Osnovne dinamičke veličine za sistem

Postavljajući diferencijalne jednačine za sistem materijalnih tačaka zaključili smo da su one, osim toga što ih je veliki broj, izuzetno složene, a naročito zbog eksplicitnog prisustva unutrašnjih sila koje su uvijek veoma složene funkcije.

S toga je pristup rješavanju dinamičkih problema preko tih jednačina veoma kompleksan i u većini slučajeva nepotreban posao. U dinamici se uglavnom teži ka određivanju opštih karakteristika kretanja cijelog sistema, odnosno tijela, a ne pojedinih tačaka.

Zato se definišu osnovne dinamičke veličine, a preko njih i osnovne teoreme u dinamici, kao što su teorema o priraštaju količine kretanja sistema (impulsu), teorema o priraštaju momenta količine kretanja i teorema o priraštaju kinetičke energije.

Sve ove veličine definisali smo za tačku, pa se problem svodi na proširivanje tog pojma na sistem tačaka.

Za sistem od *n* tačaka M*i*, *i=1,2,3..n* uočimo *i-tu* tačku mase m_i, vektora položaja $\vec{r}_i$, brzine $\vec{v}_i$,

Osnovne dinamičke veličine za sistem su:

1) količina kretanja $\vec{K} = \sum_i \vec{K}_i$ jednaka je sumi količina kretanja svih masa sistema.

$$\vec{K} = \sum_i \vec{K}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \,, \qquad \vec{K} = m_i \vec{v}_i$$

2) kinetička energija

za jednu tačku: $$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i {v_i}^2 = \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \; \vec{v}_i)$$

za cio sistem: $$E_k = \sum_i E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_i m_i {v_i}^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i \; \vec{v}_i)$$

3) moment količine kretanja

za jednu tačku: $$\vec{L}_{i0}(\vec{K}_i) = \vec{L}_0(\vec{K}_i) = \vec{r}_i \; x \; \vec{K}_i = \vec{r}_i \; x \; m_i \vec{v}_i$$

za cio sistem: $$\vec{L}_0 = \sum_i \vec{L}_0(\vec{K}_i) = \sum_i (\vec{r}_i \; x \; \vec{K}_i)$$

Za navedene dinamičke veličine imamo odgovarajuće teoreme.

Kinetička energija sistema

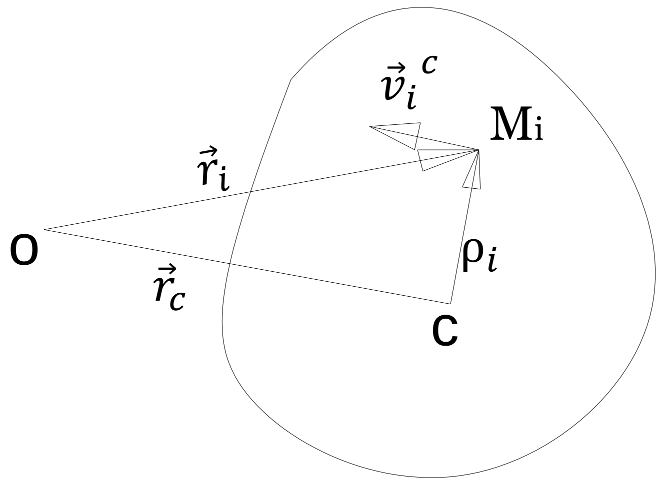
Neka imamo sistem tačaka M_i, mase m_i, brzine $\vec{v}_i$, (i=1,2,3, ...n) i uočimo i-tu tačku.
Kinetička energija i-te tačke je:

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i {v_i}^2$$

A sistema materijalnih tačaka:

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_i m_i {v_i}^2$$

Operišemo sa središtem kao sa odgovarajućom fizičkom suštinom jer smo to dokazali.



$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i{}^c$$

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{v}_c + \vec{v}_i{}^c\right)^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i {v_c}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \, 2 \left(\vec{v}_c \, \vec{v}_i{}^c\right) + \frac{1}{2} \sum_i m_i \, ({v_i}^c)^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} M {v_c}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \, ({v_i}^c)^2 + \vec{v}_c \sum_i (m_i \;\, \vec{v}_i{}^c)$$

Analizirajući dalje izraz za kinetičku energiju tijela dbijamo da je treći sabirak ovog izraza jednak nuli kao linearni moment masa u odnosu na centar inercije

$$\vec{v}_c \sum_i (m_i \;\, \vec{v}_i{}^c) = \frac{d}{dt} \vec{v}_c \sum_i m_i \vec{\rho}_i = 0$$

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{\rho}_i = 0$$ – linearni moment masa u odnosu na centar inercije

$$E_k = \frac{1}{2} M {v_c}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \, ({v_i}^c)^2$$ – određuje kinetičku energiju sistema

Kinetička energija nekog sistema određena je zbirom kinetičke energije centra inercije toga sistema, u kome je skoncentrisana ukupna masa sistema i kinetičke energije uslovljene relativnim kretanjem masa u odnosu na centar inercije. Ako je u pitanju kruto tijelo, onda je:

$$\vec{v}_i{}^c = \vec{\omega} \; x \; \vec{\rho}_i$$

Složeno kretanje tijela je sastavljeno iz traslacije jedne tačke i rotacije oko te tačke, pa važi Ojlerov obrazac za brzinu:

$$E_k = \frac{1}{2} M {v_c}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\omega} \; x \; \vec{\rho}_i)^2$$

Translatorno kretanje:

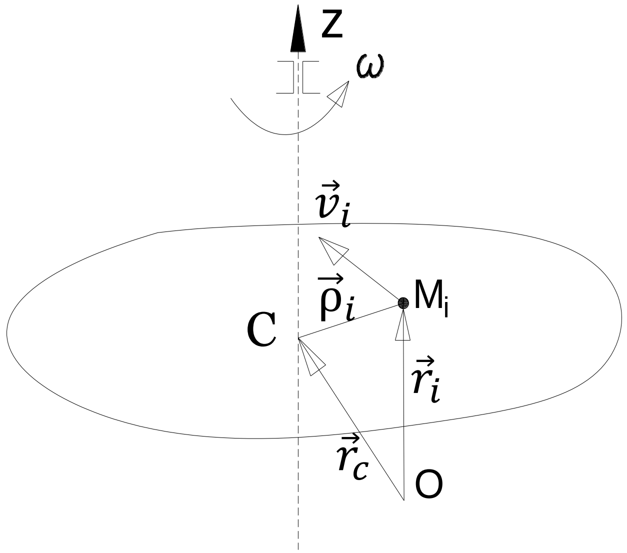
$$\vec{\omega} = 0$$

$$E_k = \frac{1}{2} M {v_c}^2 \text{ – nema komponente rotacionog kretanja}$$

Kada materijalna tačka vrši translatorno kretanje, u njoj je skoncentrisana sva masa,

$\vec{v}_c$ je brzina tijela, jer sve tačke imaju istu brzinu.

Ravno kretanje:



$$\vec{\omega}_i \; x \; \vec{\rho}_i = \omega \;\; \rho_i \, \vec{k}$$

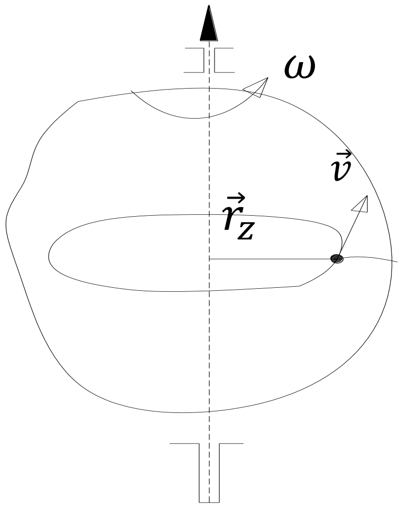
$$E_k = \frac{1}{2} M {v_c}^2 + \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i (\rho_i)^2 = \frac{1}{2} M {v_c}^2 + \frac{1}{2} {I_z}^c \omega^2$$

Kenigova teorema

Kinetička energija tijela koje izvodi ravno kretanje jednako je zbiru iz kinetičke energije centra inercije u kome je skoncentrisana ukupna masa tijela i kinetičke energije rotacije oko ose koja prolazi kroz centar inercije, a upravna je na ravan kretanja.

I ovde dolazi do izražaja komponentalna sadržina složenosti kretanja (translacija i rotacija).

Centar inercije karakteriše raspored masa.



$$dE_k = \frac{dmv^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\, {r_z}^2 dm$$

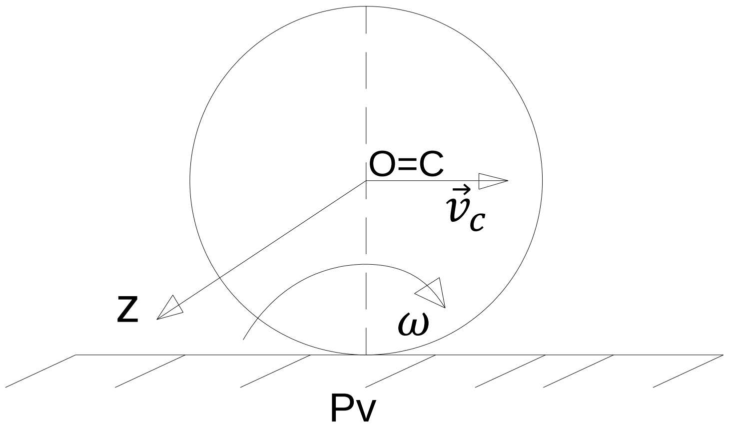
$$v = \omega\, r_z$$

$$E_k = \int_M dE_k = \frac{\omega^2}{2}\int_M {r_z}^2 dm = \frac{I_z\omega^2}{2}$$

Kinetička energija tijela koje se obrće oko nepokretne ose

$$E_k = \frac{I_z\omega^2}{2} \sim E_k = \frac{mv^2}{2}$$

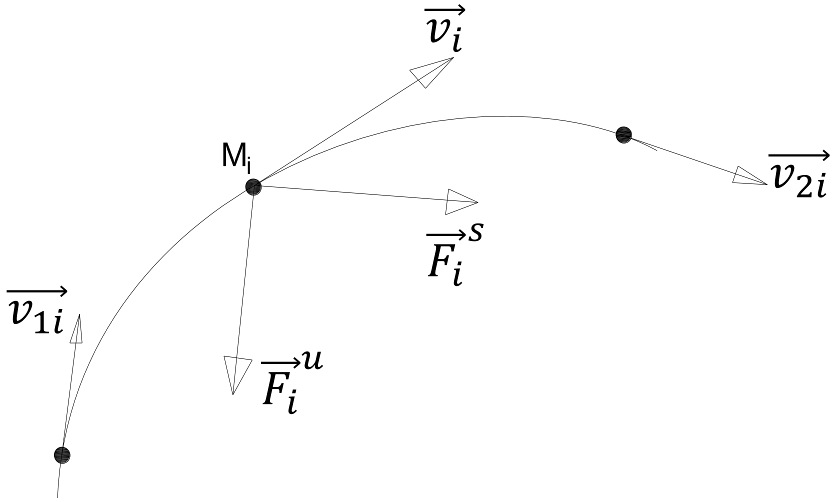
Kinetička energija diska koji se kotrlja bez klizanja



$$E_k = \frac{M{v_c}^2}{2} + {I_z}^{(c)}\frac{\omega^2}{2}; \quad {I_z}^{(c)} = I_c$$

Teorema o priraštaju kinetičke energije sistema

Posmatrajmo tačku M_i, mase m_i, brzine $\vec{v_i}$, (i=1,2...n). Svaka tačka sistema ima svoju putanju. Na svaku tačku dejstvuje spoljašnja i unutrašnja sila.



Sistem posmatramo u dva položaja i to u trenutku t_1 kada je tačka imala brzinu v_1, i u trenutku t2 kada je brzina bila v_2. Na tačke sistema djeluju spoljašnje i unutrašnje sile. Priraštaj kinetičke energije za i-tu tačku.

$$(E_{ki})_2 - (E_{ki})_1 = A_{1,2}(\vec{F}_i^s) + A_{1,2}(\vec{F}_i^u)$$

Ako sumiramo kinetičku energiju svih tačak dobićemo priraštaj kinetičke energije za sistem:

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{1,2}{}^s + A_{1,2}{}^u$$

Priraštaj kinetičke energije nekog sitema jednak je ukupnom radu svih spoljašnjih i unutrašnjih sila na tom pomjeranju.

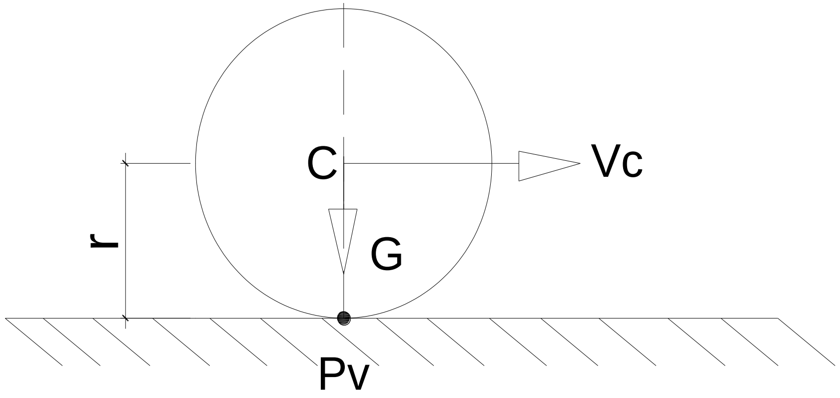
Ako je u pitanju nepromjenljiv sistem, tj.kruto tijelo, rad unutrašnjih sila je nula, pa je:

$$E_{k2} - E_{k1} = {A_{1,2}}^{s}$$

Priraštaj kinetičke energije je jedini opšti zakon sistema u kojem se pojavljuje uticaj unutrašnjih sila. S obzirom da se unutrašnje sile javljaju u parovima suprotnih sila, saglasno trećem Njutnovom zakonu, može se pokazati da je rad od unutrašnjih sila jednak nuli kod sistema kod kojih se rastojanja između napadnih tačaka sila ne mijenjaju, kao što je slučaj kod krutog tijela.

Primjeri

1. Zadatak Izračunati kinetičku energiju točka koji se kotrlja bez klizanja po pravolinijskoj šini, ako je $\vec{G}$ – težina točka, a $\vec{V}_c$ brzina njegovog centra inercije. Točak smatrati homogenim diskom.



$$V_c = r\dot{\varphi} \;\Rightarrow\; \dot{\varphi} = \frac{V_c}{r}$$

$$I_{z_c} = \frac{Gr^2}{2g}$$

$$E_k = \frac{G}{2g}V_c^2 + \frac{1}{2}I_{z_c}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}\frac{G}{g}V_c^2$$

$$E_k = \frac{I_{z_{pv}}\dot{\varphi}^2}{2},$$

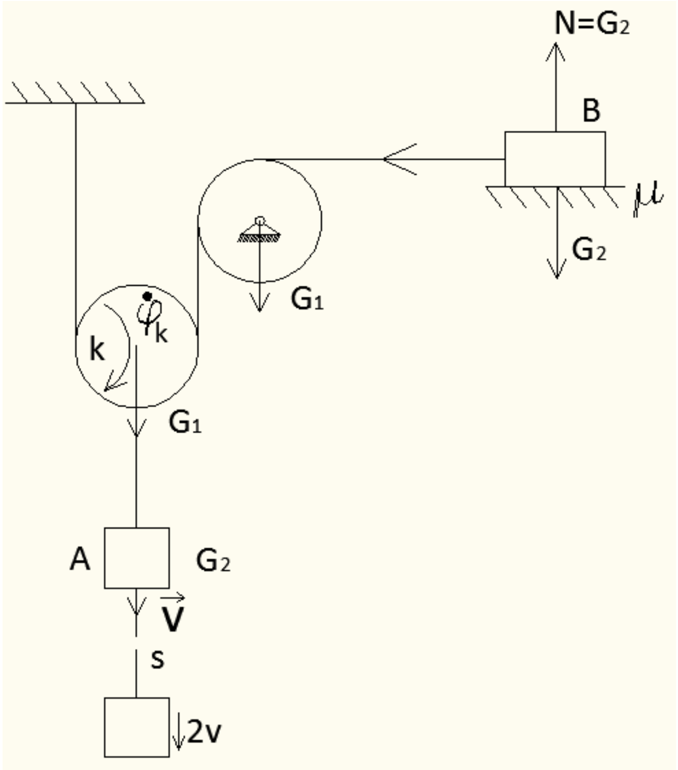
$$I_{z_{pv}} = I_{z_c} + Mr^2 = \frac{3}{2}\frac{G}{g}r^2$$

$$E_k = \frac{3}{4}\frac{G}{g}V_c^2$$

2. Zadatak

Tereti A i B dovode se u kretanje preko dva kotura, pokretnog K i nepokretnog L. Teret A počinje da se spušta naniže brzinom v. Za koje rastojanje treba da se spusti teret A da bi se njegova brzina povećala dva puta.

Tereti A i B su istih težina G_2. Koture K smatrati homogenim kružnim diskovima istih težina G_1. Koeficijent trenja klizanja tereta G po horizontalnoj ravni iznosi μ. Masu užadi zanemariti.



$$N = G_2$$

$$F_\mu = \mu \cdot N = \mu \cdot G_2$$

$$E_k = E_{K_K} + E_{K_L} + E_{K_L} + E_{K_B}$$

$$E_{K_A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_2}{g} x^2$$

Kotur K vrši ravno kretanje

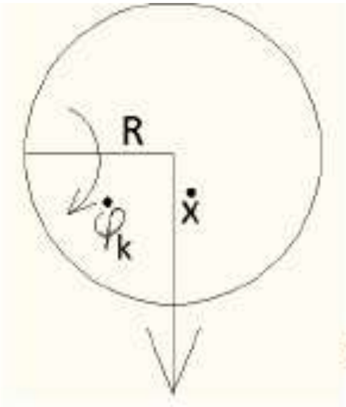
$$E_{K_A} = E_{K_{T_k}} + E_{K_{R_k}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_2}{g} x^2 + \frac{1}{2} I_{z_c} \varphi_k^2$$

Kotur L vrši rotaciono kretanje pa je:

$$E_{KL} = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}_L{}^2$$

$$E_{KB} = \frac{G_2}{g} \dot{y}^2$$

Da izrazimo sve brzine preko x



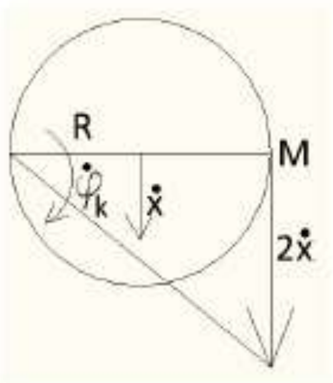
$$\dot{x} = R\dot{\varphi}_K$$

$$\dot{\varphi}_K = \frac{\dot{x}}{R}$$

$$E_{KK} = \frac{1}{2}\frac{G_1}{g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{G_1}{g}R^2\frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{3}{4}\frac{G_1}{g}\dot{x}^2$$

Brzina $\dot{y}$ je brzina koja je uzeta kao ista pa je

$$v_M = 2R\dot{\varphi}_K = 2R\frac{\dot{x}}{R} = 2\dot{x}$$



$$I_z = \frac{1}{2}\frac{G_1}{g}R^2$$

$$2\dot{x} = R\dot{\varphi}_L$$

$$\dot{\varphi}_L = \frac{2\dot{x}}{R}$$

$$E_{KL} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{G_1}{g}R^2\left(\frac{2\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{G_1}{g}\dot{x}^2$$

$$\dot{y} = 2\dot{x}$$

$$E_{KB} = \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}(2\dot{x})^2 = 2\frac{G_2}{g}\dot{x}^2$$

Ukupna kinetička energija je:

$$E_k = E_{K_K} + E_{K_L} + E_{K_B} = \frac{10G_2 + 7G_1}{4g}\dot{x}^2$$

$$(E_k)_2 - (E_k)_1 = \sum A = \frac{10G_2 + 7G_1}{4g}[(2v)^2 - v^2] = \frac{10G_2 + 7G_1}{4g}v^2 \quad (*)$$

Rad čitavog sistema jednak je:

$$A = A^{G_2} + A^{G_1} + A^{F_\mu}$$

$$A_u = G_2 \cdot s + G_1 \cdot s - \mu G_2 \cdot 2s$$

$$A_u = (G_2 + G_1 - 2\mu G_2) \cdot s$$

Kombinacijom $\sum A$ i $(*)$ imamo

$$\frac{3}{4}\frac{10G_2 + 7G_1}{4g}v^2 = (G_2 + G_1 - 2\mu G_2) \cdot s$$

$$s = \frac{3(10G_2 + 7G_1)v^2}{4g(G_2 + G_1 - 2\mu G_2)}$$