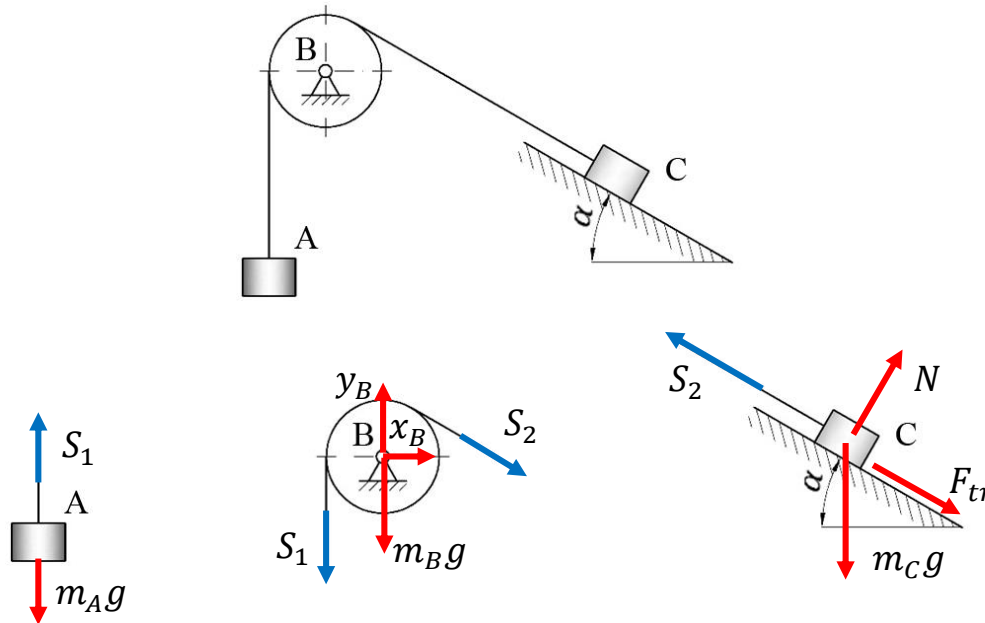


ЗАКОН О ПРОМЈЕНИ КИНЕТИЧКЕ ЕНЕРГИЈЕ СИСТЕМА КРУТИХ ТИЈЕЛА

ЗАДАТАК БР. 1

Тег А масе 10 kg, почевши кретање из мира посредством неистегљивог конопца и котура В (хомогени кружни диск масе 30 kg и полупречника 30 cm), доводи у кретање сандук С масе 5 kg уз стрму раван нагиба 30°. Динамички коефицијент трења између сандука и стрме равни је 0,1. Одредити брзину тега након што се он спушти за висину од 3,46 m.



$$E_{kS1} - E_{kS0} = A_{01}^{F_s}$$

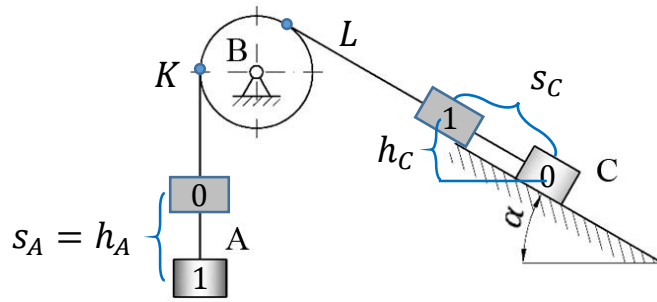
Кинетичка енергија система

$$E_{kS} = E_{kA} + E_{kB} + E_{kC} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2$$

$$J_B = \frac{m_B r^2}{2}$$

$$E_{kS} = \frac{1}{2} 10 v_A^2 + \frac{1}{2} \frac{30 \cdot 0,3^2}{2} \omega_B^2 + \frac{1}{2} 5 v_C^2$$

Кинетичку енергију цјелокупног система треба изразити у функцији брзине тијела А. Према томе, прво треба да ω_B и v_C изразимо преко v_A .



Брзине заједничких тачака

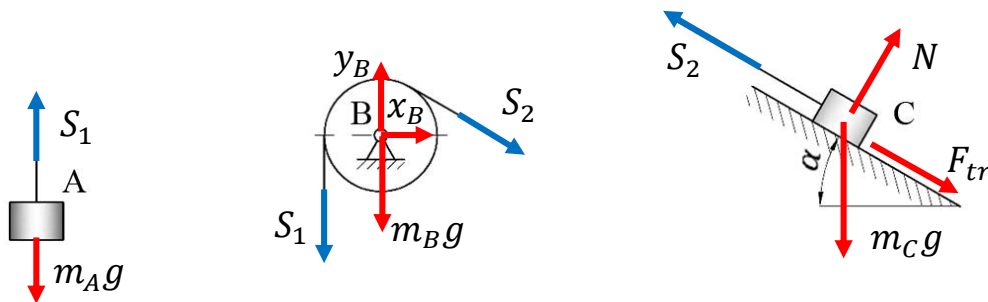
$$\left. \begin{array}{l} v_K = v_A \\ v_K = r\omega_B \end{array} \right\} \Rightarrow v_A = r\omega_B \Rightarrow \omega_B = \frac{v_A}{r} = \frac{v_A}{0,3}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_L = v_C \\ v_L = r\omega_B \end{array} \right\} \Rightarrow v_C = r\omega_B = r \frac{v_A}{r} = v_A$$

$$E_{kS} = \frac{1}{2} 10v_A^2 + \frac{1}{2} \frac{130 \cdot 0,3^2}{2} \frac{v_A^2}{0,3^2} + \frac{1}{2} 5v_A^2$$

$$E_{kS} = v_A^2 (5 + 7,5 + 2,5) = 15v_A^2$$

Рад сила



Немамо рад унутрашњих сила (S_1, S_2). Силе које врше рад у систему су $m_A g$, $m_C g$ и F_{tr} .

$$h_C = s_C \sin \alpha$$

$$A = +m_A g s_A - m_C g s_C \sin \alpha - F_{tr} s_C$$

Ми треба да пређени пут s_C изразимо преко пређеног пута s_A .

$$v_C = v_A \Rightarrow s_C = s_A$$

$$A = +m_A g s_A - m_C g s_A \sin \alpha - F_{tr} s_A$$

$$F_{tr} = \mu N = \mu m_C g \cos \alpha$$

$$A = s_A (m_A g - m_C g \sin \alpha - \mu m_C g \cos \alpha)$$

$$A = s_A g \left(10 - 5 \frac{1}{2} - 0,1 \cdot 5 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \mathbf{69,33 s_A}$$

$$E_{kS1} - E_{kS0} = A_{01}^{F_s}$$

$$15v_{A1}^2 - 15v_{A0}^2 = 69,33s_{A01}$$

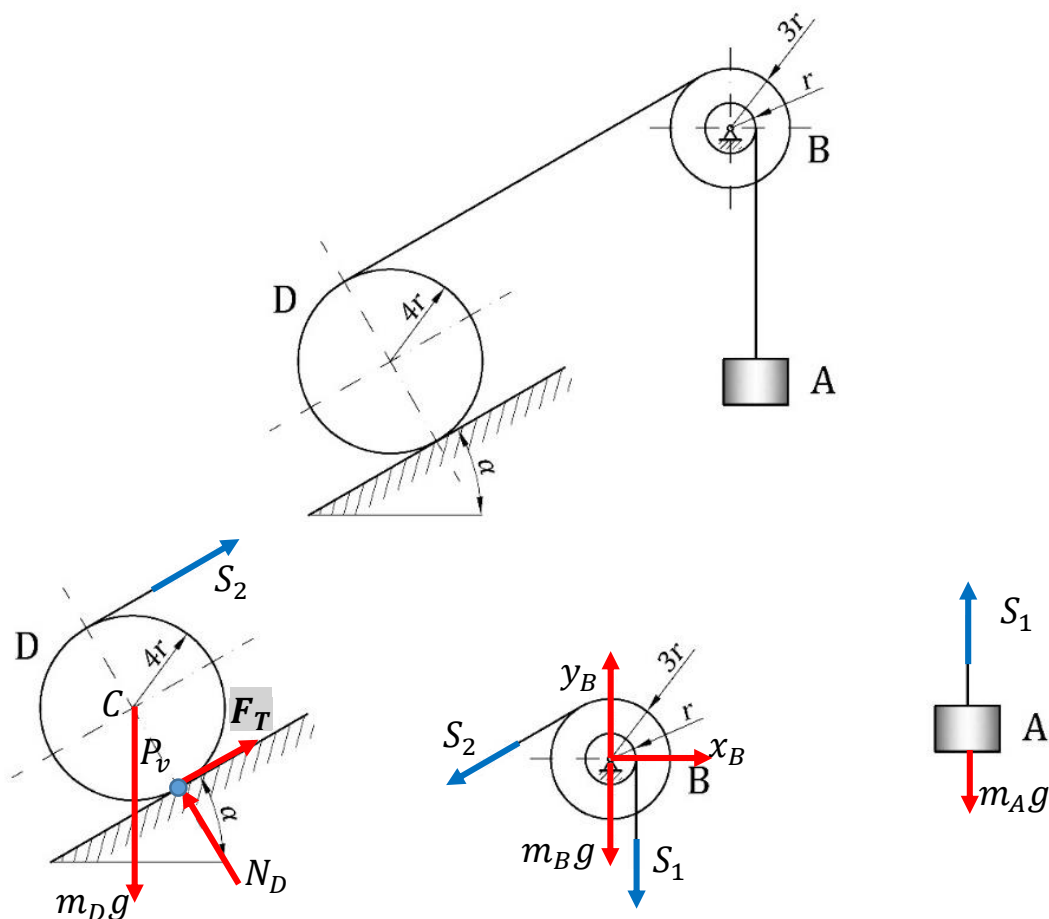
$$v_{A0} = 0; s_{A01} = 3,46 \text{ m}$$

$$15v_{A1}^2 = 69,33 \cdot 3,46$$

$$v_A = \sqrt{\frac{69,33 \cdot 3,46}{15}} = \mathbf{4 \frac{m}{s}}$$

ЗАДАТАК БР. 2

Терет А масе $m_A = 2m$ везан је за неистегљиво уже које је пребачено преко котура В занемарљиве масе, а затим намотано на котур D масе $m_D = 4m$. Котур сматрати хомогеним кружним диском који се котрља без клизања низа страну по равни нагиба $\alpha = 30^\circ$. Одредити убрзање тијела А. Потом одредити пут који пређе тијело А док се његова брзина не удвостручи, ако је почетна брзина тијела А 1 m/s.



F_T сила трења котрљања – за њу је карактеристично да се не одређује на исти начин као сила трења клизања ($F_{tr} = \mu N$). Рад силе F_T једнак је нули.

$$E_{kS1} - E_{kS0} = A_{01}^{F_S}$$

Кинетичка енергија система

$$E_{kS} = E_{kA} + E_{kB} + E_{kD}$$

Тијело А – праволинијска translација

$$E_{kA} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} 2m v_A^2 = m v_A^2$$

Тијело B – ротација око непомичне осе

$$m_B \approx 0$$

$$J_B = m_B i_B^2 = 0$$

$$E_{kB} = \frac{1}{2} J_B \omega_B^2 = \frac{1}{2} 0 \omega_B^2 = 0$$

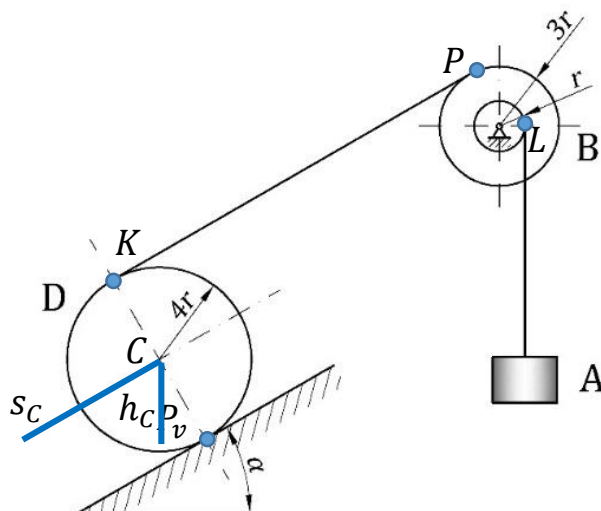
Тијело D – равно кретање (котрљање без клизања)

$$E_{kD} = E_{kD}^{tr} + E_{kD}^{rot} = \frac{1}{2} m_D v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_D^2 = \frac{1}{2} 4m v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{m_D r_D^2}{2} \omega_D^2$$

$$E_{kD} = \frac{1}{2} 4m v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{4m 16r^2}{2} \omega_D^2 = 2m v_C^2 + 16m r^2 \omega_D^2$$

$$E_{kS} = E_{kA} + E_{kB} + E_{kD} = m v_A^2 + 0 + 2m v_C^2 + 16m r^2 \omega_D^2$$

Кинетичку енергију система изражавамо преко брзине тијела A. Дакле, све брзине треба да изразимо преко v_A .



Брзине заједничких тачака

$$\left. \begin{array}{l} v_L = r \omega_B \\ v_L = v_A \end{array} \right\} \Rightarrow r \omega_B = v_A \Rightarrow \omega_B = \frac{v_A}{r}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_P = 3r \omega_B \\ v_P = v_K \end{array} \right\} \Rightarrow v_K = 3r \omega_B = 3r \frac{v_A}{r} = 3v_A$$

$$\left. \begin{array}{l} v_K = 3v_A \\ v_K = \overline{KP_v} \omega_D \end{array} \right\} \Rightarrow 3v_A = \overline{KP_v} \omega_D \Rightarrow 3v_A = 8r \omega_D \Rightarrow \omega_D = \frac{3v_A}{8r}$$

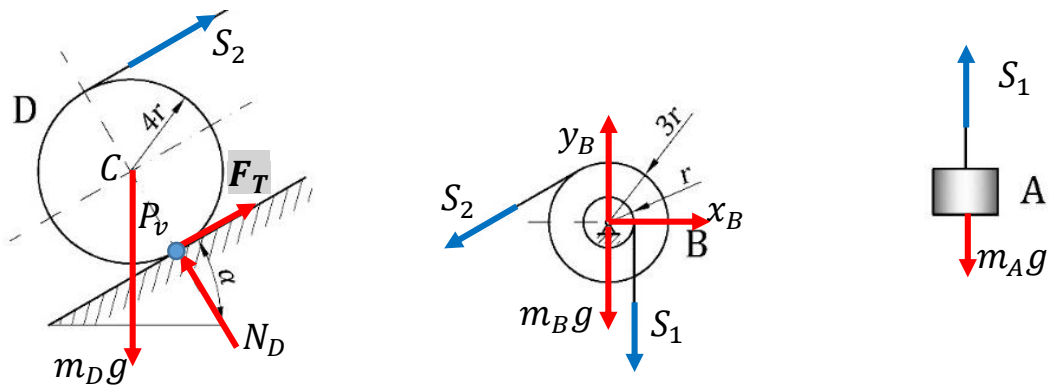
$$v_C = \overline{CP_v} \omega_D = 4r \omega_D = 4r \frac{3v_A}{8r} = \frac{3}{2} v_A$$

$$E_{kS} = mv_A^2 + 0 + 2mv_C^2 + 16mr^2 \omega_D^2$$

$$E_{kS} = mv_A^2 + 2m \frac{9}{4} v_A^2 + 16mr^2 \frac{9v_A^2}{64r^2}$$

$$E_{kS} = mv_A^2 \left(1 + \frac{9}{2} + \frac{9}{4} \right) = \frac{4 + 18 + 9}{4} mv_A^2 = \frac{31}{4} mv_A^2$$

Рад сила



Силе које врше рад су $m_A g$ и $m_D g$.

$$A = -m_A g h_A + m_D g h_D$$

$$h_A = s_A$$

$$h_D = h_C = s_C \sin \alpha$$

$$A = -m_A g s_A + m_D g s_C \sin \alpha$$

Исто као што смо све брзине изразили преко v_A , тако сваки пређени пут изражавамо преко s_A .

$$v_C = \frac{3}{2} v_A \Rightarrow s_C = \frac{3}{2} s_A$$

$$A = -m_A g s_A + m_D g \frac{3}{2} s_A \sin \alpha$$

$$A = -2m g s_A + 4m g \frac{3}{2} s_A \frac{1}{2}$$

$$A = (-2 + 3) m g s_A = m g s_A$$

$$E_{kS1} - E_{kS0} = A_{01}^{F_s}$$

$$\frac{31}{4}mv_{A1}^2 - \frac{31}{4}mv_{A0}^2 = mgs_{A01}$$

$$v_{A0} = 1 \text{ m/s}; v_{A1} = 2v_{A0} = 2 \text{ m/s}$$

$$\frac{31}{4}m \cdot 4 - \frac{31}{4}m \cdot 1 = mgs_{A01}$$

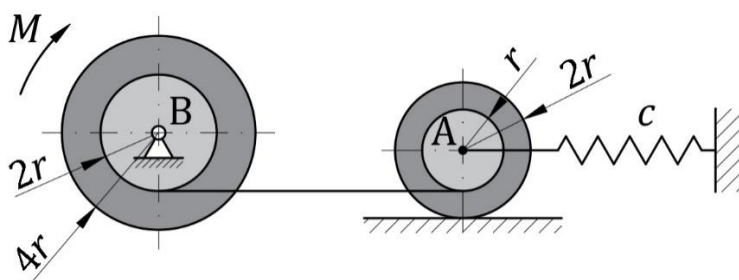
$$\frac{93}{4} = gs_{A01}$$

$$s_{A01} = \frac{93}{4g} = \mathbf{2,37 \text{ m}}$$

ЗАДАТАК БР. 3

Систем приказан на слици доводи се у кретање, из равнотежног положаја, дејством константног момента M интензитета 16 Nm . Тијело А се по подлози котрља без клизања, а опруга крутости $c = 80 \text{ N/m}$ је ненапрегнута у равнотежном положају. Одредити кинетичку енергију система у функцији брзине центра инерције диска А, а потом деформацију опруге у тренутку заустављања система.

Дато је: $m_A = 4 \text{ kg}$, $m_B = 2 \text{ kg}$, $i_A = 10 \text{ cm}$, $i_B = r = 20 \text{ cm}$.



$$E_{kS1} - E_{kS0} = A_{01}$$

Кинетичка енергија

$$E_{kS} = E_{kA} + E_{kB}$$

Тијело А врши равно кретање.

$$E_{kA} = E_{kA}^{tr} + E_{kA}^{rot} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_A^2$$

$$J_A = m_A i_A^2 = 4 \cdot 0,01 = 0,04$$

$$E_{kA} = \frac{1}{2} 4 v_A^2 + \frac{1}{2} 0,04 \omega_A^2 = 2 v_A^2 + 0,02 \omega_A^2$$

Тијело В врши ротацију око непомичног ослоња.

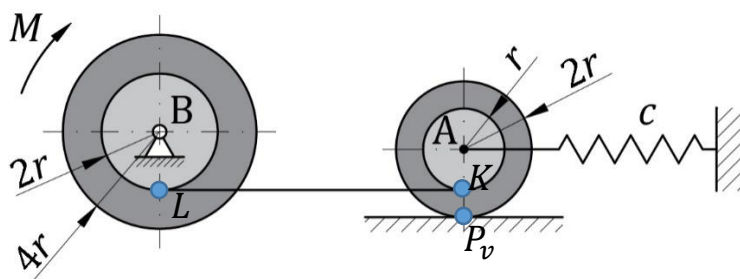
$$E_{kB} = \frac{1}{2} J_B \omega_B^2$$

$$J_B = m_B i_B^2 = 2 \cdot 0,04 = 0,08$$

$$E_{kB} = \frac{1}{2} 0,08 \omega_B^2 = 0,04 \omega_B^2$$

$$E_{kS} = E_{kA} + E_{kB} = 2 v_A^2 + 0,02 \omega_A^2 + 0,04 \omega_B^2$$

Све брзине треба да изразимо преко v_A .



Брзине заједничких тачака

$$v_A = \overline{AP_v} \omega_A \Rightarrow \omega_A = \frac{v_A}{\overline{AP_v}} = \frac{v_A}{2r} = \frac{v_A}{2 \cdot 0,2} = \frac{v_A}{0,4}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_K = \overline{KP_v} \omega_A \\ v_K = v_L \end{array} \right\} \Rightarrow v_L = \overline{KP_v} \omega_A \Rightarrow v_L = r \omega_A = r \frac{v_A}{0,4} = 0,2 \frac{v_A}{0,4} = \frac{v_A}{2}$$

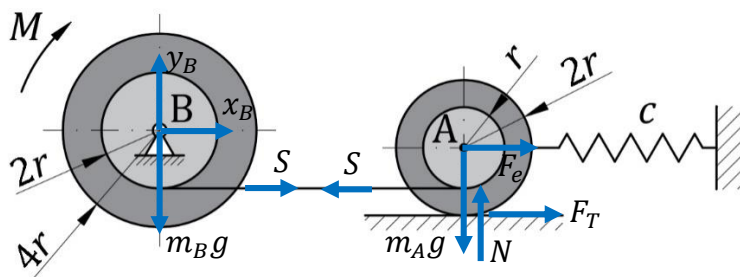
$$\left. \begin{array}{l} v_L = \frac{v_A}{2} \\ v_L = 2r \omega_B \end{array} \right\} \Rightarrow 2r \omega_B = \frac{v_A}{2} \Rightarrow \omega_B = \frac{v_A}{2 \cdot 2r} \Rightarrow \omega_B = \frac{v_A}{4r} \Rightarrow \omega_B = \frac{v_A}{0,8}$$

$$E_{kS} = 2v_A^2 + 0,02\omega_A^2 + 0,04\omega_B^2$$

$$E_{kS} = 2v_A^2 + 0,02 \frac{v_A^2}{0,16} + 0,04 \frac{v_A^2}{0,64}$$

$$E_{kS} = v_A^2 \left(2 + \frac{0,02}{0,16} + \frac{0,04}{0,64} \right) = 2,1875v_A^2$$

Рад сила



Рад врше момент M и еластична сила у опрузи F_e .

$$A = A^M + A^{F_e}$$

$$A^M = \int M d\varphi_B = \int 16 d\varphi_B = 16\varphi_B$$

$$A^{Fe} = \frac{1}{2}c(\Delta_0^2 - \Delta_1^2) = \frac{1}{2}c(0^2 - s_A^2) = -\frac{1}{2}80s_A^2 = -40s_A^2$$

$$A = 16\varphi_B - 40s_A^2$$

Исто као што смо све брзине изразили преко v_A , сва помјерања треба да изразимо преко s_A .

$$\omega_B = \frac{v_A}{0,8} \Rightarrow \varphi_B = \frac{s_A}{0,8}$$

$$A = 16 \frac{s_A}{0,8} - 40s_A^2$$

$$A = 20s_A - 40s_A^2$$

$$E_{kS1} - E_{kS0} = A_{01}$$

$$2,1875v_{A1}^2 - 2,1875v_{A0}^2 = 20s_{A01} - 40s_{A01}^2$$

$$v_{A0} = 0; v_{A1} = 0$$

$$20s_{A01} - 40s_{A01}^2 = 0$$

$$20s_{A01}(1 - 2s_{A01}) = 0$$

$$1 - 2s_{A01} = 0$$

$$s_{A01} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ m}$$