POGLAVLJE 2.

2.1 Matematička klasifikacija parcijalnih diferencijalnih jednačina;

2.2 Klasifikacija fizičkih problema;

2.3 Karakteristike rješenja jednačine eliptičnog tipa;

2.4 Karakteristike rješenja jednačine paraboličkog tipa;

2.5 Karakteristike rješenja jednačine hiperboličnog tipa;

2.1 Matematička klasifikacija parcijalnih diferencijalnih jednačina

Parcijalne diferencijalne jednačine javljaju se u ogromnom broju naučnih disciplina kao i u najvećem broju inženjerskih i tehničkih aplikacija. Radi jednostavnosti rješavanja najčešće se parcijalne diferencijalne jednačine (PDJ) uvođenjem određenih pretpostavki pojednostavljuju i prevode u obične diferencijalne jednačine (ODJ) radi lakšeg rješavanja. S obzirom na porast zahtjeva da se mnogi realni fizički procesi rješavaju što preciznije, parcijalne diferencijalne jednačine se direktno integrale danas već razvijenim i poznatim metodama integracije. U nastavku će biti prikazani osnovni tipovi i klasifikacija parcijalnih diferencijalnih jednačina. Tri osnovne klase parcijalnih diferencijalnih jednačina (eliptične, parabolične i eliptične), kao i dva tipa fenomena koji se opisuju (ravnotežni i fenomeni prostiranja). Generalni oblik transportne diferencijalne jednačine koja u sebi sadrži nekoliko različitih članova po svojoj suštini ima generalni oblik:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho \phi) + \nabla\left(\rho \vec{V} \phi\right) = \nabla\left(\Gamma \nabla \phi\right) + S, \tag{2.1}$$

gdje je ϕ generalizovana transportna funkcija, Γ generalizovani koeficijent difuzije, S generalizovani izvorni član. U nastavku će biti prikazani tri karakteristična slučaja jednačine (2.1) koji predstavljaju tri pomenuta tipa (PDJ) i to su redom:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = G\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} . \tag{2.4}$$

Prva jednačina (2.2) je dvodimenzionalna Laplace – ova jednačina, druga (2.3) je jednodimenzionalna jednačina nestacionarne difuzije, dok je poslednja (2.4) talasna jednačina. Postojeće jednačine u trodimenzionalnom Dekartovom koordinatnom sistemu imaju oblik:

$$\nabla^2 f = 0 , \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla^2 f , \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \nabla^2 f . \tag{2.7}$$

Gdje je ∇^2 operator koji predstavlja gradijent funkcije u Dekartovim koordinatama:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \tag{2.8}$$

Sve naprijed navedene diferencijalne jednačine predstavljaju PDJ drugog reda, jer je maksimalni izvod koji se u njima pojavljuje izvod 2 reda. Takođe jednačine su linearne jer u njima su svi članovi na prvom stepenu. Koeficijenti koji se pojavljuju u jednačinama mogu biti konstante ili pak funkcije nezavisno promenljivih pa jednačina može biti i nelinearnog tipa. Generalni oblik kvazi-linearne, nehomogene parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda ima oblik koji se može napisati kao:

$$Af_{xx} + Bf_{xy} + Cf_{yy} + Df_x + Ef_y + Ff + G = 0 , \tag{2.9}$$

gdje koeficijenti A – C mogu a ne moraju ti funkcije od x,y, ϕ_x, ϕ_y, koeficijenti D – F mogu zavisiti od x,y i ϕ, dok nehomogeni član G može biti funkcija od x i y. U jednačini 2.9 važi sledeća notacija:

$$\phi_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial i \partial j}, \ \phi_i = \frac{\partial \phi}{\partial i} \qquad i, j = x, y \tag{2.10}$$

Osnovna klasifikacija PDJ na jednačine eliptičnog, paraboličnog i hiperboličnog tipa vrši se na osnovu znaka diskriminante D:

$$D = B^2 - 4AC . \tag{2.11}$$

Ako je diskriminanta D<0 parcijalna diferencijalna jednačina je eliptičkog tipa, ako je D=0 tada je jednačina paraboličnog tipa a ako je D>0 tada je jednačina hiperboličkog tipa. Ovakva klasifikacije PDJ uzeta je na osnovu analogije sa diskriminantom $B^2 - 4AC$ koja klasifikuje konusni oblik koji je opisan sa generalnom algebarskom jednačinom:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 . \tag{2.12}$$

Na osnovu diskriminante $D=B^2 - 4AC$ za jednačinu (2.12) postoje tri tipa krive: elipsa (D<0), parabola (D=0) i hiperbola (D>0). Klasifikacija PDJ je suštinski vezana za tzv. karakteristike PDJ. Definicija karakteristike bi bila da je to (n-1) hiperpovršina u n dimenzionalnom hiper-prostoru koja ima određene karakterstike. Prefiks hiper je namjerno korišćen da bi se istaklo da se radi o prostoru koji je trodimenzionalan i vremenski (x,y,z,t). Generalno gledano informacije o nekoj veličini koja je predmet neke određene PDJ prostiru se kroz domen integracije duž *karakteristika* tj. karakterističnih linija u prostoru.

Jednostavan fizički primjer koji može da posluži radi ilustracije značaja karakteristike može biti jednačina konvekcije (transporta) neke fizičke veličine ϕ. Jednodimenzionalna nestacionarna konvekcija opisuje se jednačinom:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0 , \tag{2.13}$$

gdje je u brzina strujanja fluida. Fluid koji se kreće nosi sa sobom svoju masu, količinu kretanja i energiju kroz prostor u kojem se kreće. Lokacija fluida x(t) je povezana sa njegovom brzinom tj.

$$\frac{dx}{dt} = u , \tag{2.14}$$

Pa se integracijom poslednje jednačine lako dobija jednačina putanje kao:

$$x = x_o + \int_{t_o}^{t} u(t)dt . \tag{2.15}$$

Duž ove jednačine polazna jednačina konvekcije (2.13) ima oblik:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dt} = 0 , \tag{2.16}$$

Koji se lako integrali pa se dobija ϕ=const. što znači da se vrijednost transportovane funkcije ne mijenja duž karakteristične linije za konkretan slučaj. Jednačina (2.14) predstavlja karakterističnu jednačinu ili *diferencijalnu jednačinu karakteristike*. Fizički smisao jednačine karakteristike kao putanje prostiranja fizičke veličine ϕ je prilično jasan što se tiče konvekcije u ovom konkretnom slučaju. Jednačina (2.16) predstavlja jednačinu kompatibilnosti, i ova jednačina je isključivo primjenljiva duž karakteristične linije tj. karakteristike.

Vratimo se sada na polaznu diferencijalnu jednačinu 2.9. Nekoliko različitih načina postoji za određivanje karakteristične linije i nakon toga klasifikacije određene diferencijalne jednačine. Često se odgovor na pitanje šta je karakteristika nalazi u odgovoru na pitanje: postoje li putanje u domenu D(x,y) koje prolaze kroz neku generalizovanu tačku P duž koje su vrijednosti drugog izvoda funkcije $\phi(x,y)$ ϕ_{xx}, ϕ_{xy} i ϕ_{yy} neodređene ili diskontinualne? Ukoliko postoje ovakve putanje, onda su to putanje duž kojih se informacije o izvodima prostiru u domenu i predstavljaju karakteristike.

Jedan od najlakših načina za određivanje jednačine karakteristike je da se uz pomenutu diferencijalnu jednačinu (2.9), dodaju jednačine totalnih diferencijala za izvode ϕ_x i ϕ_y kao:

$$d(f_x) = f_{xx}dx + f_{xy}dy\,, \tag{2.17}$$

$$d(f_y) = f_{yx}dx + f_{yy}dy\,. \tag{2.18}$$

Poslednje dvije jednačine zajedno sa jednačinom (2.9) mogu se kompaktno napisati u matričnoj formi:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} \\ f_{xy} \\ f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Df_x - Ef_y - F + G \\ d(f_x) \\ d(f_y) \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Ova jednačina ima beskonačno mnogo rješenja li nema rješenja, ako je determinanta sistema jednaka nuli pa ako se postavi ovaj uslov dobija se:

$$A(dy)^2 - B(dx)(dy) + C(dx)^2 = 0\,, \tag{2.20}$$

Odakle se rješavanjem klasične kvadratne jednačine dobija:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \,. \tag{2.21}$$

Poslednja jednačina ima dvije familije linija u xy ravni zavisno od znaka ±, po uslovom da je diskriminanta sistema pozitivna. Postojanje karakteristika vodi do uspostavljanja dva karakteristična pojma: *domen zavisnosti i opseg uticaja. Domen zavisnosti* bi se mogao opisati kao domen iz kojega postoji uticaj na vrijednost funkcije u nekoj tački domena $\phi(x_P,y_P)$. Sa druge strane opseg uticaja predstavlja dio domena integracije oko tačke $P(x_P,y_P)$ gdje se osjeća uticaj vrijednosti funkcije $\phi(x_P,y_P)$. Jednačine paraboličnog i hiperboličnog tipa imaju jasno razdvojene domene zavsnosti i opseg uticaja. Za razliku od njih jednačine paraboličnog tipa su karakteristične po tome da se ova dva domena poklapaju.

Za razliku od PDJ drugog reda, jednačine prvog reda su paraboličkog tipa. Klasični primjer takve jednačine je jednačina oblika:

$$a f_x + b f_y = c \,, \tag{2.22}$$

i ako se još zajedno sa njom razmotri jednačina totalnog diferencijala:

$$df = f_t dt + f_x dx \,, \tag{2.23}$$

lako se dobija uslov za dobijanje diferencijalne jednačine karakteristike:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ dt & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_t \\ f_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ df \end{bmatrix} . \tag{2.24}$$

Ako je determinanta sistema jednaka nuli tada vrijednosti izvoda imaju više vrijednosti ili su neodređeni:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b}{a} \,, \tag{2.25}$$

Poslednja jednačina predstavlja jednačinu karakteristične linije u prostoru x-t, duž koje vrijednosti prvog izvoda ϕ_x ili ϕ_t imaju diskontinuitet ili pak više vrijednosti.

2.2 Klasifikacija fizičkih problema

Svi fizički fenomeni mogu se klasifikovati u tri grupe problema:

- ravnotežni problemi,
- problemi prostiranja,

- tzv. Eigen problemi.

Prva vrsta problema uvijek se opisuje jednačinom eliptičkog tipa i predstavljaju tzv. stacionarne probleme u zatvorenim domenima D(x,y). Rješenja jednačina elpitičkog tipa su karakteristična po tome da su uvijek ograničena tzv. graničnim vrijednostima koja se zadaju na ivicama domena, a rješenja jednačine u karakterističnim tačkama se određuju iterativnim simultanim rješavanjem jednačine u svim tačkama domena. Razlog za to leži u činjenici da se domen zavsnosti i opseg uticaja međusobno poklapaju. Klasičan primjer parcijalne diferencijalne jednačine eliptičkog tipa je diferencijalna jednačina stacionarnog provođenja toplote (Laplace – ova jednačina):

$$\nabla^2 T = 0, \tag{2.26}$$

ili u indeksnoj notaciji:

$$T_{xx} + T_{yy} = 0, \tag{2.27}$$

gdje je ako se posmatra generalna jednačina (2.9) A=1, B=0, C=1, pa je diskriminanta $B^2 - 4AC = -4 < 0$.

Problemi propagacije ili prostiranja opisuju se jednačinom paraboličkog tipa i klasičan primjer takve jednačine je jednačina jednodimenzijskog nestacionarnog prostiranja toplote:

$$T_t = a\, T_{xx}, \tag{2.28}$$

gdje se uslijed postojanja drugog izvoda u vremenu moraju znati granični uslov na dva kraja domena, kao i početni uslov T=T(x,0). Iz poslednje jednačine lako se uočava da je A=α, B=0, C=0 pa je diskriminanta $B^2 - 4AC = 0$. Jednačina karakteristike poslednje jednačine može se dobiti ako se uz poslednju jednačinu razviju i jednačine totalnog diferencijala po vremenu i prostornoj koordinati x:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ dx & dt & 0 \\ 0 & dx & dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{xt} \\ T_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_t \\ d(T_x) \\ d(T_t) \end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

Odakle se izjednačavanjem determinante sistema sa nulom dobija:

$$a\, dt^2 = 0, \tag{2.30}$$

Pa je jednačina karakteristične linije:

$$dt = \pm 0 \;\Rightarrow\; t = const. \tag{2.31}$$

Brzina prostiranja informacija duž ovih karakteristika je:

$$c = \frac{dx}{dt} = \pm\infty \, . \tag{2.32}$$

To znači da se informacija prenosi trenutno duž karakteristike u određenom konstantnom vremenskom trenutku. Na primjer temperatura u nekoj određenoj tački u domenu o određenom vremenskom trenutku utiče na sve temperature duž domena u svim vremenima počev od tog posmatranog vremenskog trenutka.

Na kraju, treća vrsta problema koji se opisuju jednačinama hiperboličkog tipa su problemi gdje postoje dvije realne familije krivih duž kojih su izvodi ili diskontinualni ili imaju više od jedne vrijednosti su fenomeni talasnog prostiranja. Klasični primjer PDJ hiperboličnog tipa je talasna jednačina koja ima oblik:

$$f_{tt} = c^2 f_{xx} \, , \tag{2.33}$$

i koja ima primjenu u problemima sa vibracijama, u elektrostatici, gasnoj dinamici, akustici itd. Slijedeći notaciju iz jednačine (2.9) važi da je A=1, B=0, C=-c^2, pa je diskriminanta sistema $B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$. Ako se kao i ranije poslednja jednačina veže sa jednačinama kojima se opisuju diferencijali prvih izvoda funkcije ϕ' dobijaju se izrazi za diferencijalne jednačine karakteristika:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -c^2 \\ dt & dx & 0 \\ 0 & dt & dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{tt} \\ f_{xt} \\ f_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d(f_x) \\ d(f_t) \end{bmatrix} , \tag{2.34}$$

ddakle se izjednačavanjem determinante sistema sa nulom dobija jednačina:

$$(dx)^2 - c^2 (dt)^2 = 0 \, , \tag{2.35}$$

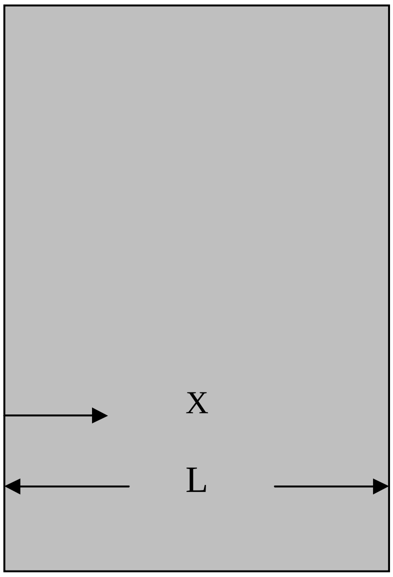
Tj. diferencijalne jednačine karakteristike:

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \, . \tag{2.36}$$

Iz poslednje jednačine se vidi da se informacije duž karakteristika prostiru brzinom zvuka (c). Jednačine ovog tipa se kao i jednačine paraboličnog tipa rješavaju nekom od eksplicitnih metoda kojima se ″maršira″ kroz vrijeme.

2.3 Karakteristike rješenja jednačine eliptičkog tipa

Kao primjer jednačine eliptičkog tipa (D<0) razmotrimo kondukciju kroz jednodimenzioni zid kao što je prikazano na slici 2.3.1.



Slika 2.3.1 Kondukcija kroz jednodimenzioni zid

Energijska jednačina koja opisuje 1-D stacionarnu kondukciju dobija se iz polazne jednačine (2.1) zanemarivanjem nestacionarnog i konvektivnih članova, kao i izvornog člana i članova koji su vezani za y i z pravac:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0 \,. \qquad (2.37)$$

Ako se definišu granični uslovi T(0)=0, i T(L)=T_L dobija se analitičko rješenje jednačine (2.37):

$$T(x) = T_0 + \frac{(T_L - T_0)}{L} x \,. \qquad (2.38)$$

Ovaj jednostavni oblik jednačine i analitičko rješenje ilustruju neke važne osobine parcijalnih diferencijalnih jednačina eliptičkog tipa:

- Temperatura u bilo kojoj tački x domena zavisi od graničnih temperatura;
- U odsustvu izvornog člana funkcija T(x) je ograničena temperaturama na granicama domena.

2.4 Karakteristike rješenja jednačine paraboličkog tipa

Kao primjer jednačine paraboličkog tipa ovdje će biti prikazana jednačina nestacionarne kondukcije koja se tretira kao 1-D problem:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{2.39}$$

gdje je $\alpha=\lambda/(\rho c_p)$ termički koeficijent difuzije. Početni i granični uslovi su zadati kao $T(x,0)=T_i(x)$, $T(0,\tau)=T_0$ i $T(L,\tau)=T_0$. Koristeći tehniku razdvajanja promjenjivih rješenje jednačine (2.39) se dobija kao:

$$T(x,\tau) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{L}\right)\cdot e^{\frac{-\alpha n^2\pi^2}{L^2}\tau}, \tag{2.40}$$

gdje je:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L (T_i(x) - T_0)\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{L}\right)\cdot dx \quad n = 1,2,3... \tag{2.41}$$

Generalno gledano rješenje jednačine (2.40) ima sledeće osobine:

- Granična temperatura T_0 ima uticaj na svaku temperaturu u domenu kao i kod eliptičkog tipa jednačine;
- Samo početni uslov je važan što se tiče rješavanja jednačine, nikakav uslov kada $\tau\to\infty$ nije potreban za rješavanje; To znači praktično da nam podatak "šta će se desiti" nije potreban;
- Početni uslovi imaju samo uticaj na temperature koje će se izračunavati a ne na one prethodne;
- Početni uslovi imaju uticaj na sve temperature u domenu u svom budućem vremenu. Njihov uticaj vremenom slabi i mogu imati uticaj na različite tačke domena, koje mogu imati različite temperature u par stepeni;
- Stacionarno stanje se postiže kada $\tau\to\infty$. Tada rješenje jednačine polako poprima ponašanje eliptičkog tipa jednačine;
- Temperature u domenu su ograničene početnim i graničnim uslovima kada nema izvornog člana u polaznoj jednačini;

2.5 Karakteristike rješena jednačine hiperboličkog tipa

Razmotrimo strujanje fluida u kanalu kao što je prikazano na slici 1.4. Brzina strujanja U je konstantna i U>0. Za $\tau \geq 0$ temperatura fluida uzvodno od strujanja je konstantna i iznosi T_0. Ako su gustina (ρ) i specifična toplota (C_P) konstantni i ako je toplotna provodljivost $\lambda=0$, tada energijska jednačina ima sledeći oblik:

$$\frac{\partial(\rho C_P T)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho C_P U T) = 0 . \tag{2.42}$$

Ako su granični i početni uslov definisani kao $T(x,0)=T_i$ i $T(x \leq 0, \tau)=T_0$ tada se rješenje jednačine može pisati kao:

$$T(x,\tau) = T((x - U \cdot \tau), 0) , \tag{2.43}$$

ili pak u obliku:

$$\begin{aligned} T(x,\tau) &= T_i \quad \text{za } \tau < \frac{x}{U} \\ &= T_0 \quad \text{za } \tau \geq \frac{x}{U} \end{aligned} . \tag{2.44}$$

Rješenje jednačine (2.44) je skokovita funkcija kod koje skokoviti prelaz putuje sa vremenom u pravcu x ose brzinom U. Kao karakteristike rješenja mogu se uočiti sledeće zakonitosti:

- Granični uslov uzvodno od toka fluida (x=0) ima uticaj na rješenje. Granični uslov nizvodno od toka strujanja praktično nema uticaja na rješenje;
- Ulazni granični uslov se prostire duž domena konstantnom brzinom U;
- Ulazni granični uslov se ne osjeća u položaju x dok vrijeme ne dostigne vrijednost $\tau = x/U$;

Generalno posmatrano, parcijalna diferencijalna jednačina (2.1) kojom se opisuje transport skalarne veličine ϕ ima dosta dodirnih tačaka sa jednačinama koje su prikazane kao primjeri jednačina eliptičnog, paraboličkog i hiperboličnog tipa. Jednačine eliptičnog tipa se javljaju kada se zanemare konvektivni i nestacionarni član. Ista jednačina uvođenjem nestacionarnog člana pokazuje ponašanje paraboličkog tipa. Konvektivni članovi transportne jednačine imaju opet hiperbolični karakter. U mnogim konkretnim problemima jednačine pokazuju miješano ponašanje, kada difuzioni član teži da unese eliptički karakter, dok nestacionarni i konvektivni član teže da unesu parabolički, odnosno hiperbolični karakter. Ponekad j korisno da se razmotre različite vrste koordinatnih sistema, da se vidi da li je korisnije usvojiti eliptčni ili parabolični koordinatni sistem, zavisno čemu teži ponašanje transportne jednačine. Na primjer, korisno je za parabolički tip problema uzeti vrijeme kao paraboličku koordinatu, dok se za prostor može usvojiti eliptička koordinata. U daljim poglavljima pažnja će biti posvećena numeričkim metodama koje uglavnom uspješno tretiraju sva tri tipa transportnih jednačina. Kada se generalno rješavaju transportne jednačine, onda ih je obično više i medjusobno su povezane, što je prilično različito od slučaja kada se rješava samo jedna jednačina.

U ovom poglavlju vidjeli smo da se različiti fenomeni koji su od interesa za inženjersko izučavanje, mogu opisati sa transportnim jednačinama koje predstavljaju zakone o održanju mase, količine kretanja, energije i drugih skalarnih veličina (npr. koncentracija i sl.), i da te jednačine imaju sličnu generalnu formu (jednačina 1.47). Jednačine generalno gledano sadrže nestacionarne, konvektivne, difuzione i izvorne članove. Izučavanjem jednačina eliptičkog, paraboličkog i hiperboličkog tipa može se doći do zaključaka o ponašanju različitih članova u transportnim jednačinama, čime se dolazi do najpogodnije numeričke metode za diskretizaciju i rješavanje problema. Idealna numerička shema trabala bi da korektno reprodukuje svaki od ova tri uticaja.