

ДИНАМИКА СИСТЕМА МАТЕРИЈАЛНИХ ТАЧАКА

Центар инерције (центар маса) система:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}; \quad \vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dm}{m}$$

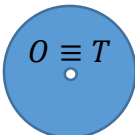
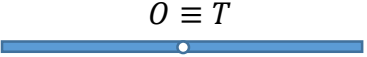
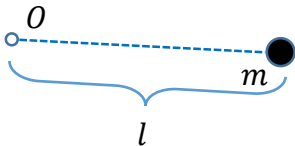
Аксијални момент инерције за осу u :

$$J_u = \sum m_i h_{ui}^2; \quad J_u = \int h_u^2 dm$$

За одређивање аксијалног момента инерције J_O потребно је да знамо распоред масе тијела, геометрију тијела и положај осе O око које се врши ротација.

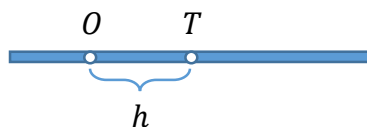
Пошто се само бавимо само хомогеним тијелима, онда нам је довољно да знамо укупну масу тијела и положај центра инерције, односно тежишта тијела.

За карактеристичне облике тијела који се могу јавити у задацима, у наредној табели су дати изведени изрази за одређивање аксијалних момената инерције, на основу полазних израза са почетка странице.

Хомогени кружни диск полупречника r и масе m		$J_O \equiv J_T = \frac{mr^2}{2}$
Хомогени штап дужине l и масе m		$J_O \equiv J_T = \frac{ml^2}{12}$
Концентрисана маса m на растојању l од осе ротације O		$J_O = ml^2$

Када се оса за коју се рачуна момент инерције (оса која пролази кроз тачку O) не поклапа са осом која пролази кроз тежиште T , већ јој је паралелна,

користимо се Хајгенс-Штајнеровом теоремом за одређивање аксијалних момената инерције.



$$J_O = J_T + mh^2$$

Ако је у задатку дат **полупречник инерције i** , онда се за одређивање момента инерције користи наредни израз, а не изрази из табеле:

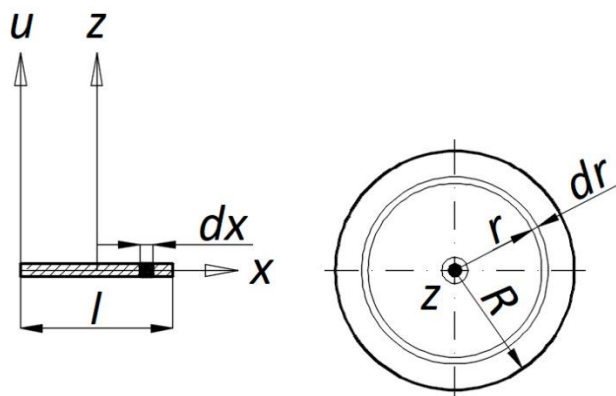
$$J_u = mi^2$$

Густина:

1D	2D	3D
$\rho = \frac{dm}{dl}$	$\rho = \frac{dm}{dA}$	$\rho = \frac{dm}{dV}$

ЗАДАТАК БР. 1

Израчунати аксијални момент инерције хомогеног танког штапа и хомогеног кружног диска за осу z . Израчунати аксијални момент инерције хомогеног танког штапа за осу u која је управна на штап и пролази кроз његов почетак.



Хомогени танки штап, оса z ($\rho = \text{const}$)

$$\rho = \frac{dm}{dx} = \text{const} \Rightarrow dm = \rho dx$$

$$\int dm = \rho \int_{-l/2}^{l/2} dx \Rightarrow m = \rho \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2} \right) = \rho l \Rightarrow \rho = \frac{m}{l}$$

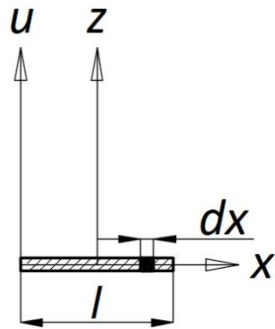
$$J_z = \int x^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \rho dx = \rho \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\rho}{3} \left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right) = \frac{\rho l^3}{3} = \frac{m}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

Хомогени диск ($\rho = \text{const}$)

$$\rho = \frac{dm}{dA} = \text{const} \Rightarrow dm = \rho dA = \rho(2r\pi dr) = 2\rho\pi r dr$$

$$\int dm = \rho \int_0^R dA \Rightarrow m = \rho A \Rightarrow \rho = \frac{m}{A} = \frac{m}{R^2\pi}$$

$$J_z = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 2\rho\pi r dr = 2\rho\pi \int_0^R r^3 dr = 2\rho\pi \frac{R^4}{4} = 2 \frac{m}{R^2\pi} \pi \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$



Хомогени танки штап, оса u ($\rho = \text{const}$)

I начин

$$\rho = \frac{dm}{dx} = \text{const} \Rightarrow dm = \rho dx$$

$$\int dm = \rho \int_0^l dx \Rightarrow m = \rho l \Rightarrow \rho = \frac{m}{l}$$

$$J_u = \int x^2 dm = \int_0^l x^2 \rho dx = \rho \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^l = \rho \frac{l^3}{3} = \frac{m}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

II начин

$$J_u = J_z + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

ЗАДАТАК БР. 2

Положаји три тачке једнаких маса m одређени су векторима $\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{r}_2 = -\vec{k}$, $\vec{r}_3 = -2\vec{i} - \vec{k}$. Одредити вектор положаја четврте тачке масе $2m$ тако да је центар маса цјелокупног система у координатном почетку. Одредити аксијалне моменте инерције за осе Декартовог координатног система.

$$\vec{r}_C = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \Rightarrow \begin{cases} x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \\ y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \\ z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \\ y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \\ z_C = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + m_4 z_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{2m - 2m + 2mx_4}{5m} \\ 0 = \frac{2m + 2my_4}{5m} \\ 0 = \frac{-m - m + 2mz_4}{5m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{2x_4}{5} \\ 0 = \frac{2 + 2y_4}{5} \\ 0 = \frac{-2 + 2z_4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_4 = 0 \\ y_4 = -1 \\ z_4 = 1 \end{matrix}$$

$$\vec{r}_4 = -\vec{j} + \vec{k}$$

$$J_x = J_{x1} + J_{x2} + J_{x3} + J_{x4}$$

$$J_x = m\sqrt{2^2}^2 + m\sqrt{(-1)^2}^2 + m\sqrt{(-1)^2}^2 + 2m\sqrt{(-1)^2 + 1^2}^2$$

$$J_x = 4m + m + m + 4m = \mathbf{10m}$$

$$J_y = m\sqrt{2^2}^2 + m\sqrt{(-1)^2}^2 + m\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}^2 + 2m\sqrt{1^2}^2$$

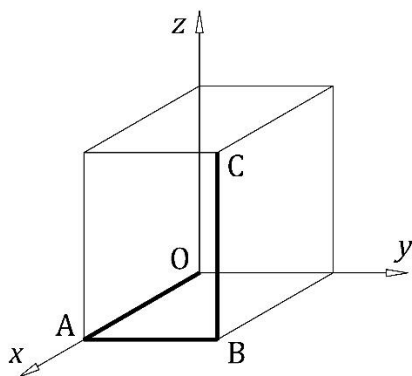
$$J_y = 4m + m + 5m + 2m = \mathbf{12m}$$

$$J_z = m\sqrt{2^2 + 2^2}^2 + 0m + m\sqrt{(-2)^2}^2 + 2m\sqrt{(-1)^2}^2$$

$$J_z = 8m + 4m + 2m = \mathbf{14m}$$

ЗАДАТАК БР. 3

Одредити момент инерције система штапова за осу z . Дужине штапова су по l , а масе по m .



I начин

$$J_{zOA} = \frac{ml^2}{3}$$

$$J_{zAB} = \frac{ml^2}{12} + m \sqrt{l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{5ml^2}{4} = \frac{16}{12}ml^2 = \frac{4}{3}ml^2$$

$$J_{zBC} = m(l\sqrt{2})^2 = 2ml^2$$

$$J_z = \frac{ml^2}{3} + \frac{4}{3}ml^2 + 2ml^2 = \frac{11}{3}ml^2$$

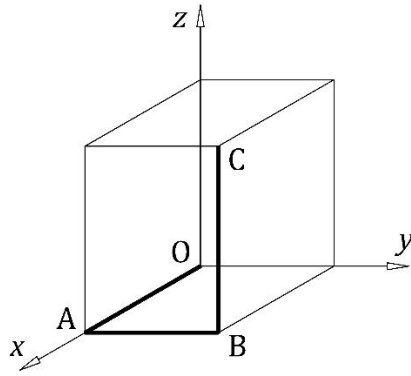
II начин

O – A

$$\rho = \frac{dm}{dx} = \text{const} \Rightarrow dm = \rho dx$$

$$\int dm = \rho \int_0^l dx \Rightarrow m = \rho l \Rightarrow \rho = \frac{m}{l}$$

$$J_{zOA} = \int x^2 dm = \int_0^l x^2 \rho dx = \rho \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \rho \frac{l^3}{3} = \frac{m}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$



A – B

$$\rho = \frac{dm}{dy} = \text{const} \Rightarrow dm = \rho dy$$

$$\int dm = \rho \int_0^l dy \Rightarrow m = \rho l \Rightarrow \rho = \frac{m}{l}$$

$$J_{zAB} = \int \sqrt{l^2 + y^2}^2 dm = \int_0^l \sqrt{l^2 + y^2}^2 \rho dy = \int_0^l (l^2 + y^2) \rho dy$$

$$J_{zAB} = l^2 \rho l + \frac{l^3}{3} \rho = \rho l^3 + \rho \frac{l^3}{3} = \rho \frac{4}{3} l^3 = \frac{m}{l} \frac{4}{3} l^3 = \frac{4}{3} m l^2$$

B – C

$$\rho = \frac{dm}{dy} = \text{const} \Rightarrow dm = \rho dy$$

$$\int dm = \rho \int_0^l dy \Rightarrow m = \rho l \Rightarrow \rho = \frac{m}{l}$$

$$J_{zBC} = \int (l\sqrt{2})^2 dm = 2l^2 m = 2ml^2$$

$$J_z = \frac{ml^2}{3} + \frac{4}{3} ml^2 + 2ml^2 = \frac{11}{3} ml^2$$