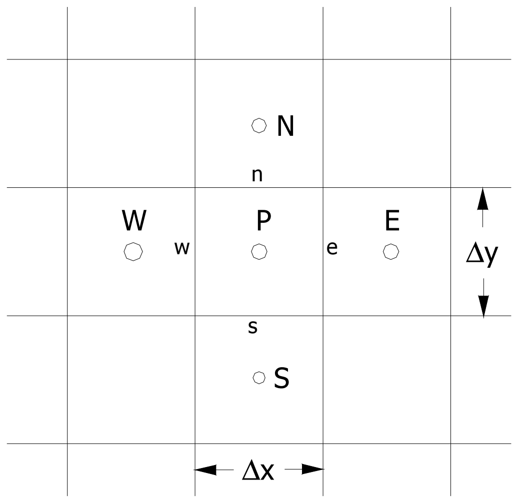
POGLAVLJE 10.

10.1 Strujanje fluida – uvodne napomene

U prethodnoj glavi razmatrano je rješavanje transportne jednačine sa konvekcijom, ali kada je poznato strujno polje. Ovakva situacija je veoma rijetka u praksi s obzirom da je strujno polje tijesno povezano sa procesima razmjene toplote, tj. može biti izazvano temperaturnim i koncentracionim gradijentima u fluidu. U ovom poglavlju biće razmatrane jednačine pomoću kojih se vrši određivanje strujnog polja (polja brzina i polja pritiska), koje su u literaturi poznate kao Navier – Stokes – ove jednačine. One imaju formu transportnih jednačina sa nestacionarnim, konvektivnim, difuzionim i slobodnim članom. Međutim, pored njih u njima figuriše i gradijent pritiska koji predstavlja nepoznatu veličinu pa je za njegovo određivane potrebna dodatna jednačina da bi sistem jednačina bio zatvoren za rješavanje. Za određivanje polja pritiska koristi se jednačina kontinuiteta kao dodatna jednačina. Ona služi i kao kontrolna tačka za provjeru rješenja s obzirom da je suština metode kontrolisane zapremine da bilansi mase i svih transportnih veličina moraju biti očuvani na nivou kontrolisane zapremine. Određivanje strujnog polja je složeno jer su momentna i jednačina kontinuiteta spregnute jednačine pa se tako moraju i tretirati prilikom diskretizacije i rješavanja. U nastavku će biti prikazan postupak diskretizacije jednačina za opisivanje strujanja i jednačine kontinuiteta za nestišljive fluide.

10.2 Diskretizacija momentne jednačine

Razmotrimo za početak dvodimenzionu kvadratnu mrežu prikazanu na slici 6.1.



Slika 10.1 Kvadratna dvodimenzionalna mreža

Pretpostavimo za početak da se vektor brzine V i pritiska p sračunava (smješta) za kontrolisanu zapreminu tj. ćeliju. Takodje za početak posmatrajmo tzv. Newton – ovske fluide, i stacionarno strujanje. Momentna jednačina za x i y pravac ima oblik:

$$\nabla(\rho \cdot V \cdot u) = \nabla(\mu \nabla u) - \nabla p \cdot i + S_u \,, \tag{10.1}$$

$$\nabla(\rho \cdot V \cdot v) = \nabla(\mu \nabla v) - \nabla p \cdot j + S_v \,. \tag{10.2}$$

U jednačinama 6.1 i 6.2 tenzor napona je podijeljen na dio koji predstavlja normalni napon koji se pojavljuje u difuzionom članu, a ostatak je u članovima S_u i S_v. Ova dva člana imaju generalni oblik:

$$S_u = f_u + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\mu \nabla V), \tag{10.3}$$

$$S_v = f_v + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\mu \nabla V). \tag{10.4}$$

U poslednje dvije jednačine f_u i f_v predstavljaju zapreminske sile u x i y pravcu. Jednačine 10.1 i 10.2 imaju generalni oblik transportne jednačine, osim što na desnoj strani jednačina postoji gradijent pritiska. Svaka momentna jednačina obično se piše tako da se posebno istaknu difuzioni član, gradijent pritiska i izvorni član. Ostatak predstavlja ostatak koji preostaje od tenzora napona.

Razmotrimo za početak gradijent pritiska. Prilikom razvoja diskretnog oblika jednačine potrebno je izvršiti diskretizaciju ovog člana po kontrolisanoj zapremini. Primjenom Gausove teoreme o vezi površinskog i zapreminskog integrala važi:

$$\int_{\Delta V} \nabla p dV = \int_{A} p dA, \tag{10.5}$$

pa ako se podrazumijeva da na svakoj strani zapremine postoji tzv. površinska vrijednost važi:

$$\int_{A} p dA = \sum_{f} p_f A_f \ . \tag{10.6}$$

Vektori površina na stranama kontrolisane zapremine su:

$$\begin{aligned} A_e &= \Delta y \cdot i \\ A_w &= -\Delta y \cdot i \\ A_n &= \Delta x \cdot j \\ A_s &= -\Delta x \cdot j \end{aligned} \ . \tag{10.7}$$

Sada se konačno može napisati član koji predstavlja gradijent pritiska u jednačini (10.1):

$$-i \cdot \int_{\Delta V} \nabla p dV = -i \cdot \sum_{f} p_f A_f \ , \tag{10.8}$$

pa se primjenom jednačine 6.7 dobija:

$$-i \cdot \sum_{f} p_f A_f = (p_w - p_n)\Delta x, \tag{10.9}$$

a analagno se za gradijent u y pravcu dobija:

$$-j \cdot \sum_{f} p_f A_f = (p_s - p_n)\Delta x. \tag{10.10}$$

Kada se izvrši kompletna diskretizacija polaznih jednačina (10.1) i (10.2) dobijaju se diskretizovani izrazi:

$$\begin{aligned} a_P u_P &= \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_u + (p_w - p_e)\Delta y \\ a_P v_P &= \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + b_v + (p_s - p_n)\Delta x \end{aligned} \ . \tag{10.11}$$

Sledeći korak u rješavanju je odredjivanje pritisaka na granicama kontrolisanih zapremina p_e, p_w, p_s i p_n. Ako se uzme najprostija linearna aproksimacija za odredjivanje vrijednosti na granicama:

$$p_e = \frac{p_E + p_P}{2}$$
$$p_w = \frac{p_W + p_P}{2}$$
$$p_n = \frac{p_N + p_P}{2} \; , \tag{10.12}$$
$$p_s = \frac{p_S + p_P}{2}$$

izrazi u jednačinama 10.9 i 10.10 dobijaju oblik:

$$\begin{aligned} (p_w - p_e)\Delta y &= (p_W - p_E)\Delta y \\ (p_s - p_n)\Delta x &= (p_S - p_N)\Delta y \end{aligned} \; . \tag{10.13}$$

Sa poznatim poljem pritiska moguće je riješiti jednačine 10.11. Kako bilo pritisak se mora prethodno izračunati iz dodatne jednačine, a već je naprijed rečeno da je to jednačina kontinuiteta.

10.3 Diskretizacija jednačine kontinuiteta

Jednačina kontinuiteta za slučaj stacionarnog slučaja ima oblik:

$$\nabla(\rho \cdot V) = 0 \, , \tag{10.14}$$

pa se integracijom ove jednačine po kontrolisanoj zapremini dobija:

$$\int_{\Delta V} \nabla(\rho \cdot V) dV = \int_A \rho V dA \, . \tag{10.15}$$

Ako se kao i ranije smatra da su vrijednosti na površinama vrijednosti u centrima njihovih površina:

$$\int_{\Delta V} \nabla(\rho \cdot V) dV = \sum_f (\rho V)_f A_f \; . \tag{10.16}$$

Ako se uzme da je vektor brzine V=ui+vj i ako se znaju vrijednosti vektora površina iz jednačine 10.7 dobija se diskretizovani oblik jednačine kontinuiteta:

$$(\rho u)_e \Delta y - (\rho u)_w \Delta y + (\rho v)_n \Delta x - (\rho v)_s \Delta x = 0 . \tag{10.17}$$

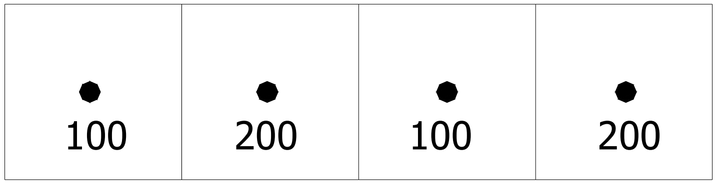
Ako se kao i ranije pretpostavi linearna aproksimacija za određivanje vrijednosti brzina na površinama kontrolisane zapremine u obliku:

$$\begin{aligned}
(\rho u)_e &= \frac{(\rho u)_P + (\rho u)_E}{2} \\
(\rho u)_w &= \frac{(\rho u)_P + (\rho u)_W}{2} \\
(\rho v)_n &= \frac{(\rho v)_P + (\rho v)_N}{2} \\
(\rho v)_s &= \frac{(\rho v)_P + (\rho v)_S}{2}
\end{aligned} . \tag{10.18}$$

pa se smjenom jednačina 10.18 u jednačinu 10.17 dobija konačan oblik diskretizovane jednačine kontinuiteta u obliku:

$$(\rho u)_E \Delta y - (\rho u)_W \Delta y + (\rho v)_N \Delta x - (\rho v)_S \Delta x = 0 . \tag{10.19}$$

Iz poslednje jednačine se lako zaključuje da vrijednost brzine u kontrolisanoj zapremini P ne figuriše u jednačini kontinuiteta za zapreminu P, što može dovesti do apsurdne situacije da je jednačina kontinuiteta zadovoljena za slučaj koji je prikazan na slici 10.2. Tako je na primjer brzina u u drugoj zapremini 200, dok je u njoj susjednima vrijednost 100, što je apsurdno jer je jednačina kontinuiteta formalno zadovoljena za prvu kontrolisanu zapreminu. Takodje, vrijednosti pritiska nisu aprori poznati pa se sračunavanjem mogu desiti slučajevi koji su prikazani na slici 10.2. Druga mana ove sheme je što se na primjer za brzinu u posmatra interval 2Δx u jednačinama 10.13 i takodje ne uzima u obzir pritisak u tački P. Isti zaključak važi i za y pravac. Sa slike 10.2 se vidi da se može desiti apsurd da se uniformno polje pritiska ne razlikuje faktički od polja pritiska prikazanog na slici, u smislu njegovog uticaja na polje brzina u. Zbog svega navedenog jednačina kontinuiteta u obliku prikazanom jednačinom (10.19) praktično se ne koristi već se mora pisati za kontrolisanu zapreminu ponaosob, što će biti prikazano u nastavku.



Slika 10.2 Polje brzina primjenom jednačine 10.19

10.4 Pomjerena mreža

Jedna od najpopularnijih metoda za prevazilaženje prethodnog problema je primjena tzv. pomjerene numeričke mreže koja je prikazana na slici 6.3. Potrebno je odmah naglasiti da se pravi razlika između nepomjerenih i pomjerenih zapremina. Pritisak se sračunava za nepomjerene zapremine dok se vrijednosti brzina sračunavaju za pomjerene što znači da se praktično brzine sračunavaju na stranicama nepomjerene mreže. Skalarne veličine kao što su entalpija, koncentracija i sl. Uvijek se sračunavaju za nepomjerenu mrežu. Fizičke osobine fluida kao što su koeficijent difuzije Γ i gustina ρ sračunavaju se za elemente nepomjerene mreže. Diskretizacijom jednačine kontinuiteta po zapremini dobija se jednačina:

$$(\rho u)_e \Delta y - (\rho u)_w \Delta y + (\rho v)_n \Delta x - (\rho v)_s \Delta x = 0 . \qquad (10.20)$$

Što se tiče brzina nikakva dalja interpolacija nije potrebna, već će one biti sračunate na granicama nepomjerene mreže. Za momentnu jednačinu pomjerena mreža služi za diskretizaciju momentne jednačine. Procedura za diskretizaciju je slična kao u prethodnom poglavlju, osim što se član koji se odnosi na gradijent pritiska mora tretirati posebno, bez intepoliranja kao u jednačini 10.12. Tako na primjer za jednačinu kojom se sračunava u_e gradijent pritiska sračunava kao:

$$(p_P - p_E)\Delta y , \qquad (10.21)$$

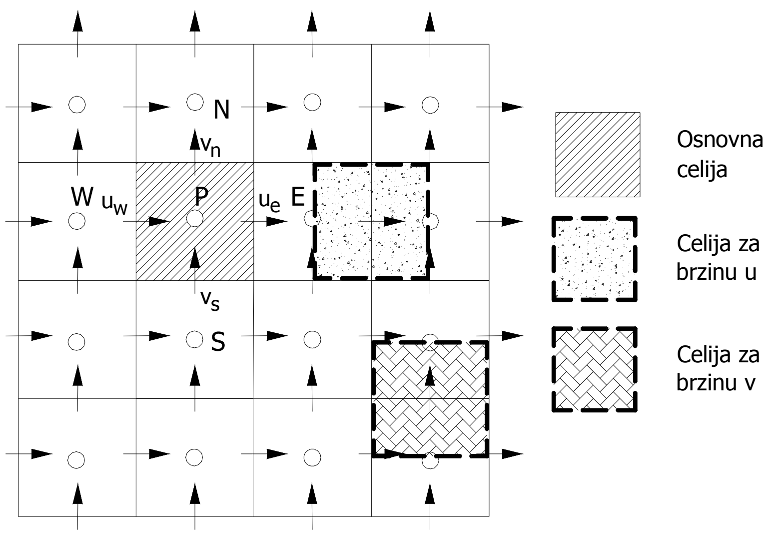
dok se slično za određivanje vrijednosti brzine v_n gradijent pritisak sračunava kao:

$$(p_P - p_N)\Delta x . \qquad (10.22)$$

Kao što se vidi u ovakvoj shemi nema više zavisnosti pritiska od dužine skale 2Δx. Numerička mreža za sračunavanje brzine u je pomjerena u desno za Δx/2, dok je mreža za brzinu v pomjerena za Δy/2 na više. Kao što se može lako uočiti pomjerena i nepomjerena mreža se djelimično preklapaju ali bez ikakvih konsekvenci na proces iterativnog rješavanja. Maseni konvektivni fluksevi kroz granice kontrolisane zapremine se računaju na osnovu brzina na granicama:

$$\begin{aligned} F_e &= (\rho u)_e \Delta y \\ F_w &= (\rho u)_w \Delta y \\ F_n &= (\rho v)_n \Delta x \ , \\ F_s &= (\rho v)_s \Delta x \end{aligned} \tag{10.23}$$

što je pogodno s obzirom da se ove vrijednosti koriste za sračunavanje koeficijenata u transportnim jednačinama sa skalarnom funkcijom ϕ.



Slika 10.3. Koncept pomjerene mreže

10.4.1 Neke bitne karakteristike pomjerene mreže

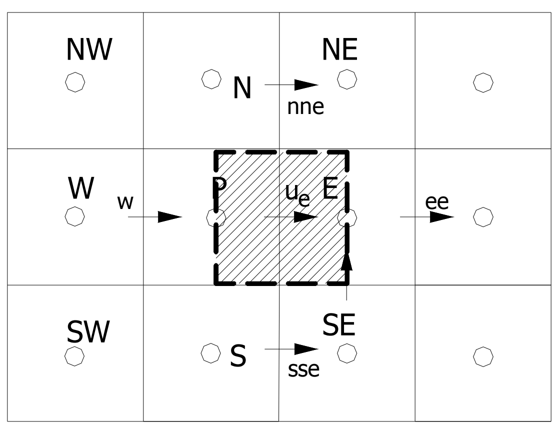
Kao što se sa slike 10.3 vidi pomjerena mreža predstavlja idealno rješenje koje obezbjedjuje sračunavanje pritiska u kontrolisanim zapreminama a brzina na granicama kontrolisanih zapremina, što je ono što idealno odgovara konceptu metode kontrolisane zapremine. Naime, pritisak se sračunava iz jednačine kontinuiteta koja se piše za zapreminu, dok se i bilans mase i drugih skalarnih veličina takodje sračunavaju za zapreminu što predstavlja samu srž i poentu ove metode. Konačno momentna jednačina za sračunavanje brzine u_e ima oblik:

$$a_e u_e = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E)\Delta y + b_e , \tag{10.24}$$

dok se na sličan način može napisati i jednačina za brzinu v_n kao:

$$a_n v_n = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N)\Delta x + b_n . \tag{10.25}$$

U poslednje dvije jednačine indeks ˝nb˝ označava susjedne vrijednosti za pomjerene zapremine. Za brzinu u_e susjedne vrijednosti brzina se uzimaju sa tačaka ee, nne, w i sse, koje su prikazane na slici 10.4. Slična shema samo u pravcu y ose važi za vrzinu v_n. Jednačina kontinuiteta koja se mora zadovoljiti data je jednačinom 10.20. Takodje je potrebno naglasiti da su i koeficijenti a_{nb} u jednačinama 10.24 i 10.25 različiti od koeficijenata koji se dobijaju za nepomjerenu mrežu koja se koristi za sračunavanje skalarne funkcije ϕ. Međutim iz dosada prikazanog nije jasno kojim postupkom se odredjuje polje brzina i pritiska. Detalji o tome će biti prikazani i razjašnjeni u nastavku.



Slika 10.4. Pomjerena mreža i susjedne brzine prilikom sračunavanja u_e

10.5 Metode za rješavanje

U prethodnim poglavljima prikazan je prilaz pri diskretizaciji strujnih Navier – Stokes – ovih jednačina spregnuto sa jednačinom kontinuiteta kao dodatnom jednačinom za sračunavanje pritiska kao dodatne nepoznate veličine. Prikazani su i različiti prilazi u tretiranju jednačine kontinuiteta kao i koncept pomjerene mreže koji obezbjeđuje sračunavanje polja pritiska i skalarnih transportnih funkcija u kontrolisanim zapreminama, dok se brzine sračunavaju na njenim granicama. Međutim, nigdje do sada nije prikazana procedura iterativnog postupka kao i redosled određivanja polja pritiska i brzina. Kao što je naprijed već rečeno gradijent pritiska se izdvojeno posmatra tokom procesa diskretizacije momentne jednačine i naknadno se uvrštava u izraz za određivanje brzina u_e i v_n. Osnovna ideja za određivanje polja brzina je da se sistem jednačina rješava iterativno. Na primjer ako se sračunava neka skalarna veličina ϕ pretpostave se prvo vrijednosti u prvoj iteraciji i krene se sa sračunavanjem novih vrijednosti korišćenjem diskretizovanih jednačina. Pri tome se novosračunate vrijednosti odmah uvrštavaju za račun vrijednosti funkcije ϕ u zapreminama koje dolaze kao sledeće. Na kraju kada se izvrši izračunavanje svih vrijednosti vrši se upoređivanje starih i novih vrijednosti za svaku zapreminu ponaosob. Kao reperna vrijednost uzima se maksimalna vrijednost razlike izmedju dvije uzastopne iteracije. Postupak se ponavlja sve dok se razlika izmedju dvije uzastopne vrijednosti ne spusti ispod zadate tačnosti.

Drugi pristup podrazumijeva formiranje matrice krutosti M dimenzija (N x N) i matrice slobodnih članova b dimenzije (N x 1). Tada se transportna funkcija ϕ sračunava rješavanjem jednačine

$$M \cdot \phi = b \,. \tag{10.26}$$

Medjutim sa stanovišta klasičnih CFD modela direktno rješavanje sistema algebarskih jednačina je neprihvatljivo jer zahtijeva značajne komjuterske resurse u memoriji, a i brzina je ograničena velikim brojem operacija. S obzirom da se radi odredjivanja polja pritiska prilikom rješavanja strujnog polja želi iskoristiti jednačina kontinuiteta srećemo se sa problemom da se kod nestišljivih fluida pritisak ne pojavljuje u jednačini kontinuiteta. Gustina figuriše, ali kod nestišljivih fluida ona nije funkcija pritiska tako da se preko nje ne može pritisak inkorporirarti u jednačinu kontinuiteta. Ako se želi korišćenje jednačine kontinuiteta potrebno je osmisliti metod kako uvrstiti pritisak u jednačinu kontinuiteta ali ne preko gustine. Metode kod kojih se sračunava pritisak kao promjenljiva u jednačini kontinuiteta zovu se metode na bazi pritiska.

Za razliku od njih postoje i metode koje koriste gustinu kao promjenljivu u jednačini kontinuiteta, pa se pritisak naknadno određuje korišćenjem jednačine stanja, recimo za stišljive fluide. Ove metode se obično zovu metode na bazi gustine. Takodje je potrebno reći da postoje tzv. hibridne metode koje su bazirane na gustini kao promjenljivoj u jednačini kontinuiteta, a koje se koriste kod nestišljivih fluida i uzimaju u obzir malu ali definisanu kompresibilnost fluida. Pored toga metode na bazi pritiska takodje se mogu koristiti za stišljive fluide u određenim granicama. Veoma je važno naglasiti da odluka koja će metoda biti korišćena zavisi od toga kako se namjerava riješavati sistem jednačina po u,v i p. Ako je to direktna metoda kojom se rješava sistem jednačina u domenu 3N x 3N (tri promjenjive u,v,P u svim zapreminama) onda nije važno da li je metoda na bazi pritiska ili gustine. Međutim čak i danas kada je razvoj kompjutera na zavidnom nivou rješavanje sistema jednačina direktnom metodom je neprihvatljivo u komercijalnim kodovima zbog dugog vremena proračuna.

U ovom poglavlju bavićemo se isključivo metodama na bazi pritiska koje podrazumijevaju pritisak kao promjenljivu u jednačini kontinuiteta, i koja je prikladna strujanju nestišljivog fluida, i koja se može proširiti i na stišljive fluide takodje. Ove metode su bazirane na određivanju jednačine za izračunavanje polja pritiska, koristeći diskretizovani oblik momentne jednačine. Jednačina kontinuiteta i momentna jednačina rješavaju se sekvencijalno, dok se kao metoda za rješavanje koristi iterativni postupak. Ove metode definišu put do rješenja a ne diskretizaciona tehnika, što je na kraju potrebno naglasiti.