Dinamika sistema

Ranije smo definisali pojam mehaničkog sistema. U statici sa stanovišta ravnoteže, u kinematici sa geometrijskog stanovišta i sada sa dinamičkog stanovišta gdje, saglasno problemima koje dinamika proučava, imamo direktnu povezanost uzroka i posledice, sile i kretanja.

Materijalni sistem je skup materijalnih tačka čija su kretanja i položaji međusobno zavisni.
Diskretan sistem je konačan broj materijalnih tačaka na određenim rastojanjima tako da postoji veza između njih pa predstavljaju sistem.

Materijalno tijelo predstavlja dio prostora ispunjen neprekidno raspoređenom masom. Skup beskonačno mnogo materijalnih tačaka, obrazuje neprekidnu sredinu (kontinuum).

Kruto tijelo pod dejstvom sila u toku kretanja se ne deformiše, ne mijenja oblik i dimenzije.

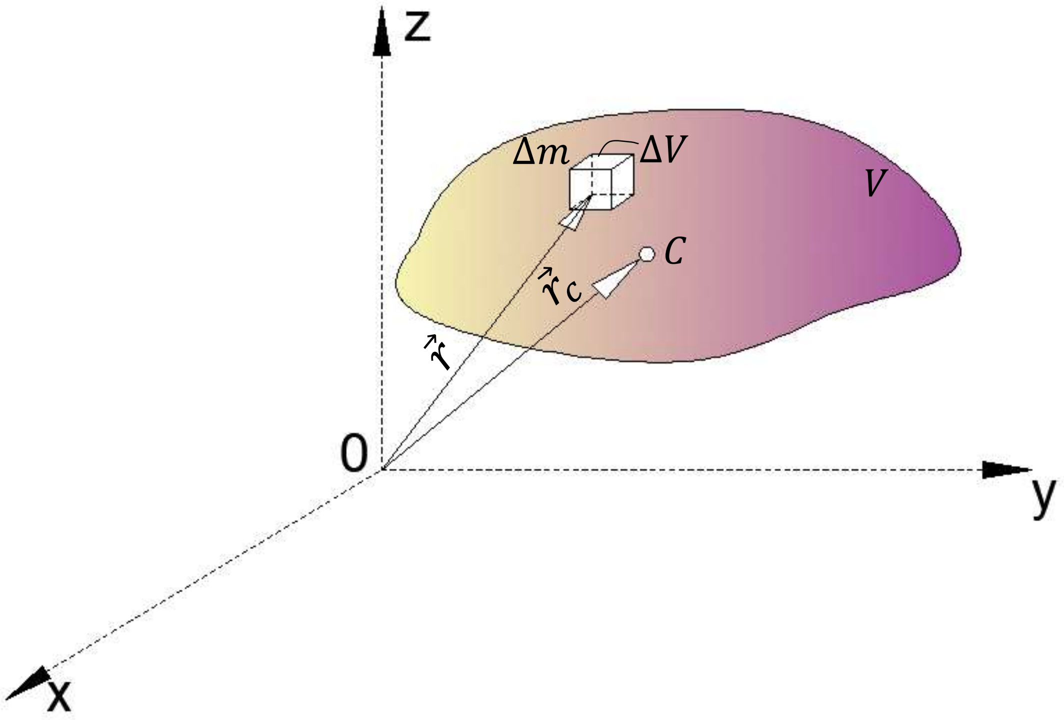
Gustina, masa sistema

Neka je dio prostora ΔV ispunjen masom Δm. Količnik ovih veličina predstavlja srednju gustinu:

$$\rho_{sr} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Kada $\Delta V \to 0$ tada se ovaj količnik

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$



naziva gustina u datoj tački. Gustina je funkcija položaja

$$\rho = \rho(x, y, z)$$

i kao takva se primjenjuje u mehanici.

Kada je gustina u svakoj tački ista, tj. $\rho = const$, imamo homogeno tijelo.

Nehomogeno tijelo je ono kod koga se mijenja gustina od tačke do tačke.

Masa diskrentog sistema predstavlja zbir masa svih tačaka sistema:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

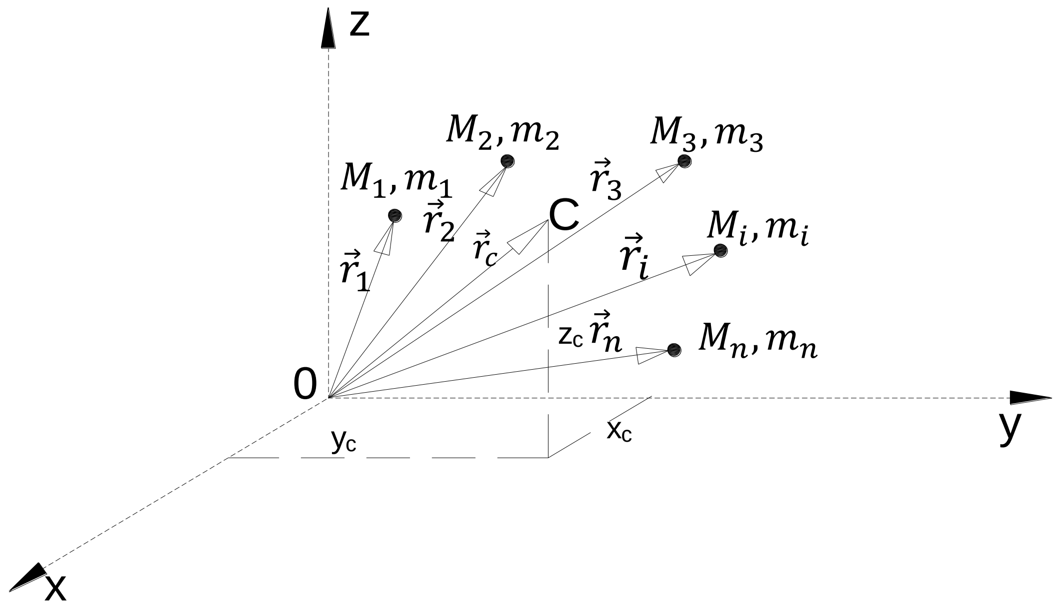
dok se masa neprekidnog sistema određuje integralom:

$$m = \int_{V} \rho dV$$

Središte sistema

Neka je dat sistem tačaka M_i sa odgovarajućim masama m_i i vektorima položaja $\vec{r}_i$.

Ako centar masa ovog sistema označimo sa C,



vektor položaja te tačke sa $\vec{r}_c$, tada centar masa tog sistema definišemo sa:

$$M\,\overrightarrow{r_c} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

gdje je svaki od sabiraka $m_i \vec{r}_i$ linearni moment masa.

Ako su mase neprekidno raspoređene, tada umjesto sume imamo integral:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\int r dm\,,\ \ M = \int dm$$

Dekartove koordinate centra masa određujemo obrascima

$$x_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\,, \qquad y_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\,, \qquad z_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

Osobine centra masa

1. Položaj centra masa ne zavisi od koordinatnog sistema, već samo od rasporeda masa.
2. Linearni polarni moment masa u odnosu na centar masa jednak je nuli.

Napisane formule centra masa analogne su jednačinama za određivanje središta sistema, tj. kada se sistem nalazi u polju sile teže centar masa se poklapa sa težištem sistema.

Momenti inercije

Masa je mjera inercije za tačku i tijelo pri translatornom kretanju.

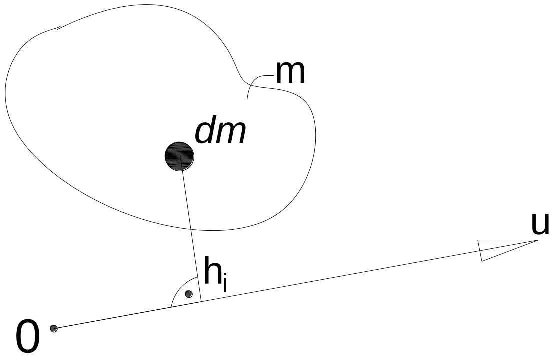
Za sve druge oblike kretanja mjera inercije nije samo masa jer na inerciju utiče i njihova geometrija.

Središte sistema $\vec{r}_c$ karakteriše raspored masa takođe, ali ne u potpunosti.

Zato se uvodi pojam momenta inercije, preko koga zajedno sa središtem masa definišemo problem rasporeda masa u potpunosti.

Moment inercije materijalnog sistema u odnosu na neki pol O, osu u ili ravan Π naziva se skalarna veličina koja je jednaka zbiru proizvoda masa svih tačaka sistema i kvadrata rastojanja od date tačke O, ose u i ravni Π.

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \, {r_{i0}}^2$$



Moment inercije materijalnog sistema u odnosu na tačku O naziva se polarni moment inercije.

$$I_u = \sum_{i=1}^{n} m_i \, {h_{iu}}^2$$

Moment inercije materijalnog sistema u odnosu na osu u naziva se aksijalni moment inercije.

$$I_u = \sum_{i=1}^{n} m_i \, {h_{i\Pi}}^2$$

Moment inercije materijalnog sistema u odnosu na ravan Π naziva se planarni moment inercije.

Može se zaključiti da su polarni, aksijani i planarni momenti inercije pozitivni i ne mogu biti jednaki nuli. Kod navedenih formula m_i je masa i-te tačke, a r_{i0}, h_{iu}, $h_{i\Pi}$ normalna rastojanja i-te mase od tačke O, ose u i ravni Π. Jedinica za moment inercije je $[kgm^2]$.

Ukoliko posmatramo homogeno tijelo tada je aksijalni moment inercije:

$$I_u = \int_V r_u^2 \, dm$$

Poluprečnik inercije tijela u odnosu na osu u je veličina i_u, određena formulom:

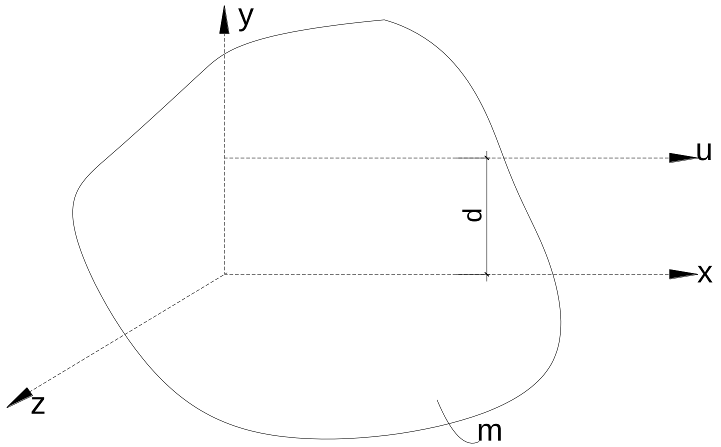
$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{m}}$$

Štajnerova formula

Zavisnost između momenata inercije za paralelne ose

Teorema:

Moment inercije tijela za proizvoljnu osu paralelnu težišnoj osi jednak je zbiru momenta inercije tijela za težišnu osu i proizvoda mase tijela i kvadrata rastojanja između osa.



$$I_u = I_x + md^2$$

Moment inercije u odnosu na težišnu osu je najmanji mogući i naziva se sopstveni moment inercije.

md^2 je položajni moment inercije, gdje je m masa tijela, a d normalno rastojanje između osa.

Unutrašnje i spoljašnje sile

Podjelu sila možemo izvršiti na dva načina i to:

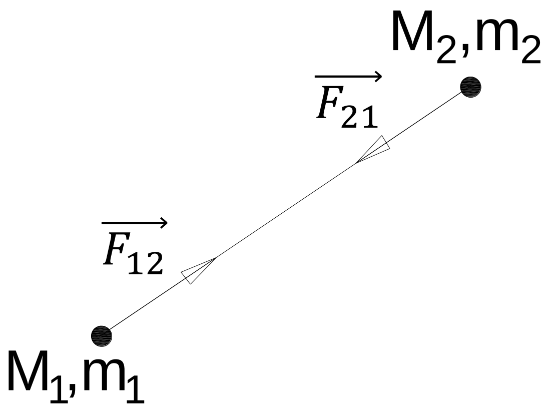
1. spoljašnje i unutrašnje sile

2. aktivne i pasivne sile

Unutrašnje sile povezuju više tačaka ili tijela u jednu cjelinu i zahvaljujući tim silama govorimo o sistemu.

Obilježavaju se sa $\vec{F}_u$. Ove sile dejstvuju saglasno principu o dejstvu i protiv dejstvu , osnovnom principu mehanike. Javljaju se u parovima istog pravca i intenziteta, a suprotnog smjera. Glavna svojstva sistema unutrašnjih sila su:

1. Glavni vektor unutrašnjih sila jednak je nuli.



$$\overrightarrow{F_{12}^{u}} = -\overrightarrow{F_{21}^{u}}$$

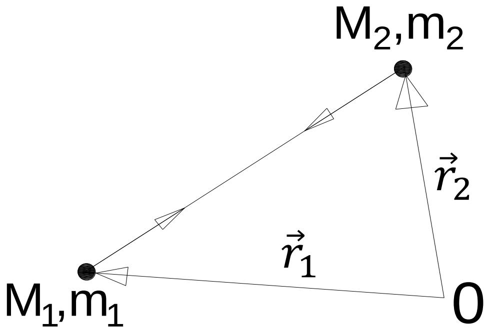
$$\overrightarrow{F_{12}^{u}} + \overrightarrow{F_{21}^{u}} = 0$$

Ako ovu proširimo na sistem:

$$\sum_{i} \overrightarrow{F_i^u} = \overrightarrow{F_R^u} = 0$$

Glavni vektor unutrašnjih sila dinamičkog sistema jednak je nuli.

2. Glavni moment sistema unutrašnjih sila jednak je nuli.



Glavni moment sistema unutrašnjih sila jednak je zbiru momenata svih sila.

Kako se unutrašnje sile javljaju u parovima prvo ćemo dokazati za dvije sile:

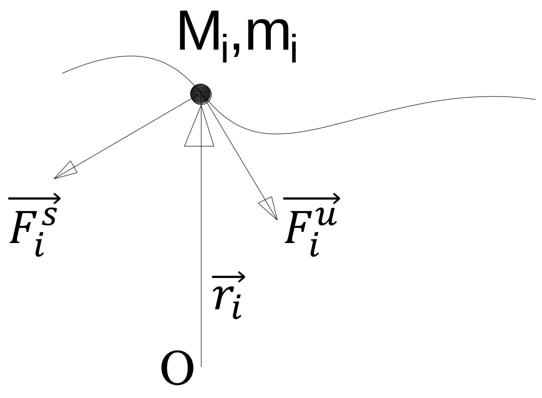
$$\vec{M}_0^{\left(\overrightarrow{F_{12}^u}\right)} + \vec{M}_0^{\left(\overrightarrow{F_{21}^u}\right)} = \vec{r}_1 \, x \, \overrightarrow{F_{12}^u} + \vec{r}_2 \, x \, \overrightarrow{F_{21}^u} = \vec{r}_1 \, x \, \overrightarrow{F_{12}^u} + \vec{r}_2 \, x \left(-\overrightarrow{F_{12}^u}\right) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \, \overrightarrow{F_{12}^u} = \overrightarrow{M_2 M_1} \, x \, \overrightarrow{F_{12}^u} = 0$$

Kada proširimo na čitav sistem:

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_0^{\left(\overrightarrow{F_{12}^u}\right)} = 0$$

Diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema

Neka je dat sistem od M_i tačaka mase m_i, sa vektorom položaja $\vec{r}_i$. Svaka tačka ima svoju putanju. Posmatraćemo *i-tu* tačku.



Diferencijalna jednačina za *i-tu* tačku je:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \overrightarrow{F_i^s} + \overrightarrow{F_i^u}$$

Ovoj vektorskoj jednačini odgovaraju tri skalarne jednačine u Dekartovom koordinatnom sistemu:

$$m_i\ddot{x}_i = F_{xi}^s + F_{xi}^u$$

$$m_i\ddot{y}_i = F_{yi}^s + F_{yi}^u$$

$$m_i\ddot{z}_i = F_{zi}^s + F_{zi}^u$$

Projekcije spoljašnjih i unutrašnjih sila u opštem slučaju su funkcije vremena, položaja i brzine, što znači da je uvedeni sistem diferencijalnih jednačina drugog reda vezani sistem diferencijalnih jednačina po koordinatama x_i, y_i, z_i i brzinama $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$.

Za sistem od n materijalnih tačaka, imamo *3n* diferencijalnih jednačina kretanja.

Rješavanja ovih jednačina predstavljaju drugi zadatak dinamike i dovode do jednačina kretanja svake tačke. Za rješavanje ovih *3n* jednačina iz početnog kinematičkog stanja treba odrediti $3n \cdot 2 = 6n$ integracionih konstanti.