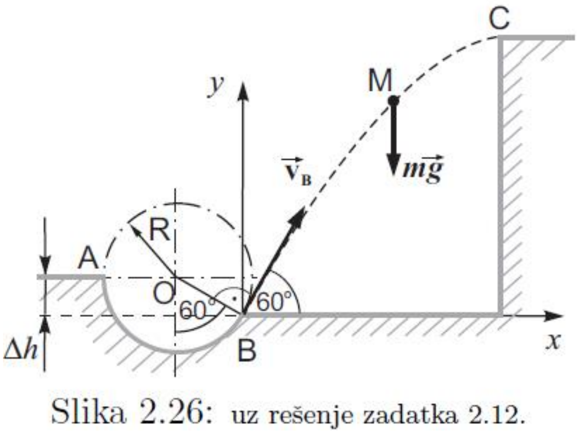
ZADATAK BR. 3 (Kuzmanović et al. (2012). Zbirka zadataka iz MEHANIKE I, Un. u Beogradu, Saobraćajni fakultet)

Kolika mora biti početna brzina v_A tačke M mase m, da bi ona krečući se u vertikalnoj ravni, prešla deo kružne putanje AB i pogodila cilj u tački C, čije su koordinate $x_C = 2R\sqrt{3}$, $y_C = 4R$. Tačka M se u početnom trenutku nalazila u položaju A. Trenje zanemariti.



Slika 2.25: uz zadatak 2.12.

Rešenje:



Slika 2.26: uz rešenje zadatka 2.12.

Prvo će se odrediti intenzitet brzine u položaju u kom tačka M napušta vezu (tačka B), primenom zakona promene kinetičke energije (prinudno kretanje na delu AB).

$$E_{k_B} - E_{k_A} = \sum_i A(\mathbf{F}_i) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = A(m\mathbf{g}) = mg\Delta h, \quad \Delta h = R\cos 60^\circ = \frac{R}{2}, \quad \Rightarrow$$

$$v_B^2 - v_A^2 = gR \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = v_A^2 + gR \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{v_A^2 + gR}.$$

Ova brzina predstavlja početnu brzinu za drugi deo kretanja - slobodno kretanje, pa su:

– početni uslovi:

$$x_B = 0, \quad \dot{x}_B = v_B \cos 60^\circ = \frac{1}{2}v_B,$$
$$y_B = 0, \quad \dot{y}_B = v_B \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v_B.$$

– diferencijalne jednačine slobodnog kretanja i njihovo rešavanje:

$$m\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \text{const.} = \dot{x}_B \quad \Rightarrow \quad x = \dot{x}_B t + \cancelto{0}{x_B}$$
$$m\ddot{x} = -mg \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = -gt + \dot{y}_B \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{y}_B\, t + \cancelto{0}{y_B}.$$

Dakle, konačne jednačine, slobodnog kretanja, su:

$$x = \frac{1}{2}v_B t, \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_B\, t.$$

Eliminacijom parametra t dobija se putanja

$$t = \frac{2x}{v_B} \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{2x}{v_B}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_B\left(\frac{2x}{v_B}\right) \;\Rightarrow\; y = -\frac{2g}{v_B^2}x^2 + x\sqrt{3}.$$

Kako tačka C pripada ovoj krivoj (uslov zadatka!), to je:

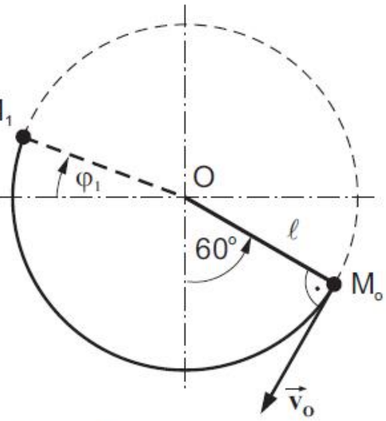
$$y_C = 4R = x_C\sqrt{3} - \frac{2g}{v_B^2}x_C^2 \quad \Rightarrow$$
$$24\,gR = 2\left(v_A^2 + gR\right),$$

odakle se konačno dobija

$$\boxed{v_A = \sqrt{11\,gR}}.$$

ZADATAK BR. 4 (Kuzmanović et al. (2012). Zbirka zadataka iz MEHANIKE I, Un. u Beogradu, Saobraćajni fakultet)

Materijalna tačka M mase m obešena je pomoću nerastegljivog konca dužine ℓ o nepomičnu tačku O. U početnom položaju M_0, kada pravac konca zaklapa sa vertikalom ugao $\alpha = 60°$, materijalnoj tački je saopštena početna brzina v_0 sa smerom na niže, a upravno na pravac konca.



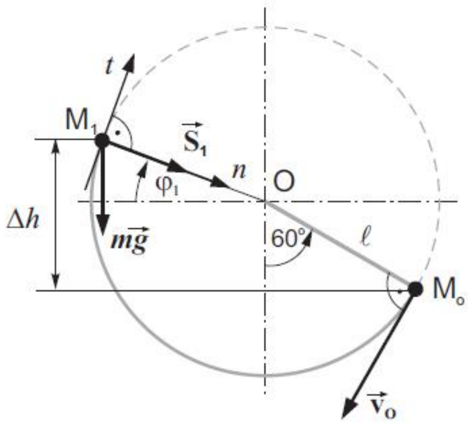
Slika 2.39: uz zadatak 2.19.

Odrediti:

a) položaj materijalne tačke M_1 u kojem će sila u koncu biti jednaka nuli (ugao φ_1), kao i

b) brzinu v_1 tačke u tom položaju.

Rešenje:



Slika 2.40: uz rešenje zadatka 2.19.

a) Prvo je potrebno da se odredi sila u koncu, jer se traži položaj u kome je ona jednaka nuli. Sila će se odrediti iz diferencijalne jednačine kretanja, a potrebna brzina iz zakona promene kinetičke energije. Kombinacijom ovih jednačina dobiće se tražene vrednosti.

Projekcija na normalu $\mathbf{n}$ (prirodni trijedar!) diferencijalne jednačine kretanja ($m\mathbf{a} = \mathbf{S}^a + \mathbf{S}^v$ – zbir aktivnih sila i sile veze), dobija se

$$\frac{mv_1^2}{\ell} = \cancelto{0}{S_1} + mg\sin\varphi_1 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = \ell g \sin\varphi_1. \tag{a}$$

Zakon promene kinetičke energije:

$$E_{k1} - E_{k0} = A(m\mathbf{g}) \quad \Rightarrow \quad v_1^2 - v_0^2 = -2g\Delta h.$$

Visinska razliku između ova dva položaja je:

$$\Delta h = \ell \cos 60^\circ + \ell \sin \varphi_1 = \frac{\ell}{2}\left(1 + 2\sin\varphi_1\right), \quad \text{pa je}$$

$$v_1^2 = v_0^2 - g\ell(1 + 2\sin\varphi_1). \tag{b}$$

Iskoristivši (a), traženi ugao je

$$\boxed{\sin\varphi_1 = \frac{v_0^2}{3g\ell} - \frac{1}{3}}. \tag{c}$$

b) Konačno, iz (b) i (c), dobija se brzina tačke M u položaju u kom je sila u koncu jednaka nuli

$$\boxed{v_1^2 = \frac{1}{3}\left(v_0^2 - g\ell\right)}.$$