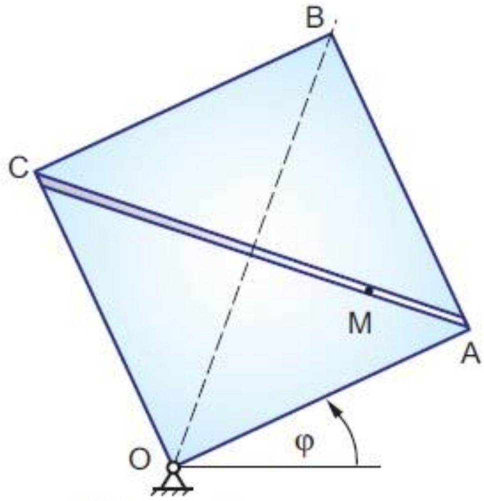
SLOŽENO KRETANJE TAČKE

1. zadatak (Kuzmanović et al. (2012). Zbirka zadataka iz MEHANIKE I, Un. u Beogradu, Saobraćajni fakultet)



Slika 1.84: uz zad. 1.45.

Kvadratna ploča stranice $a\sqrt{2}$, obrće se u ravni xOy oko nepomične ose Oz po zakonu $\varphi = \dfrac{\pi t^2}{2}$. Istovremeno polazeći iz položaja A, u kanalu $\overline{AC}$, kreće se tačka M, saglasno zakonu $\overline{AM} = s = at^2$. Odrediti intenzitet apsolutne brzine i apsolutnog ubrzanja tačke M u trenutku $t_1 = 1\,[s]$.

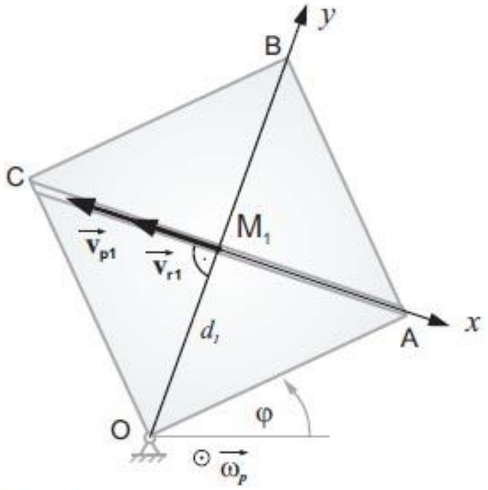
Rešenje:

Kretanje tačke je složeno kretanje, pri čemu je relativno kretanje – pravolinijsko kretanje, a prenosno – obrtanje tela oko nepomične ose. Iz zakona puta $s = at^2$ dobija se da je u posmatranom trenutku $s(t_1) = a = \overline{AM_1}$, tj. tačka se našla u težištu ploče - preseku dijagonala, pa za taj položaj treba odrediti tražene veličine. Na slici 1.85 sa d_1 označena je polu dijagonala (poluprečnik rotacije prenosnog kretanja), tj. $d_1 = d/2 = \sqrt{(\sqrt{2}a)^2 + (\sqrt{2}a)^2}/2 = a$.

Brzina:

Pravci i smerovi relativne i prenosne brzine prikazani su na sl. 1.85. Sa slike se vidi da su to kolinearni vektori. Njihovi intenziteti su:

$$s = at^2 \quad \Rightarrow \quad s_1 = a,$$
$$v_r = \dot{s} = 2at \quad \Rightarrow \quad v_{r_1} = 2a\,[m/s],$$
$$\dot{\varphi} = \omega_p = \frac{2\pi t}{2} = \pi t \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}_1 = \pi,$$
$$v_{p_1} = d_1 \cdot \dot{\varphi}_1 = a\pi\,[m/s].$$

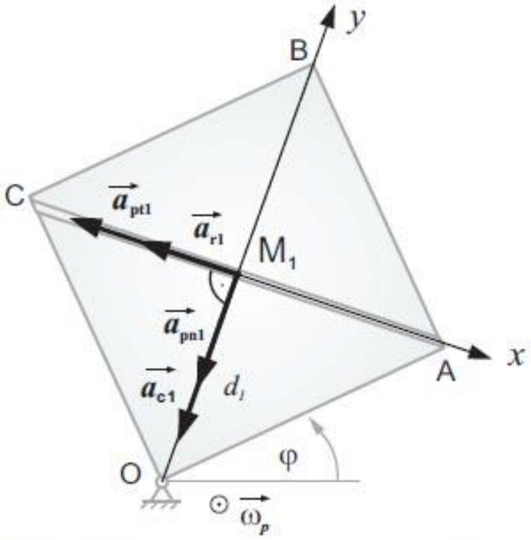


Slika 1.85: uz rešenje zad. 1.45 - brzina.

Kako su ovi vektori kolinearni i istih smerova, to se intenzitet apsolutne brzine dobija prostim sabiranjem, tj.

$$\boxed{v_{a_1} = v_{r_1} + v_{p_1} = 2a + a\pi = a(2+\pi)\,[m/s]}.$$

Ubrzanje:



Slika 1.86: uz rešenje zad. 1.45 - ubrzanje.

Apsolutno ubrzanje se sastoji od relativnog, prenosnog i Koriolisovog ubrzanja. Kako je relativno kretanje, pravolinijsko kretanje, to iz zakona relativnog kretanja, je (u proizvoljnom i traženom trenutku)

$$a_r = \ddot{s} = 2a \quad \Rightarrow \quad a_{r_1} = 2a\,m/s^2.$$

Kako je prenosno kretanje obrtanje oko nepomične ose, to prenosno ubrzanje ima i normalnu i tangencijalnu komponentu

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{pt} + \mathbf{a}_{pn},$$

pri čemu su njihovi intenziteti jednaki

$$a_{pt} = \overline{OM}\ddot{\varphi} = \pi a = a_{pt_1},$$
$$a_{pn} = \overline{OM}\dot{\varphi}^2 = a\pi^2 t^2 \quad \Rightarrow \quad a_{pn_1} = a\pi^2.$$

Intenzitet Koriolisovog ubrzanje je

$$a_c = 2\omega_p v_r \sin\alpha = 2\dot{\varphi}\cdot v_r = 2\pi t 2at = 4a\pi t^2 \quad \Rightarrow \quad a_{c_1} = 4a\pi.$$

Pravci i smerovi ovih vektora prikazani su na sl. 1.86.

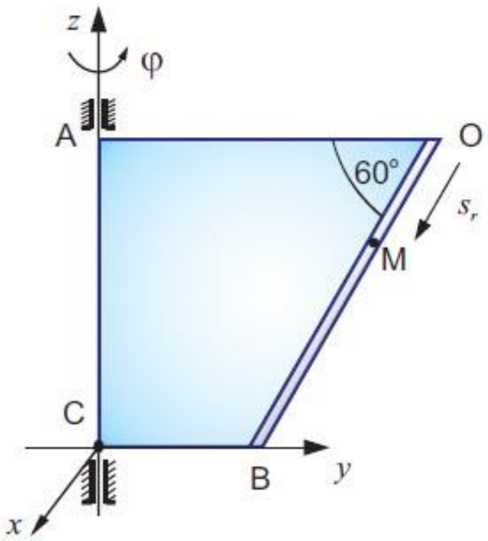
Kako sve ove komponente leže ili na x ili y osi, to njihovom sabiranjem dobijamo:

$$a_{x_1} = -a_{pt_1} - a_{r_1} = -a\pi - 2a,$$
$$a_{y_1} = -a_{pn_1} - a_{c_1} = -a\pi^2 - 4a\pi = -a\pi(\pi + 4).$$

Ovako dobijene dve komponente su ortogonalne, pa je intenzitet apsolutnog ubrzanja

$$\boxed{a_{a_1} = a\sqrt{(\pi+2)^2 + \pi^2(\pi+4)^2}\ [m/s^2]}.$$

2. zadatak (Kuzmanović et al. (2012). Zbirka zadataka iz MEHANIKE I, Un. u Beogradu, Saobraćajni fakultet)



Slika 1.98: uz zad. 1.50.

Tačka M kreće se po žlebu OB po relativnom zakonu $\overline{OM} = s = 4\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, gde je s dato u centimetrima, a t u sekundama, počev od trenutka $t_0 = 0$. U istom trenutku započinje rotacija tela $AOBC$ oko vertikalne nepokretne ose O_1z u pozitivnom matematičkom smeru po zakonu $\varphi = \pi t^2$. Odrediti položaj kuglice na telu u trenutku $t_1 = 1\,[s]$, a zatim intenzitet apsolutne brzine i apsolutnog ubrzanja u tom trenutku. $\overline{AO} = 8\,[cm]$.

<u>*Rešenje:*</u>

Položaj:

$$\overline{OM} = s = 4\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right), \qquad \varphi = \pi t^2, \quad s_1 = \overline{OM_1} = 4\sin\frac{\pi}{2} = 4\,[cm].$$

<u>Brzina:</u>

$$v_r = \dot{s} = 4\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

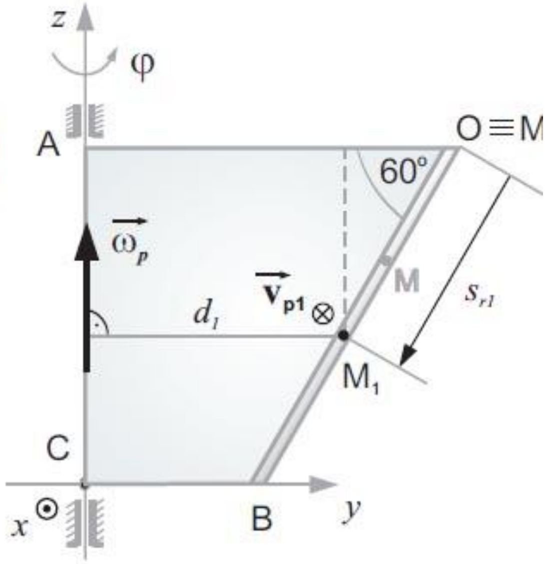
$$v_{r_1} = 0,$$

$$\varphi = \pi t^2 \quad \dot{\varphi} = 2\pi t, \quad \ddot{\varphi} = 2\pi,$$

$$v_p = d\cdot\dot{\varphi}$$

$$v_{p_1} = d_1\cdot\dot{\varphi}_1 = 6\cdot 2\pi = 12\pi.$$

$$\boxed{v_{a_1} = v_{p_1} = 12\pi\,[cm/s]}.$$



Slika 1.99: uz rešenje zad. 1.49 - brzina.

Ubrzanje:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_c,$$

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{pt} + \mathbf{a}_{pn},$$

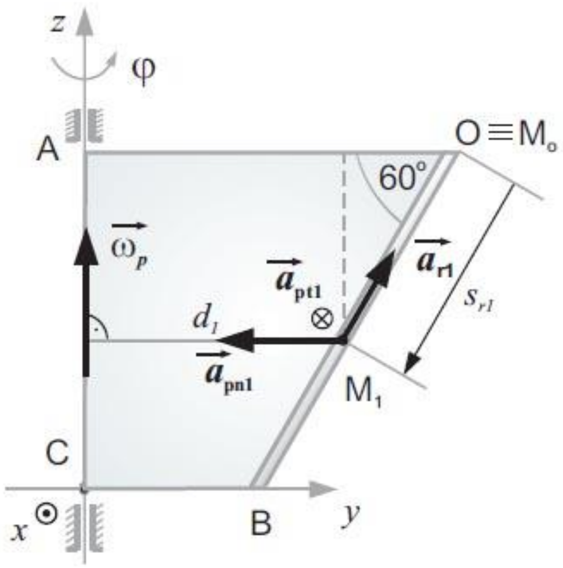
$$a_{pn_1} = d_1\cdot\dot{\varphi}_1^2 = 6\cdot 4\pi^2 = 24\pi^2,,$$

$$a_{pt_1} = d_1\cdot\ddot{\varphi}_1 = 6\cdot 2\pi = 12\pi,$$

$$a_{c_1} = 2\dot{\varphi}_1 v_{r_1} = 0,$$

$$a_r = \ddot{s} = -2\pi\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$a_{r_1} = -\pi^2.$$



Slika 1.100: uz rešenje zad. 1.49 - ubrzanje.

$$a_{ax_1} = -a_{pt_1} - a_c = -12\pi,$$

$$a_{ay_1} = -a_{r_1}\cos 60^\circ - a_{pn_1} = \frac{\pi^2}{2} - 24\pi^2 = -\frac{47}{2}\pi^2,$$

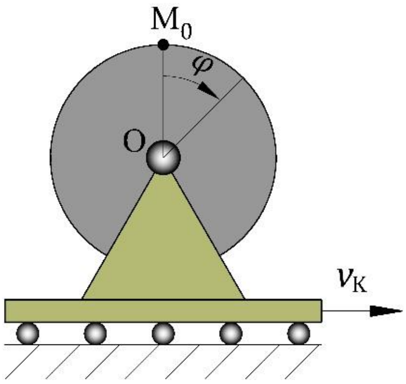
$$a_{az_1} = a_{r_1}\sin 60^\circ = \pi^2\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\boxed{a_{a_1} = \pi\sqrt{144 + \frac{2209}{4}\pi^2 + \frac{3}{4}\pi^2} = \pi\sqrt{144 + 533\pi^2}\,[cm/s^2]}.$$

ZADACI ZA SAMOSTALNI RAD

1. zadatak

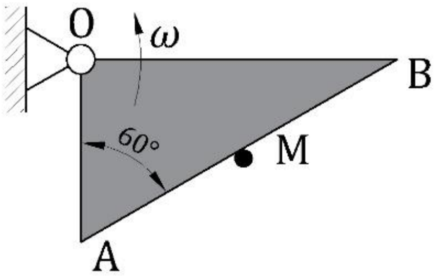
Izračunati apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku $\pi/4\ s$ ako se kolica kreću konstantnom brzinom $v_{\mathrm{K}} = 3\ \mathrm{m/s}$, dok disk poluprečnika $2\ \mathrm{m}$ rotira oko ose O konstantnom ugaonom brzinom od $2\ \mathrm{s}^{-1}$.



Rješenje: $v_{\pi/4} = 5\ \mathrm{m/s}$; $a_{\pi/4} = 8\ \mathrm{m/s^2}$

2. zadatak

Trougao započinje kretanje iz položaja prikazanog na slici konstantnom ugaonom brzinom $\omega = \pi/4\ \mathrm{s}^{-1}$. Istovremeno iz položaja A ka položaju B kreće tačka prema zakonu $\overline{\mathrm{AM}} = t^2$. Ako je $\overline{\mathrm{OA}} = 2\ \mathrm{m}$, izračunati apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku $t_2 = 2\ \mathrm{s}$.



Rješenje: $v_2 = 5{,}86\ \mathrm{m/s}$; $a_2 = 7{,}35\ \mathrm{m/s^2}$