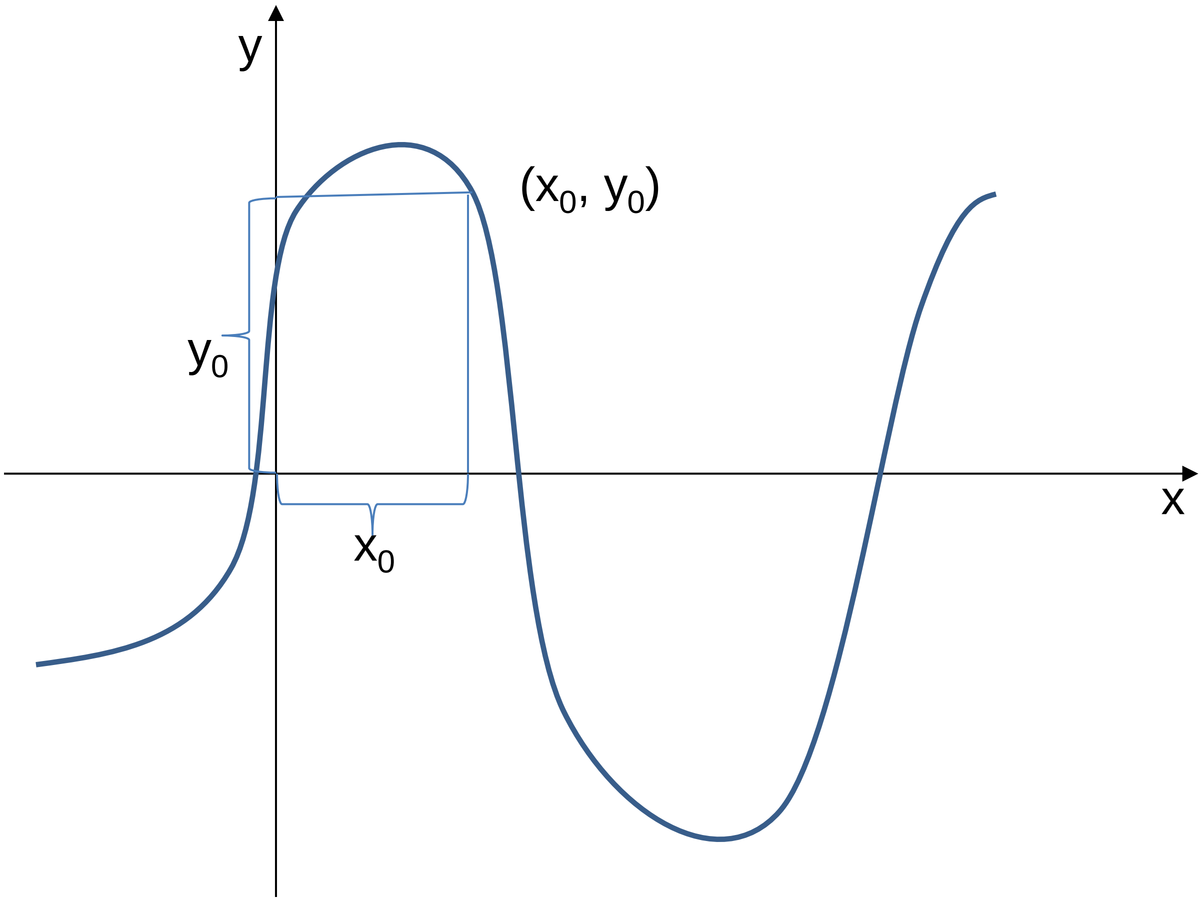
REALNA FUNKCIJA

- Funkciju f čiji je skup vrijednosti V podskup skupa R realnih brojeva zovemo **realnom funkcijom**. Ako je, pritom, oblast definisanosti D neki podskup skupa R^n uređenih n-torki realnih brojeva, kažemo da je f realna funkcija od **n realnih nezavisno-promjenljivih**.
- Na primjer, $f(x,y,z) = x + 2y - z, \quad x,y,z \in R$ je realna funkcija od tri nezavisno-promjenljive x,y,z.

- Neka je f realna funkcija jedne nezavisno-promjenljive čiji je domen $D \subset R$. Kako svakom uređenom paru realnih brojeva odgovara jedna tačka Dekartove ravni, to svakom paru $(x_0, f(x_0))$ odgovarajućih vrijednosti argumenta i funkcije $f: D \to R$ odgovara jedna (jedina) tačka Dekartove ravni Oxy. Skup svih tačaka Dekartove ravni koje odgovaraju uređenim parovima $(x, f(x))$, $x \in D$ zove se **grafik funkcije f**.


y
(x_0, y_0)
y_0
x
x_0

Nizovi

Realnu funkciju jedne realne promjenljive čija je oblast definisanosti skup prirodnih brojeva zovemo **nizom**. Nezavisnu promjenljivu niza obično označavamo sa n, a odgovarajuću vrijednost funkcije sa a(n) ili, češće, sa a_n. Vrijednost niza za dato n zovemo i **članom** niza.

Za niz a_n kažemo da **monotono raste** ako je $a_n < a_{n+1}$ za svako $n \in N$. Ako je $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in N$, kažemo da niz a_n **ne opada**. Analogno se definiše **mononotono opadanje** odnosno **nerašćenje** niza a_n.

Za niz a_n kažemo da je **ograničen** ako postoji realan broj $M > 0$, takav da je $|a_n| \leq M$, $\forall n \in N$.

Primjeri nizova

Primjer 1. Niz $a_n = \frac{1}{n}$ monotono opada jer je , $\forall n \in N$: $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$

Ovaj niz je i ograničen jer je , $\forall n \in N$: $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq 1$

Primjer 2. Niz $(-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$ za n = 1,2,... ima vrijednosti $-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots$ i, očigledno, nije monoton. Kako je $\left|(-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}\right| = \frac{n+1}{n} \leq 2$, $\forall n \in N$ dati niz je ograničen.

ARITMETIČKI NIZ

ARITMETIČKI NIZ ili ARITMETIČKA PROGRESIJA je niz od n realnih brojeva kod kojih je razlika svaka dva uzastopna člana ovog konačnog niza (proizvoljnog i njemu prethodnog) konstanta.

Neka je d konstantna razlika odnosno ***diferencija*** .

Slijede relacije:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

Odnosno

$$a_i = a_1 + (i-1)d, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

ARITMETIČKI NIZ

Primjenjujući poslednju relaciju imamo da je:

$$a_1 + a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2)d = a_1 + (n-1)d$$

Odnosno

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$$

Na isti način se provjerava da važi:

$$a_1 + a_n = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \ldots$$

ARITMETIČKI NIZ

Kako je za: $i-k \in \{1,2,\ldots,n\}$ i $i+k \in \{1,2,\ldots,n\}$ $i,k \in N$

$$a_{i-k} = a_1 + (i-k-1)d$$

$$a_{i+k} = a_1 + (i+k-1)d$$

To je

$$a_{i-k} + a_{i+k} = 2a_1 + 2(i-1)d = 2\left[a_1 + (i-1)d\right] = 2a_1$$

Odnosno:

$$a_i = \frac{a_{i-k} + a_{i+k}}{2}$$

Proizvoljni član aritmetičkog niza je aritmetička sredina dva u odnosu na njega simetrična člana.

ARITMETIČKI NIZ

Zbir prvih n članova aritmetičkog niza je: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Kako je, takođe: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$

Slijedi: $2\sum_{i=1}^{n} a_i = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1) = n \cdot (a_1 + a_n)$

Odnosno:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

GEOMETRIJSKI NIZ

GEOMETRIJSKI NIZ je niz n realnih brojeva takvih da je količnik svaka dva uzastopna člana (proizvoljnog i njemu prethodnog) konstantan.

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$

$$\dots$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$\boxed{a_i^2 = a_{i-k} \cdot a_{i+k}}$$

proizvoljni član a_i, $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ je geometrijska sredina dva u odnosu na njega simetrična člana

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} q^n}$$

Zbir prvih n uzastopnih članova geometrijskog niza

GEOMETRIJSKI NIZ

GEOMETRIJSKI NIZ je niz n realnih brojeva takvih da je količnik svaka dva uzastopna člana (proizvoljnog i njemu prethodnog) konstantan.

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$

$$\dots$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$\boxed{a_i^2 = a_{i-k} \cdot a_{i+k}}$$

proizvoljni član a_i, $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ je geometrijska sredina dva u odnosu na njega simetrična člana

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} q^n}$$

Zbir prvih n uzastopnih članova geometrijskog niza

Konvergencija niza

Za niz a_n kažemo da **konvergira broju a** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $n_0 \in N$ takav da $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, za svako $n > n_0$. Za niz a_n koji konvergira broju a kažemo, takođe, da ima **graničnu vrijednost** ili **granicu** a i pišemo:

$$a_n \to a, \; n \to \infty \quad \text{ili} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

a čitamo a_n teži a, kad n teži beskonačnosti ili limes a_n, kad n teži beskonačnosti, jednak je a.

Kako $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$, to konvergenciju niza a_n broju a možemo da definišemo i na sledeći način:

Niz a_n **konvergira broju a** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in N$ takvo da je

$$|a_n - a| < \varepsilon, \; \forall n > n_0$$

- Za niz koji ne konvergira nekom broju kažemo da **divergira**.
- Ako za proizvoljni broj $M > 0$ postoji $n_0 \in N$ takvo da je $a_n > M$, $\forall n > n_0$, onda za niz a_n (koji je, očigledno, divergentan jer nije ograničen) kažemo, takođe, da **konvergira plus beskonačnosti** i pišemo

$$a_n \to +\infty,\ n \to \infty \quad \text{ili} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

- Za (divergentan) niz a_n kažemo da **konvergira beskonačnosti** ili da je **beskonačno veliki**, ako za dato $M > 0$ postoji $n_0 \in N$ takvo da je $|a_n| > M$, $\forall n > n_0$. Simbolički:

$$a_n \to \infty,\ n \to \infty \quad \text{ili} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

OPERACIJE SA GRANIČNIM VRIJEDNOSTIMA NIZOVA

Neka su a_n i b_n dva niza koji konvergiraju broju a odnosno b. Tada je niz $a_n + b_n$, ($a_n b_n$, i za $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$, $\dfrac{a_n}{b_n}$) takođe konvergentan i njegova je granica $a + b$ (ab, $\dfrac{a}{b}$).

Dokaz (za zbir)

Iz konvergencije nizova a_n i b_n slijedi da postoje brojevi n_o' i n_o'' takvi da je

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > n_o' \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > n_o''$$

gdje je ε proizvoljan broj. Tada je

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

za svako n veće od n_0' i n_0''. Dakle, za poizvoljno dato $\varepsilon > 0$ postoji broj n_0 (na primjer, $n_0 = \max(n_0', n_0'')$) takvo da je

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0$$

što znači da niz $a_n + b_n$ konvergira ka broju $a + b$

Primjer 1. Ako je a_n niz koji konvergira broju a i $b_n = c$ konstantni niz, onda je

$$\lim_{n\to\infty} c\cdot a_n = \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c\cdot a$$

Primjer 2. Izvlačenjem činioca n^2 iz brojioca i imenioca

niza $a_n = \dfrac{n^2 - 3}{5n^2 + 4n}$ niz a_n postaje količnik dva

konvergentna niza $a_n = \dfrac{1 - \dfrac{3}{n^2}}{5 + \dfrac{4}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 - \dfrac{4}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n}} = \frac{1 - 3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{5 + 4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}} = \frac{1 - 3\cdot 0}{5 + 4\cdot 0} = \frac{1}{5}$$

Neka tvrđenja

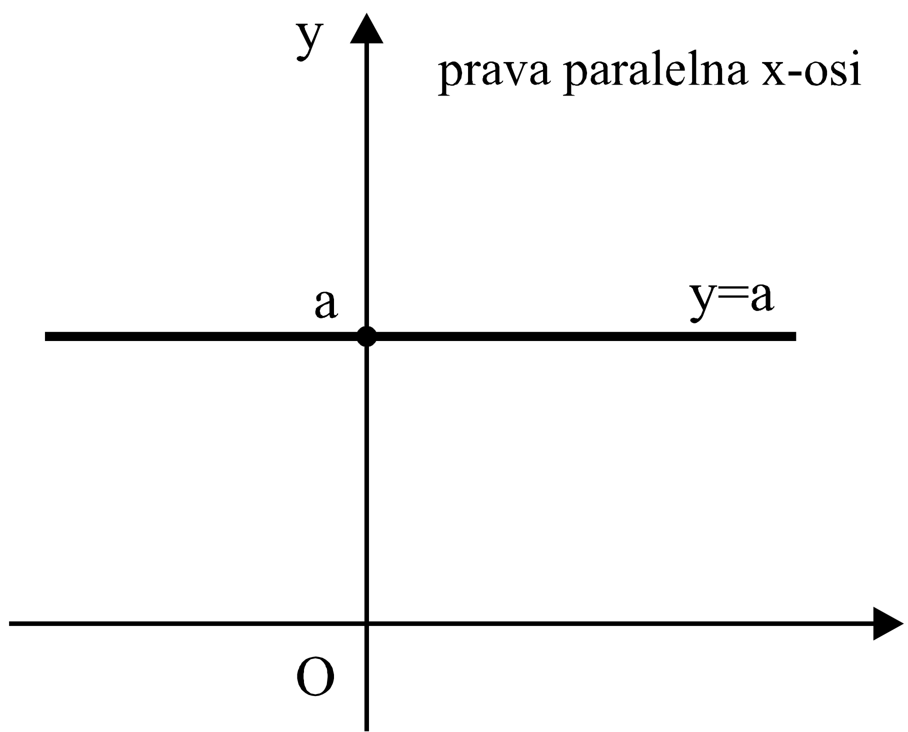
- **Ako niz a_n ima granicu, onda je ta granica jednoznačna**.
- **Svaki konvergentni niz je ograničen**.
- **Svaki ograničeni neopadajući ili nerastući niz konvergira.**

Ojlerov broj e≈2,718

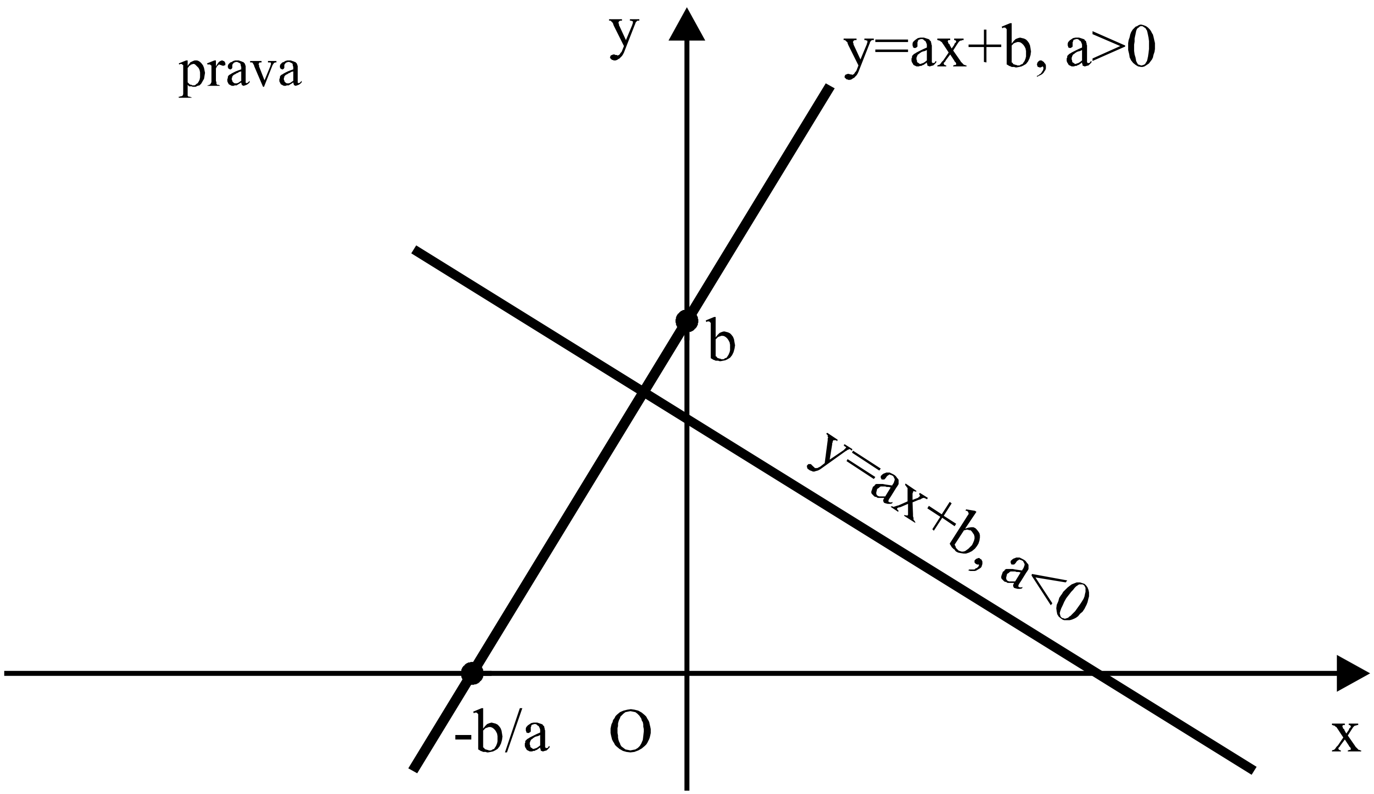
$$e \equiv \lim_{m\to\infty} f(m) = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$$

REALNA FUNKCIJA JEDNE REALNE PROMJENLJIVE

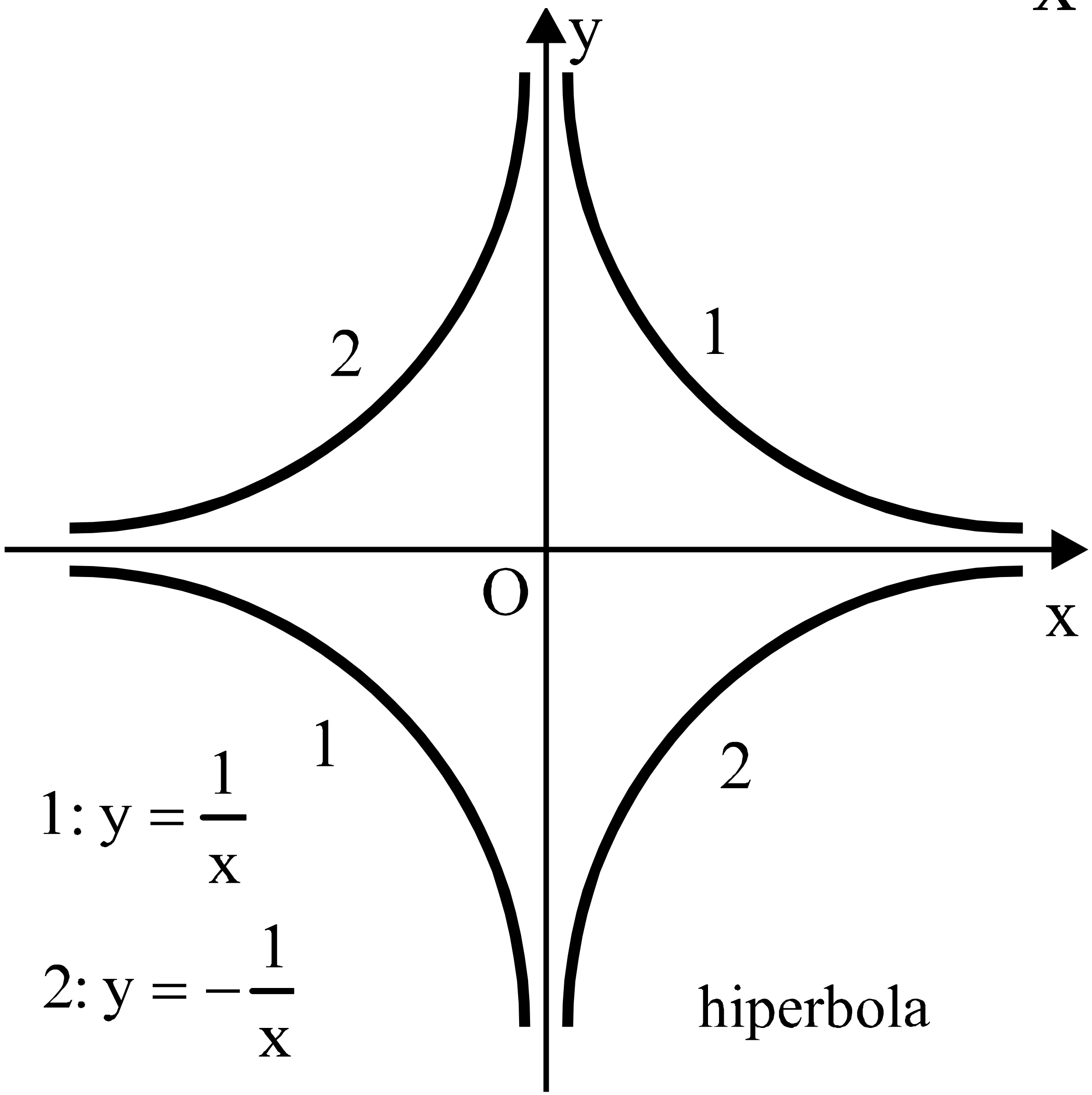
- Domen je $D=(a,b)\subset R$, tj $f:(a, b)\to R$
- **osnovne elementarne funkcije**
- Konstantna funkcija $y = a$, $a \in R$, $D = R$



- Linearna funkcija $y = ax + b$, $a \neq 0$, $D = R$



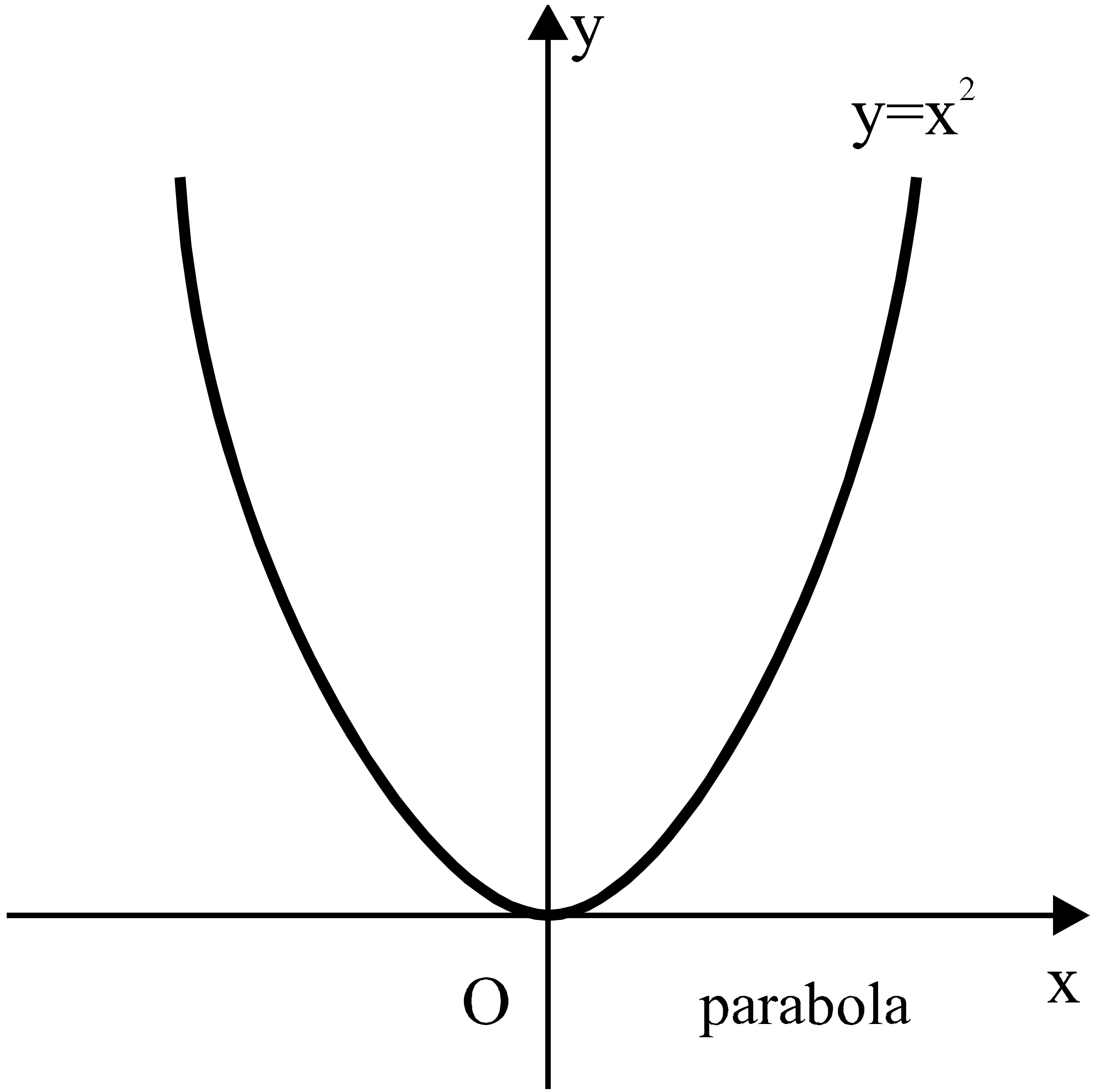
Funkcija obrnute proporcionalnosti , $y = \frac{a}{x}$, D = R\{0}



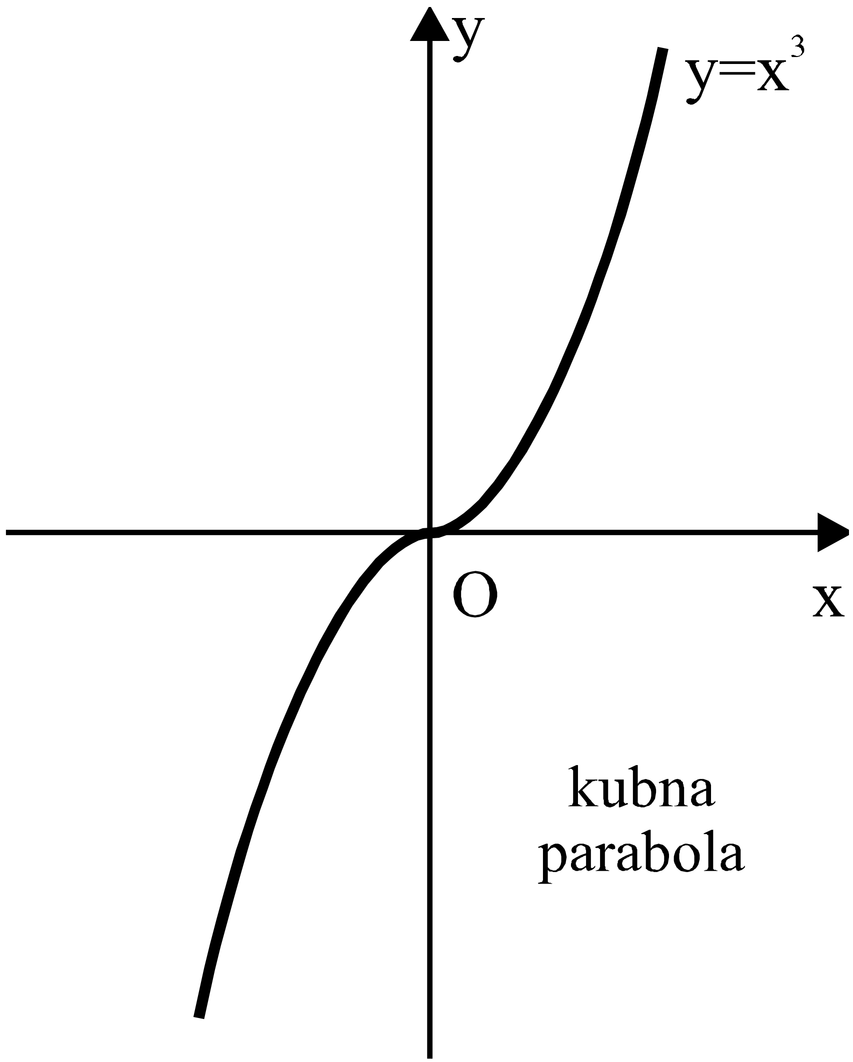
$1: y = \frac{1}{x}$

$2: y = -\frac{1}{x}$

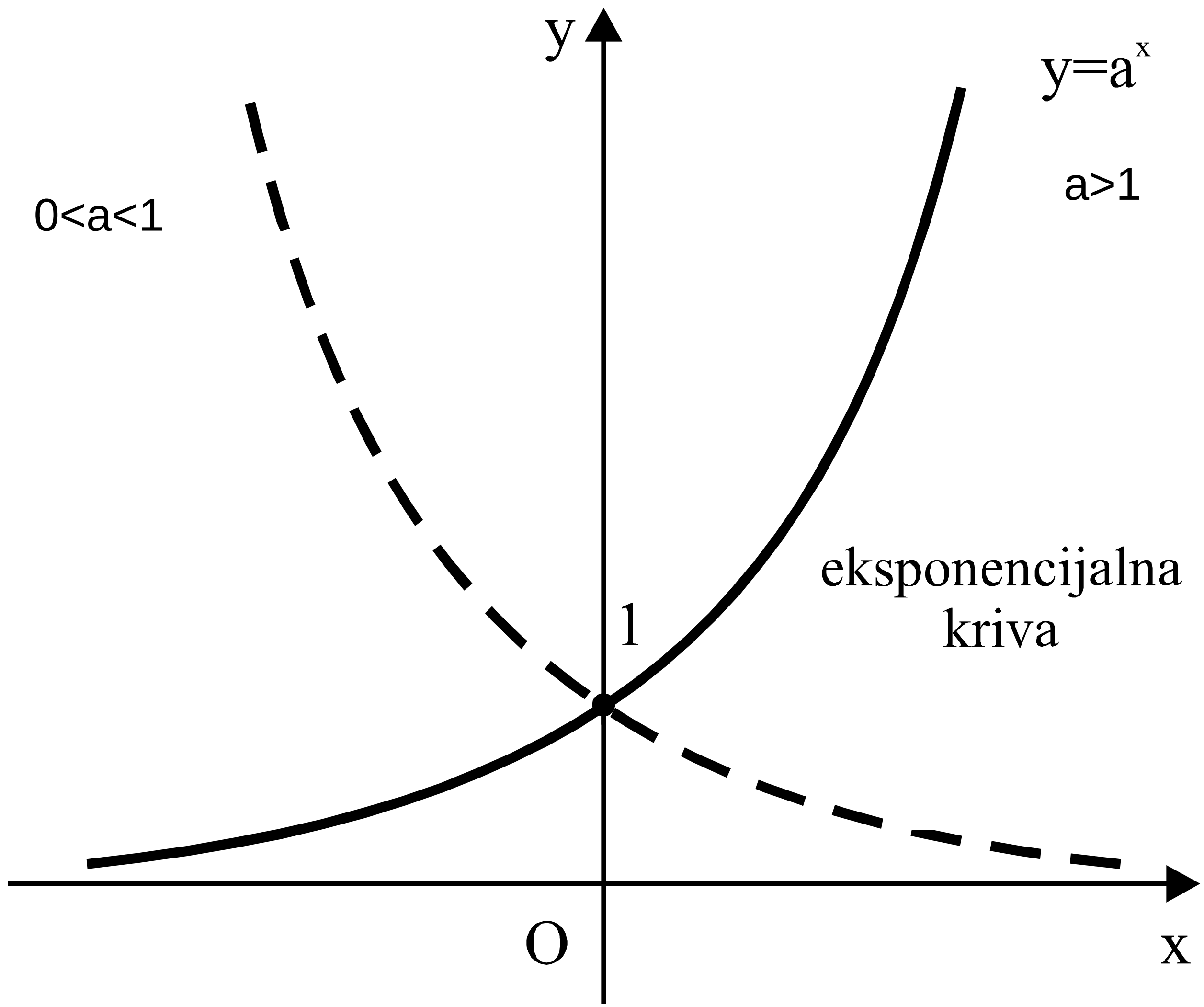
Kvadratna funkcija $y = ax^2$, $D = R$



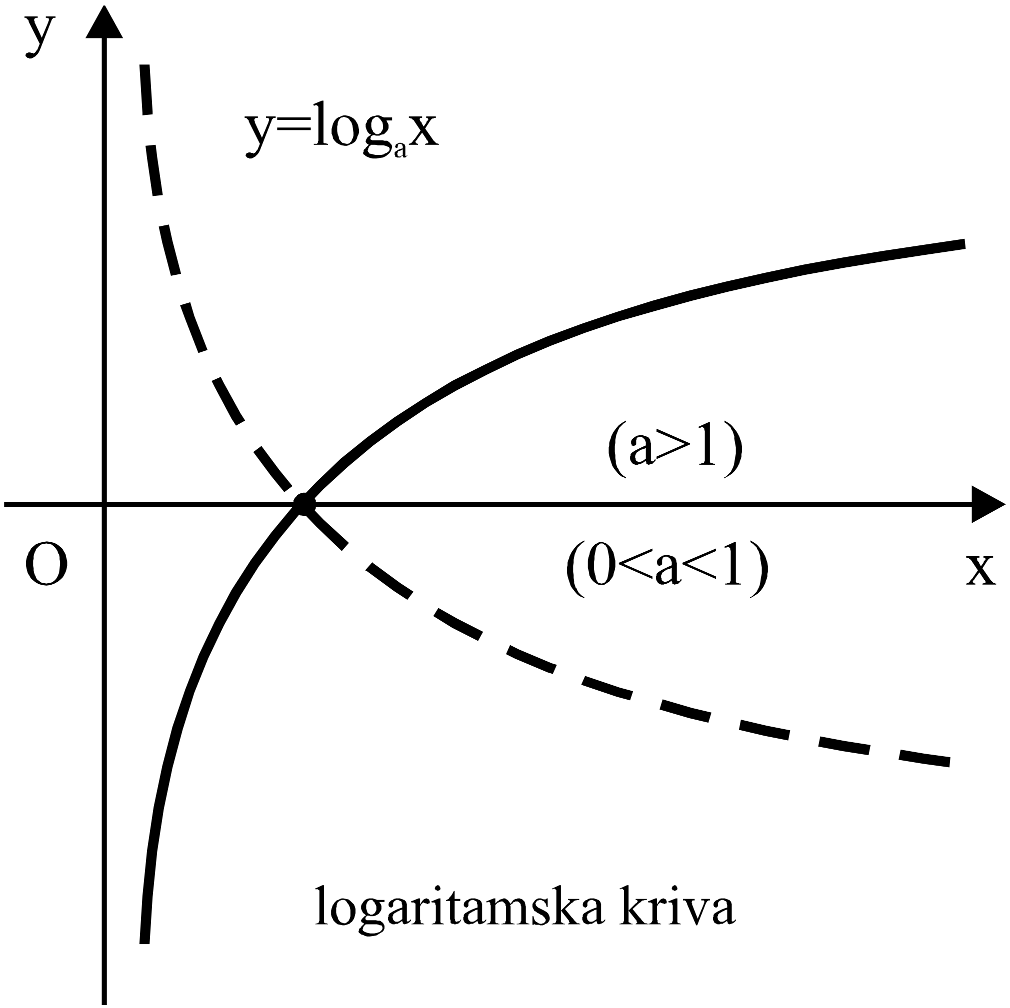
Kubna funkcija $y = x^3$, $D = R$



Eksponencijalna funkcija $y = a^x$, $a \in R^+ \setminus \{1\}$, $D = R$

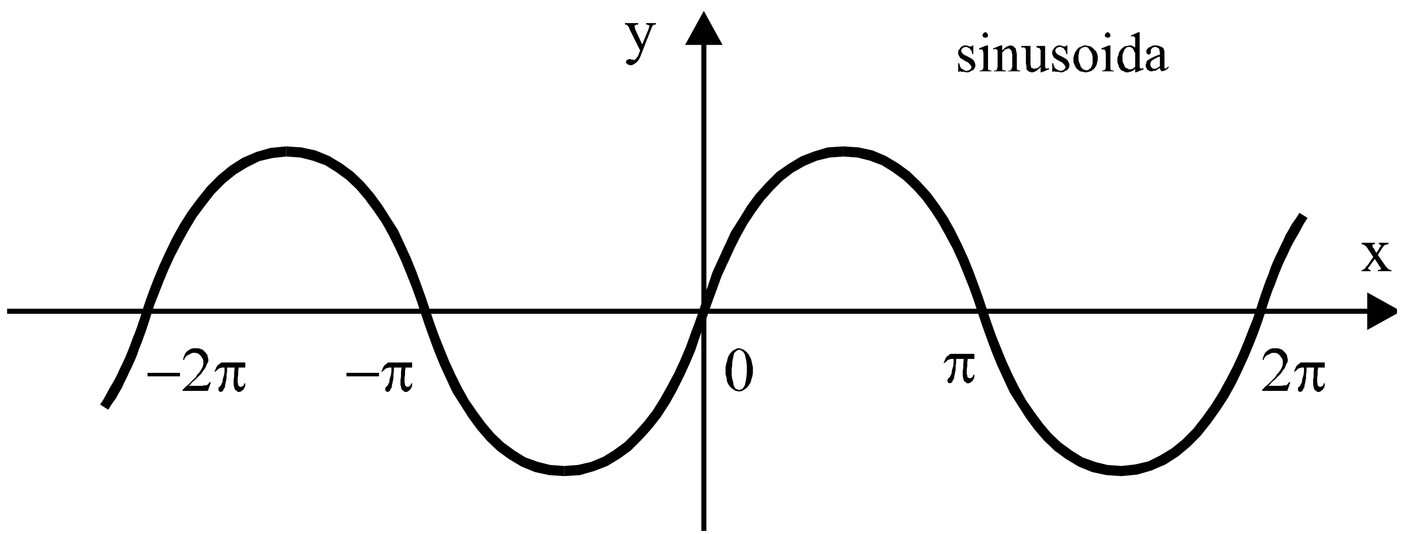


Logaritamska funkcija $y = \log_a x$, $a \in R^+ \backslash \{1\}$, $D = R^+$

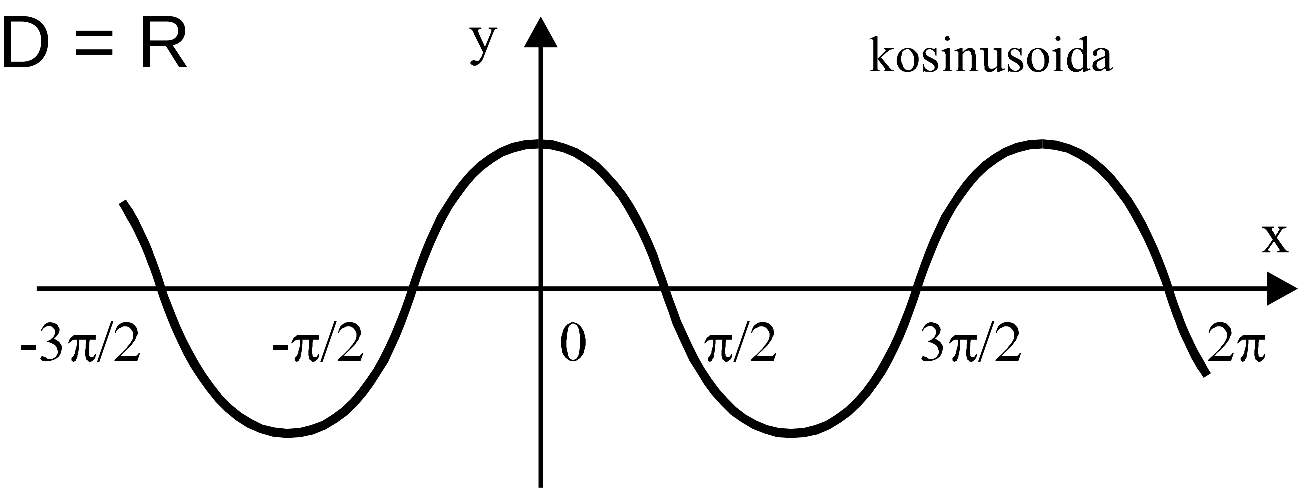


- Trigonometrijske funkcije:

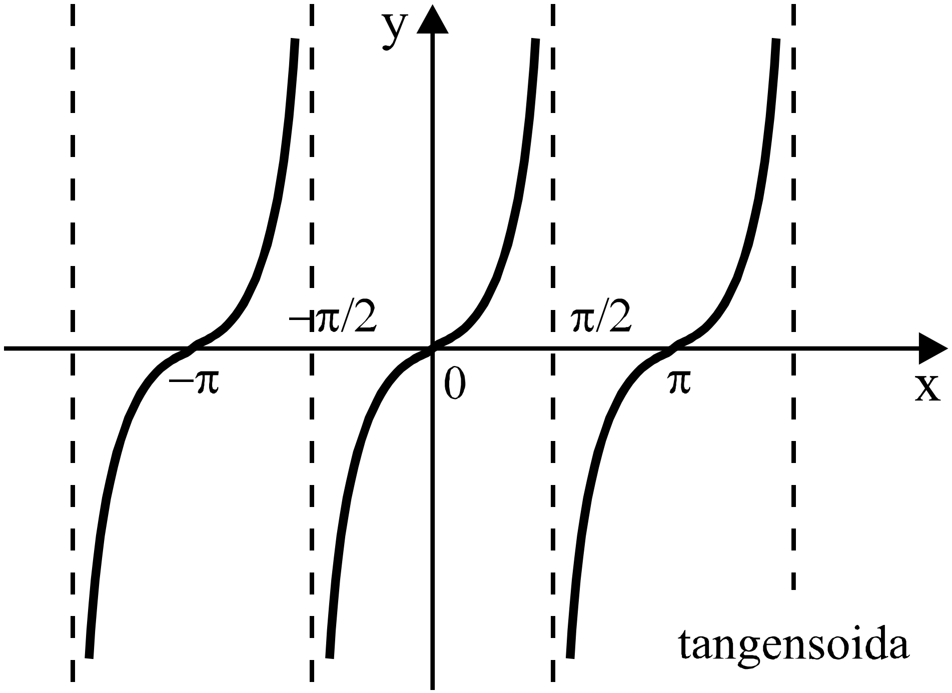
y = sinx, D **= R**

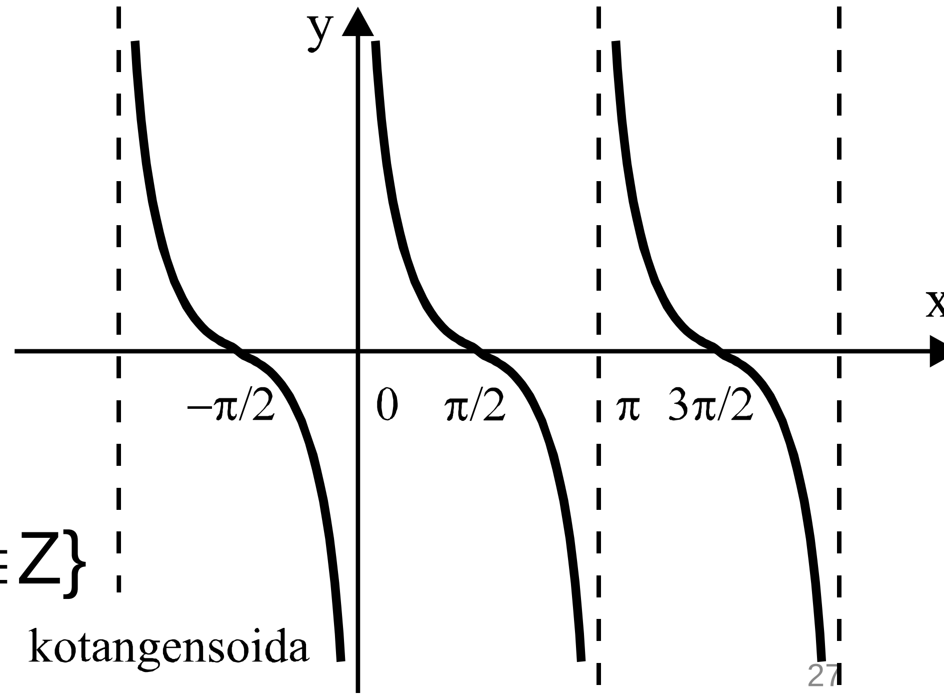


y = cosx, D = R



y = tgx, D = {x∈R | x≠(2k-1)p/2, k∈Z}.

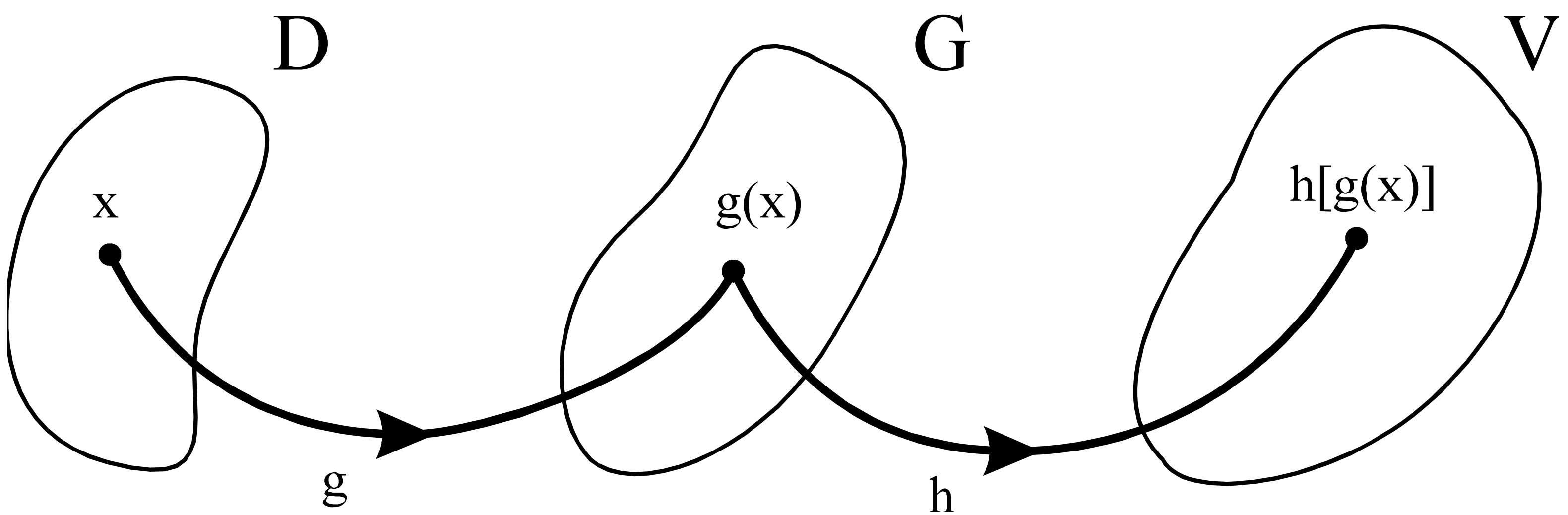




y = ctgx, D = {x∈R | x≠kp, k∈Z}

SLOŽENA FUNKCIJA

Neka je D oblast definisanosti i G skup vrijednosti funkcije g i, dalje, G - oblast definisanosti i V skup vrijednosti funkcije h



Ako je x proizvoljni element skupa D, onda njemu odgovara (tačno) jedan element g(x) skupa G, a ovome (tačno) jedan element h[g(x)] skupa V. Na taj način svakom elementu $x \in D$ odgovara tačno jedan element h[g(x)] skupa V. Preslikavanje $x \rightarrow h[g(x)]$ je, dakle, funkcija čiji je domen D i skup vrijednosti V. Tako određena funkcija, označimo je sa f, zove se **kompozicija** funkcija g i h, oznaka h o g, tj

$$f(x) = (h \circ g)(x) = h[g(x)]$$

Za funkciju f kažemo, također, da je **složena** funkcija argumenta x.

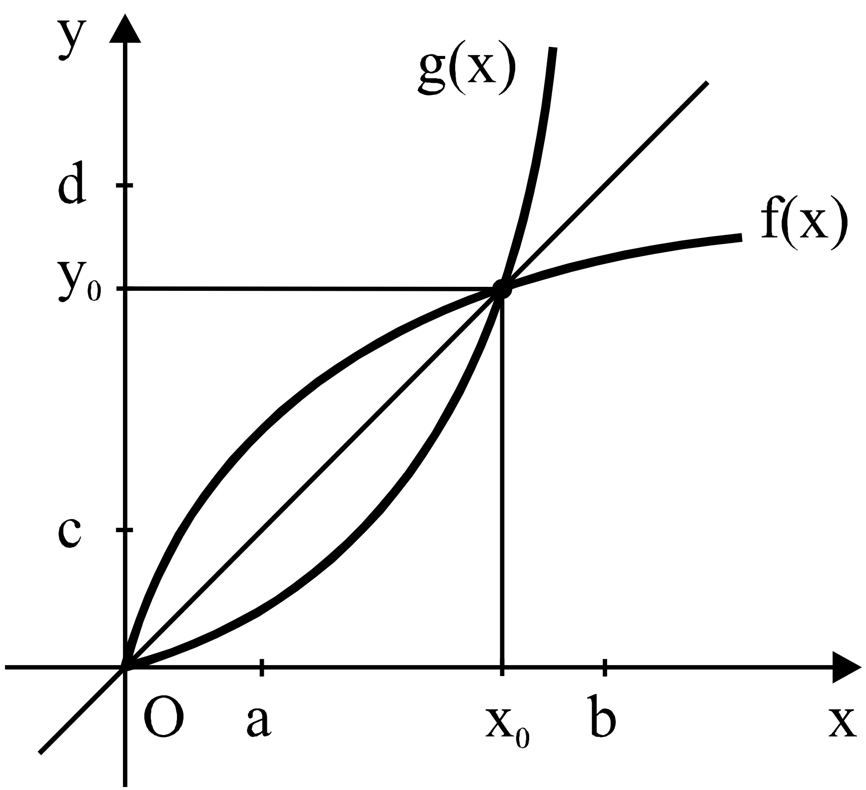
Primjeri

PRIMJER 1. Ako je $g(x) = 2x - 1$ i $h(x) = \log x$, onda je kompozicija funkcija g i h funkcija
$f(x) = (h \circ g)(x) = h[g(x)] = h(2x - 1) = \log(2x - 1)$.

PRIMJER 2. Funkcija $f(x) = (x - 3)^4$ je kompozicija funkcija $g(x) = x - 3$ i $h(x) = x^4$.

INVERZNA FUNKCIJA

Pretpostavimo da je $y = f(x)$ funkcija definisana i monotona na intervalu $D = (a,b)$ i da joj je skup vrijednosti interval $V=(c,d)$ tj. $x \in (a,b) \Rightarrow f(x) \in (c,d)$

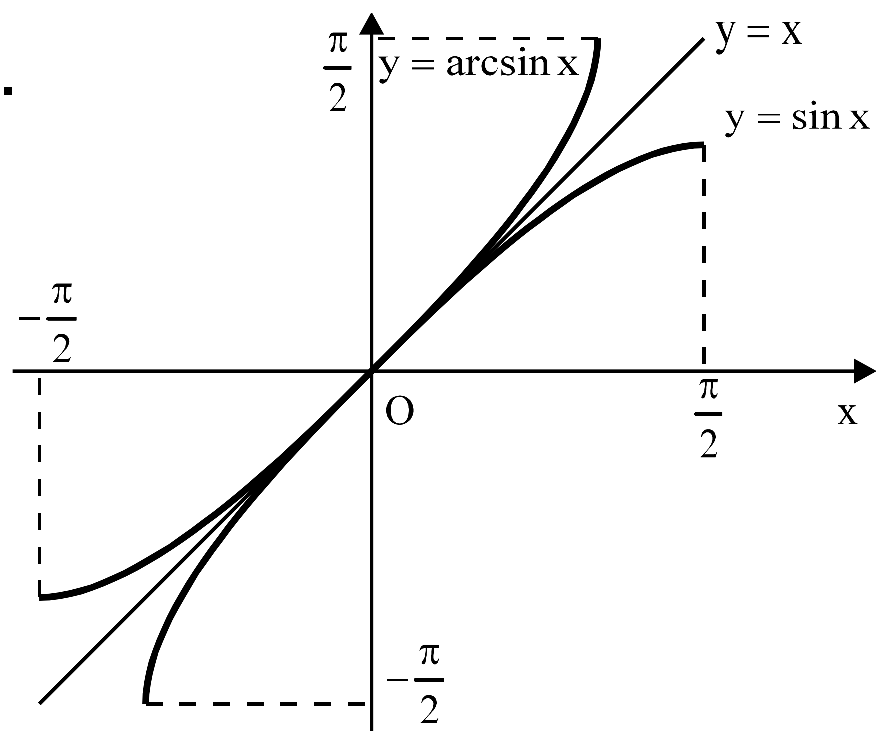


Tada, za svako $y_0 \in (c,d)$, postoji jedno jedino $x_0 \in (c,d)$ takvo da je $y = f(x_0)$. Dakle, postoji funkcija $x = g(y)$ čiji je domen (c,d), skup vrijednosti (a,b) i pri čemu je $f[g(y)] = y$.

Ako, sada, u funkciji g argument označimo sa x, a zavisno promjenljivu sa y dobijamo funkciju y = g(x) za koju kažemo da je **inverzna** funkciji y = f(x). Inverznu funkciju funkcije f označavamo sa f^{-1}.

Iz definicije slijedi da, ako tačka M(x,y) pripada grafiku funkcije y = f(x), onda tačka M_1(y,x) pripada grafiku njoj inverzne funkcije (ukoliko postoji). To znači da su grafici funkcije y = f(x) i njoj inverzne funkcije y = g(x) simetrični u odnosu na pravu y = x.

Primjer 1. Funkcija y = sinx je monotona na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ i njen skup vrijednosti je interval [–1,1], pa postoji funkcija $g:(-1,1)\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ pri čemu svakom y$\in$[–1,1] pridružuemo ono $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ za koje je y = sinx.



GRANIČNA VRIJEDNOST FUNKCIJE

Koristeći pojam granične vrijednosti niza definisaćemo graničnu vrijednost funkcije y = f(x) u datoj tački.
Neka je y = f(x) funkcija definisana u nekoj okolini tačke *a* sem, možda, u samoj tački *a* i

$x_1, x_2, ..., x_n, ...$

proizvoljni niz koji konvergira tački *a* i za koji postoji niz odgovarajućih vrijednosti funkcije, tj. niz

$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$

Ako za svaki takav niz x_n odgovarajući niz vrijednosti funkcije konvergira istom broju A, kažemo da u tački x = *a* funkcija ima graničnu vrijednost A, a pišemo:

$$\underset{x \to a}{f(x)} \to \mathrm{A} \quad \text{ili} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{A}$$

Primjer 1. Uzmimo funkciju $f(x) = x^2$ i tačku $a = 2$. Niz

$$x_n = 2 + \frac{1}{n}$$

konvergira i njegova granica je $a = 2$. Niz odgovarajućih vrijednosti funkcije je

$$\left(2+\frac{1}{1}\right)^2, \left(2+\frac{1}{2}\right)^2, \ldots, \left(2+\frac{1}{n}\right)^2, \ldots \Rightarrow\ 9, \frac{25}{4}, \ldots, \frac{4n^2+4n+1}{n^2}, \ldots$$

(ili $x^2 \to 4$, ako $x \to 2$)

Ovaj niz konvergira i njegova granica je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+4n+1}{n^2} = 4$

Ako uzmemo proizvoljni drugi niz x_n koji konvergira broju 2, onda odgovarajući niz vrijednosti funkcije $f(x_n)$ konvergira broju $A = 4$. Prema tome,

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

Pretpostavimo da funkcija $y = f(x)$ ima sledeću osobinu: za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon)$ takvo da je

$| f(x) - A | < \varepsilon$

za svako $x \neq a$ za koje je $|x - a| < \delta$. Dokazaćemo da, tada, u tački $x = a$ funkcija ima granicu A, tj. da

$f(x_n) \to A$, za svaki niz $x_n \to a$.

Zaista, iz konvergencije niza x_n i navedene (pretpostavljene) osobine funkcije $f(x)$ slijedi da postoji broj n_0 takav da je

$|x_n - a| < \delta$, $n > n_0$

No, tada je i

$|f(x_n) - A| < \varepsilon$, za $n > n_0$

što znači da niz $f(x_n)$ konvergira broju A, odnosno da u tački $x = a$ funkcija ima granicu A.

Dokazuje se i tvrđenje obrnuto prethodnom: ako je $y = f(x)$ funkcija koja u tački $x = a$ ima granicu A onda za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je
$|f(x) - A| < \varepsilon$, za svako x za koje je $|x - a| < \delta$.
Graničnu vrijednost funkcije, zato možemo da definišemo na sledeći način:

Broj A je **granična vrijednost** ili **granica funkcije** f(x) u tački $x = a$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je:
$|f(x) - A| < \varepsilon$, za svako $x \neq a$ za koje je $|x - a| < \delta$.

Primjer 2. Funkcija f(x) = c (=konstanta) u svakoj tački x = a ima granicu A = c jer je za proizvoljno $\varepsilon > 0$
$|f(x) - A| = |c - c| = 0 < \varepsilon$
za svako x iz (proizvoljne) δ-okoline tačke $x = a$, pa je

$$\lim_{x \to a} c = c$$

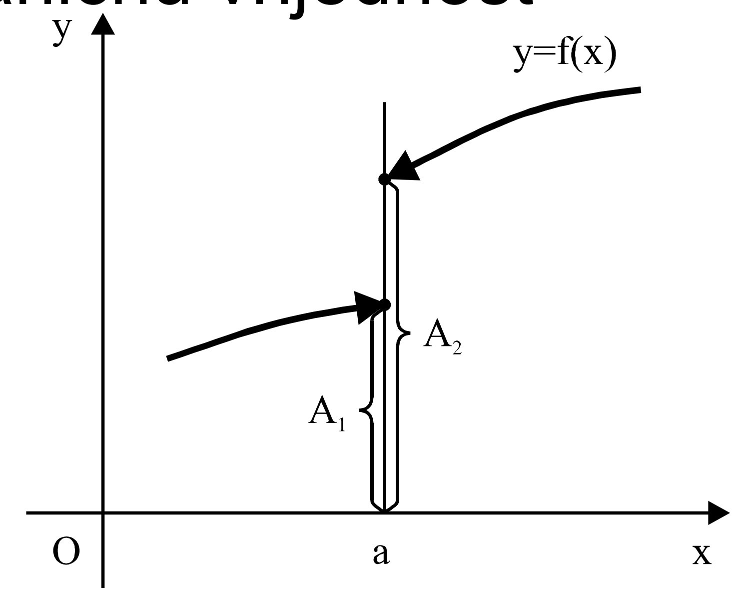
Primjer 3. Funkcija f(x) = x u svakoj tački $x = a$ ima granicu $A = a$ jer je za proizvoljno $\varepsilon > 0$
$|f(x) - A| = |x - a| < \varepsilon, \ \ \forall x: |x - a| < \delta = \varepsilon.$

Pored granične, definišu se i lijeva i desna granična vrijednost funkcije:

Za broj A kažemo da je **desna** granična vrijednost ili **desna** granica funkcije f(x) u tački $x = a$ ako za svaki niz x_n koji konvergira tački a i čiji su članovi veći od a odgovarajući niz vrijednosti funkcije f(x) konvergira broju A. Analogno se definiše **lijeva** granična vrijednost.Za desnu i lijevu graničnu vrijednost koristimo oznake:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A_1$$

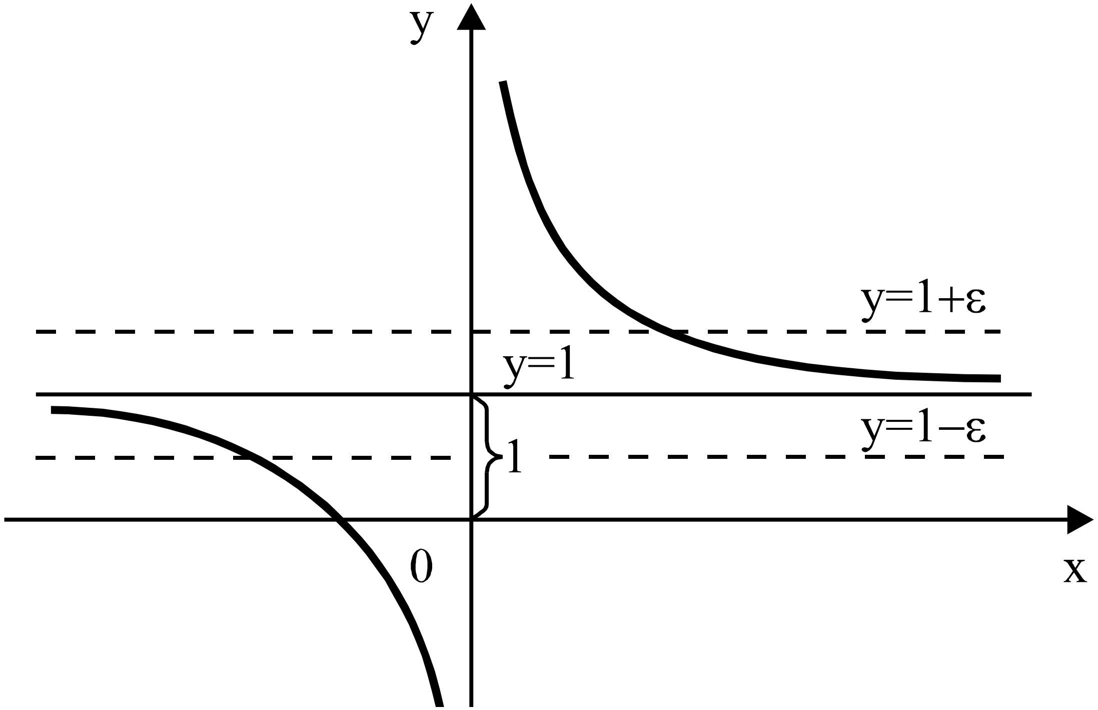
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A_2$$



Primjer 5. Funkcija

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , x<0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$$

u tački $x=0$ ima desnu granicu $A_1=2$ i lijevu granicu $A_2=0$



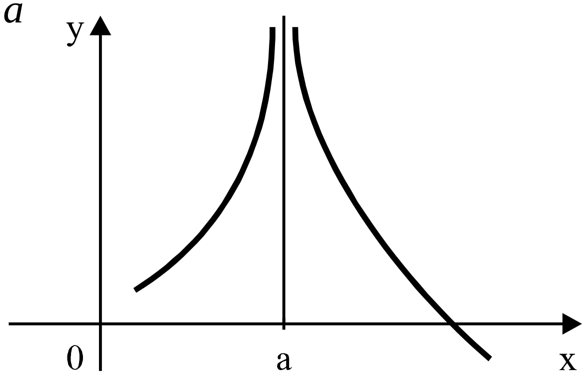
Ako je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ ili $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

onda se prava y = A zove **horizontalna asimptota** grafika funkcije f(x).

Vertikalna asimtota

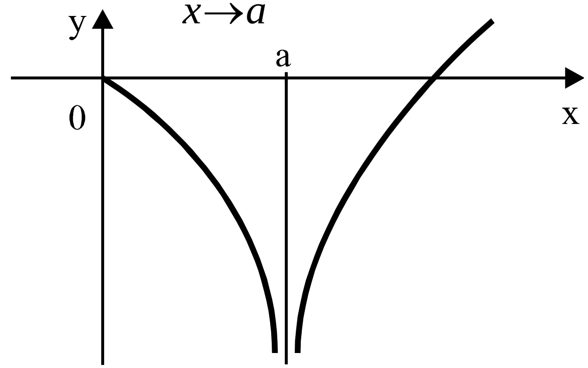
Ako je funkcija f(x) kad x$\to$a ili x $\to$ a+0, ili x $\to$ a-0, beskonačno velika veličina, onda se prava x = a zove **vertikalna asimptota** grafika te funkcije. Iz definicija granične vrijednosti i vertikalne asimptote slijedi da grafik funkcije može da ima vertikalnu asimptotu x = a samo ako je tačka a kraj otvorenog intervala na kome je funkcija definisana.

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$



$$x \to a \Rightarrow f(x) \to \infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$



$$x \to a \Rightarrow f(x) \to -\infty$$

Slično za x $\to$ a+0, ili x $\to$ a-0

NEDOREĐENI IZRAZI

Granične vrijednosti izraza $\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} \quad \frac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}$

gdje su $\alpha_1(x)$ i $\alpha_2(x)$ beskonačno male, a $\beta_1(x)$ i $\beta_2(x)$ beskonačno velike veličine kad $x \to a$ pripadaju klasi tzv. neodređenih izraza.

Naime, označimo li, uslovno, sa “0” beskonačno malu, a sa “∞” beskonačno veliku pozitivnu veličinu i sa “1” funkciju čija je granica 1, kad $x \to a$, onda se izrazi oblika

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0}$$

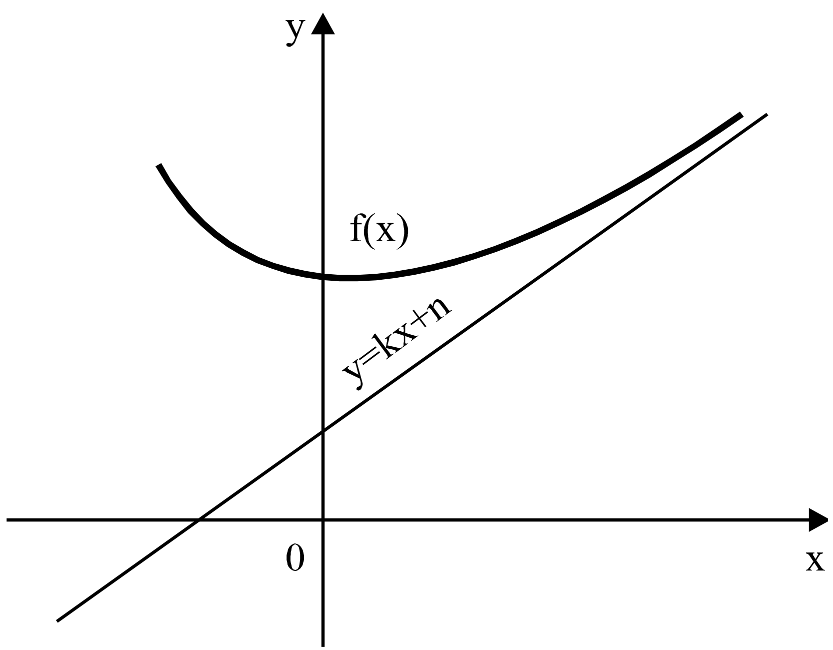
zovu **neodređeni izrazi kad $x \to a$**.

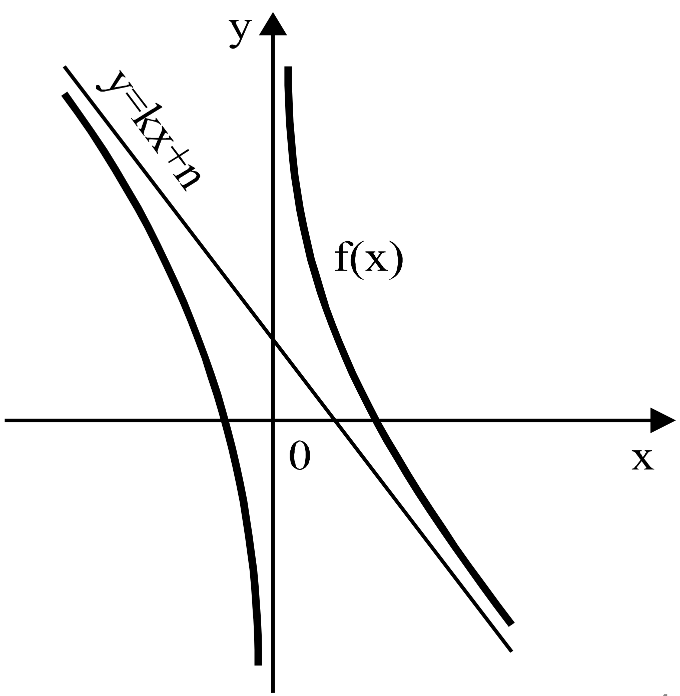
KOSA ASIMPTOTA

Za pravu y = kx + n kažemo da je **kosa** asimptota grafika funkcije y = f(x) ako je
lim[f(x) - (kx + n)] = 0, kad $x \to +\infty$ ili $x \to -\infty$

Odavde

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \ \text{ i } n = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right]$$





Teoreme

T1. Ako su f(x) i g(x) funkcije koje u tački $x = a$ imaju granice A i B, onda i funkcije $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ i (ako je u nekoj okolini tačke a $g(x) \neq 0$ i $B \neq 0$), $\frac{f(x)}{g(x)}$

imaju granične vrijednosti u tački $x = a$ i te granične vrijednosti su, redom $A \pm B$, $A \cdot B$, $\frac{A}{B}$

T2. Ako funkcije $f(x)$ i $g(x)$ u tački $x = a$ imaju istu granicu A i ako je $h(x)$ funkcija za koju u nekoj okolini tačke a važe nejednakosti

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

onda i funkcija $h(x)$ u tački $x = a$ ima granicu A.

NEPREKIDNOST FUNKCIJE

Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da je **neprekidna u tački $x = x_0$**, ako u toj tački ima graničnu vrijednost i ako je ta granična vrijednost jednaka vrijednosti funkcije u tački x_0, tj. ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Za tačku u kojoj funkcija nije neprekidna, a u čijoj je nekoj okolini definisana, kažemo da je tačka **prekida** funkcije.

Primjeri

- Primjer 1. Funkcija $f(x) = 2x + 3$ je neprekidna u svakoj tački $x_0 \in R$ jer je definisana u nekoj (čak svakoj) okolini te tačke i, pritom,

$$\lim_{x \to x_0}(2x+3) = 2x_0 + 3 = f(x_0)$$

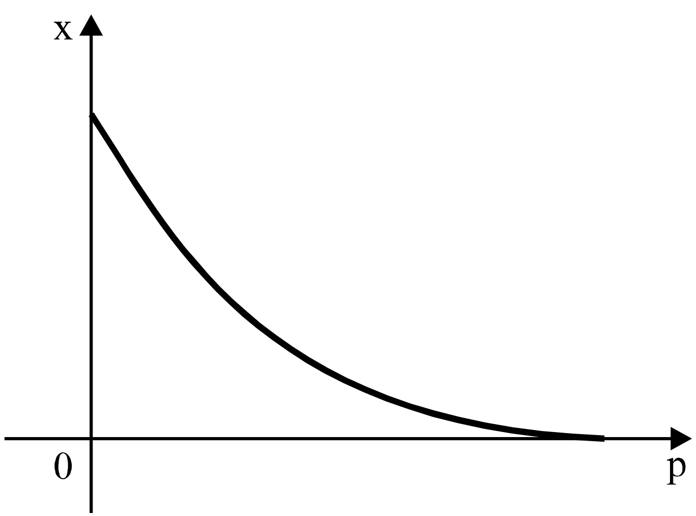
Primjer 2. Funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$

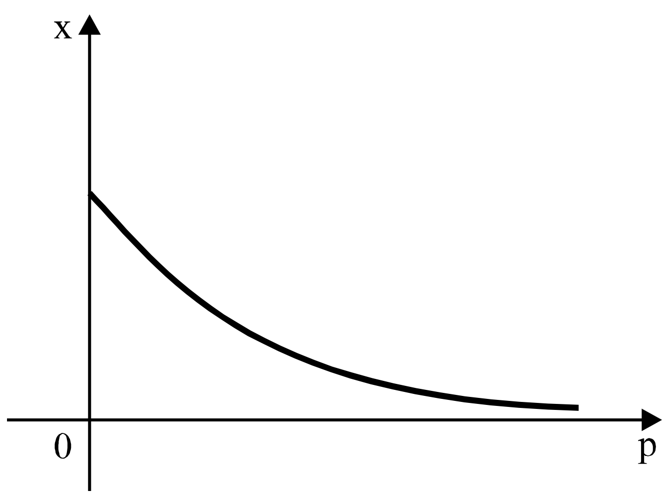
u tački $x = 2$ nema graničnu vrijednost (ima samo lijevu i desnu), pa u toj tački, dakle, nije neprekidna.

Ekonomske funkcije

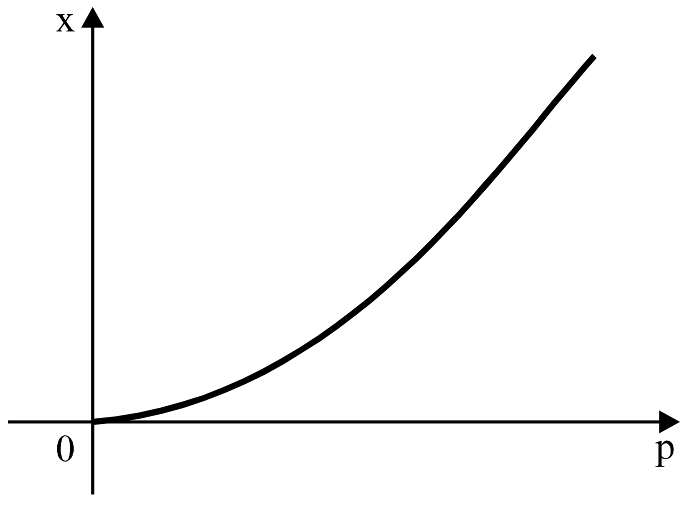
- Osnovne ekonomske veličine (kategorije)
- Cijena
- Tražnja
- Ponuda
- Proizvodnja
- Prihod
- Troškovi
- Dobit

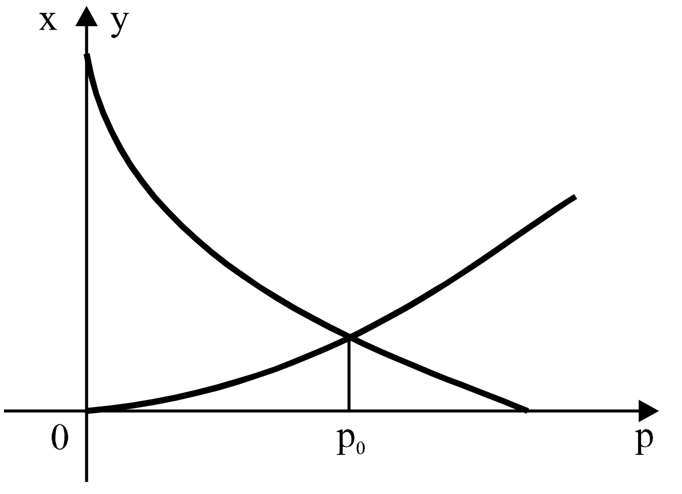
- Pretpostavka
- sa rastom cijene tražnja opada; najveću vrijednost, max, ima pri cijeni p = 0, dok najmanju vrijednost dostiže ili nedostiže zavisno od toga da li je u pitanju luksuzni proizvod (cigareta, automobil) ili proizvod od vitalnog značaja (hljeb, lijek)





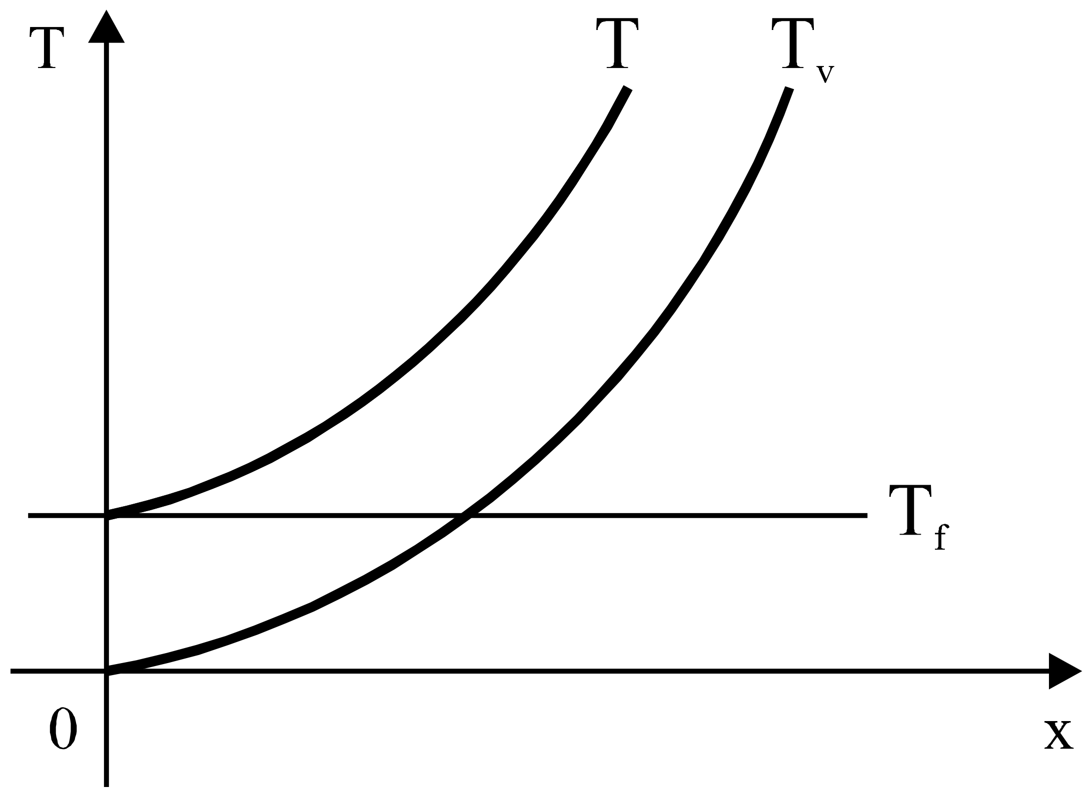
- Ponuda sa cijenom raste. Proizvod se nudi pri cijeni pri kojoj se traži, pa su oblasti definisanosti ponude i tražnje iste.





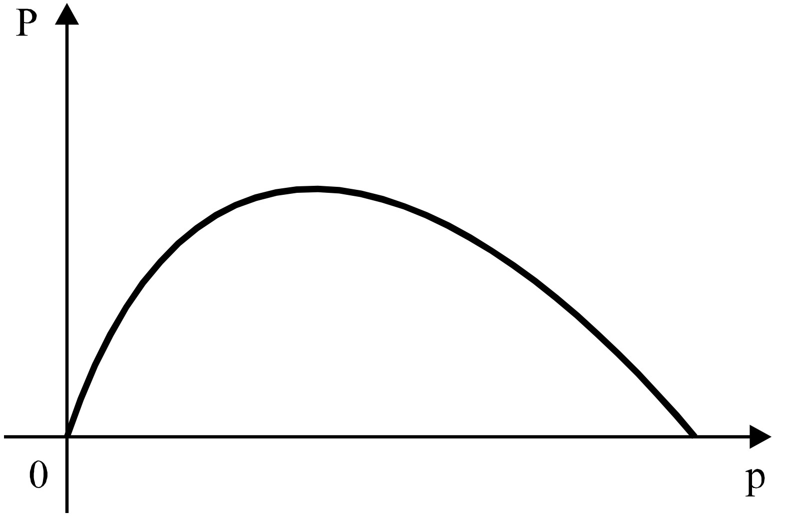
Iz pretpostavke o neprekidnosti funkcije tražnje i ponude nekog proizvoda i monotonosti tih funkcija slijedi da postoji neka vrijednost p_0 argumenta p za koju se te funkcije izjednačavaju. Tu vrijednost argumenta p zovemo **ravnotežnom cijenom**.

- Troškovi T rastu sa proizvodnjom. Pri proizvodnji x = 0 troškovi takođe postoje (na primjer, zbog amortizacije) i te troškove zovemo **fiksnim** (oznaka T_f) za razliku od **varijabilnih** T_v nastalih zbog proizvodnje. (Ukupni) troškovi su zbir fiksnih i varijabilnih troškova

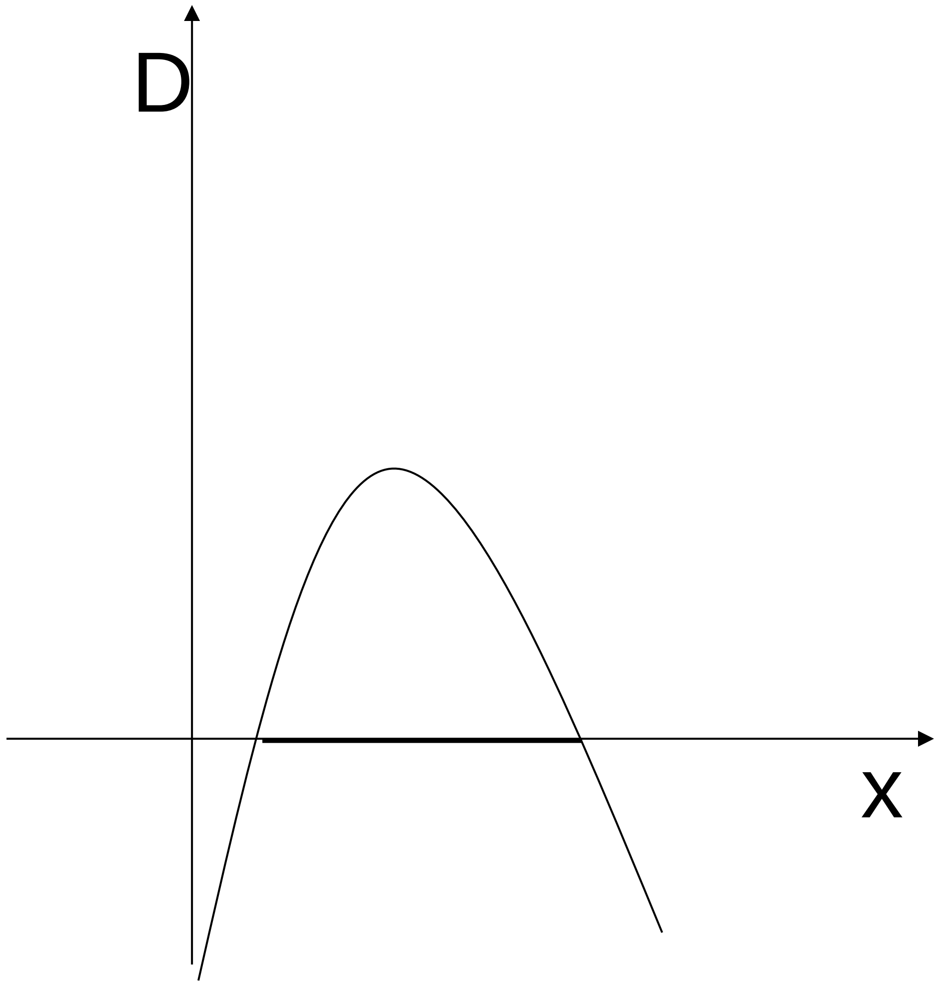


- **Prosječni troškovi** pri proizvodnji x su troškovi po jedinici proizvodnje: $$\overline{T} = \frac{T}{x}$$

Prihod je jednak proizvodu cijene i tražnje (proizvodnje). Pretpostavljamo da, do određene cijene, prihod raste, a zatim opada. Pri cijeni p = 0 i prihod je P = 0



- Dobit D(x) pri proizvodnji x je razlika odgovarajućih prihoda i troškova: D(x) = P(x) - T(x).



Interval proizvodnje na kome je dobit pozitivna zove se **interval rentabiliteta**, a njegovi krajevi su **donja** i **gornja** granica rentabiliteta.