# ***POGLAVLJE 3.***

3.1 Uvod u numeričke metode;

3.2 Numeričke mreže i terminologija vezana za mreže;

3.3 Osnovne ka rješenja dobijenih numeričkim metodama;

3.3.1 Konzistentnost rješenja;

3.3.2 Stabilnost rješenja;

3.3.3 Konvergencija;

3.3.4 Tačnost rješenja;

3.3.5 Primjenljivost zakona o održanju.

## 3.1 Uvod u numeričke metode

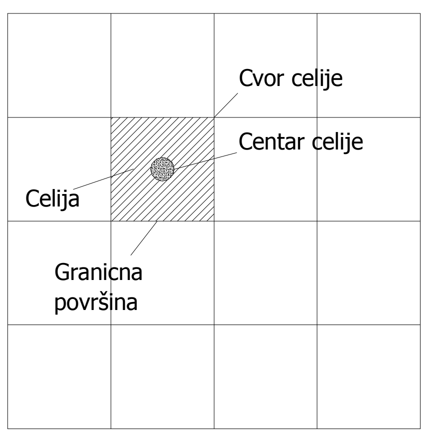
Osnovni cilj svake numeričke metode je rješavanje jedne ili sistema jednačina koje je nemoguće riješiti analitičkim putem. Fundament svake numeričke metode leži u tzv. diskretizaciji domena u kojem se želi rješenje jednačine. Analitičko rješenje parcijalne diferencijalne jednačine daje vrijednost funkcije $\phi$ u zavisnosti od prostornih koordinata i vremena $(x,y,z,\tau)$. Numeričko rješenje jednačine daje diskretan broj vrijednosti funkcije $\phi$ u domenu, zavisno od toga kakva je numerička mreža sa kojom je diskretizovan prostorni domen za koji se posmatra jednačina koja se rješava. Tačke u kojima se izračunava vrijednost funkcije $\phi$ zovu se najčešće čvorne tačke, ili pak nodovi ili ćelije, zavisno od metode koja se primjenjuje pri diskretizaciji polazne jednačine koja se rješava. Proces prevođenja parcijalne diferencijalne jednačine koja se rješava u sistem algebarskih jednačina koje kao nepoznate sadrže skup vrijednosti funkcije $\phi$ u konačnom broju tačaka zove se *diskretizacija.* Metode kojom se vrši pomenuti proces, a koje mogu biti različite zovu se *diskretizacione metode*.

Polazna tačka svake numeričke metode je matematički model, tj. set jednačina koje je potrebno riješiti, zajedno sa početnim i graničnim uslovima u cilju dobijanja jednoznačnog rješenja. Matematički modeli su obično pojednostavljeni u poređenju sa originalnim polaznim bilansnim jednačinama u cilju lakšeg numeričkog rješavanja. Obično se nikada ne postavlja neki generalni matematički model koji može da obuhvati sve slučajeve, već se modeli razvijaju od slučaja do slučaja.

Poslije usvajanja matematičkog modela sledeći korak je usvajanje odgovarajuće metode za diskretizaciju diferencijalnih jednačina matematičkog modela. Tu postoji više različitih metoda od kojih se kao glavne mogu navesti metoda konačnih razlika (FDM), metoda konačnih elemenata (FEM) i metoda kontrolisanih ili konačnih zapremina (CVM). U nastavku će biti prikazane suštine ove tri metode. Ostale metode kao što su spektralne sheme, metoda graničnih elemenata i druge neće biti predmet istraživanja u ovom kursu. Treba napomenuti da svaka od pomenutih metoda koja se primjenjuje na isti matematički model vodi ka istom rješenju ako je numerička mreža dovoljno sitna da može uspješno simulirati kontinuum.

## 3.2 Numeričke mreže i terminologija vezana za mreže

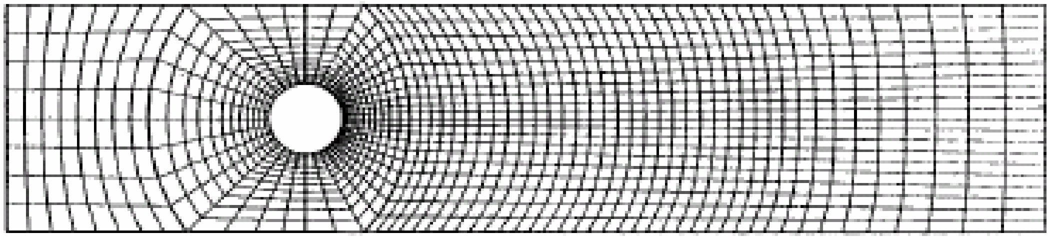
Nakon usvajanja numeričke metode za diskretizaciju polaznih jednačina matematičkog modela potrebno je definisati ili razviti numeričku mrežu, koja predstavlja diskretan broj tačaka posmatranog domena u kojim se vrši izračunavanje nepoznate funkcije $\phi$. Tipična prikaz numeričke mreže sa terminologijom koja se koristi dat je na slici 2.1.




Slika 2.1. Tipična numerička mreža sa uobičajenom terminologijom

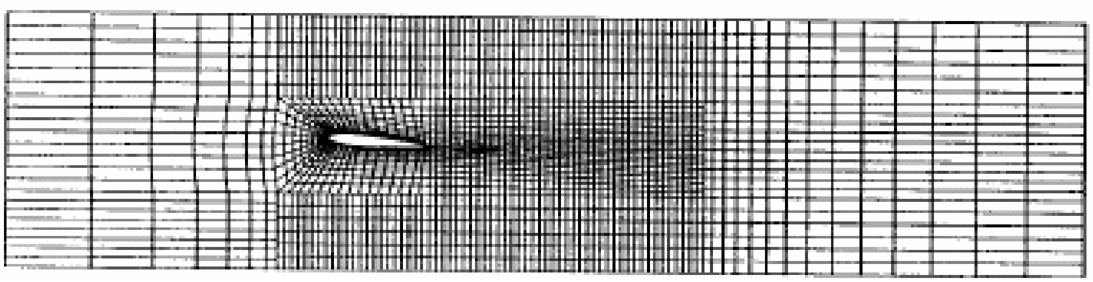
Osnovna jedinica mreže je ćelija koja se ponegdje zove i element. Ćelija je definisana sa njenim centrom, okružena je graničnim linijama (površinama) koje se medjusobno sijeku u čvorovima. Kod trodimenzionalne mreže granične linije su površine koje su ograničene ivicama. Kod dvodimenzionalne mreže površine i ivice su jedno te isto. U zavisnosti od položaja načina formiranja razlikuju se nekoliko karakterističnih tipova mreža:

- *Stukturisana (regularna)* mreža koja se sastoji od familija linija takvih osobina da se linije jedne familije medjusobno ne sijeku, dok sa linijama iz druge familije imaju samo po jedan presjek. Takodje svaka čvorna tačka je okružena sa istim brojem čvorova. Strukturisane (regularne) mreže omogućavaju veoma jednostavnu notaciju i ćelija kao i čvornih tačaka. Strukturisane mreže predstavljaju najjednostavniji tip mreže i ekvivalentne su Dekartovom koordinatnom sistemu. Pozicije susjednih čvorova lako se mogu definisati uvodjenjem odgovarajućih brojača (i,j,k). Glavni nedostatak strukturisane mreže je što se ona može primjenjivati na relativno jednostavne geometrijske oblike, kakvih je malo u praktičnim problemima. Takodje usitnjavanjem mreže na pojedinim djelovima domena koji su od značaja za neke veličine ili procese dovodi do usitnjavanja mreže na svim mjestima, što značajno utiče na smanjenje raspoložive memorije računara;
- *Strukturisana blok* mreža sa poklapajućim ivicama predstavlja poboljšanje u prevazilaženju problema sa memorijom koji je prethodno naveden. Cio domen integracije dijeli se na konačan broj blokova koji su svaki ponaosob strukturisani, pa se prilikom povezivanja blokova mora pažljivo voditi računa o uslovima na granicama izmedju ćelija koje su granične za dva bloka; Na slici 2.2. prikazana je strukturisana blok mreža kojom je diskretizovan domen za slučaj strujanja oko cilindra u pravom kanalu. Takodje treba napomenuti da mreža na slici 2.2. ima osobinu da su svi čvorovi mreže uvijek u presjecima izmedju graničnih povrčina (ivica);



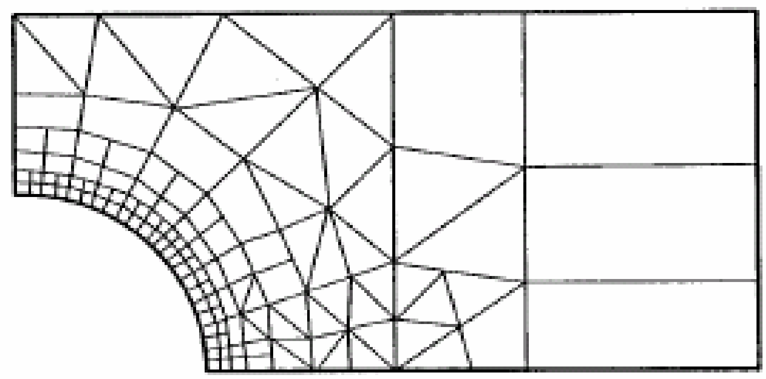
Slika 2.2. Strukturisana blok mreža za opisivanje strujanja oko cilindra

- *Strukturisane blok* mreže sa nepoklapajućim ivicama (Ne-konformna mreža), predstavljaju sledeći tip mreža, i imaju osobinu da se pojedini čvorovi mogu naći na nekoj od graničnih površina susjedne ćelije, a ne u presjeku ivica koje ograničavaju ćeliju, kao što je bilo do sada. Primjer takve mreže prikazan je na slici 2.3. sa kojom se modelira strujanje oko repa podmornice. Ovakav tip mreže je mnogo pogodniji za opisivanje strujanja oko složenih geometrija, kao i zbog toga što je moguće usitnjavanje mreže na mjestima gdje se očekuju značajne promjene funkcije koja se izračunava;



Slika 2.3. Strukturisana blok mreža sa nepoklapajućim ivicama

- *Nestrukturirane* mreže se najčešće primjenju za veoma složene geometrije kada je potrebno da numerička mreža detaljno pokriva geometrijski domen u kojem se vrši diskretizacija jednačina matematičkog modela. U principu ovakav tip mreže se može koristiti za bilo koju diskretizacionu shemu, ali je ipak najpogodnija za metodu konačnih elemenata (FEM) i metodu kontrolisanih zapremina (CVM). Elementi, odnosno zapremine mogu imati proizvoljan geometrijski oblik, pa samim tim i postoji restrikcija u broju susjednih elemenata pojedine zapremine, odnosno elementa. Praktično najčešći oblici koji se koriste u 2-D domenima su trougaoni i četvorougaoni elementi, dok se za 3-D geometrije najčešće koriste tetraedri i heksaedri. Ovakve mreže imaju značajne prednosti što se s njima mogu veoma lako opisati složene strukture, dok im je glavna mana što se ovakvom mrežom formiraju neuniformni oblici datoteka koje se dobijaju diskretizacijom jednačina matematičkog modela. Lokacija svakog elementa mora biti specificirana, kao i njegovi susjedi, što kod ovakvog tipa mreža nije jednostavno. Primjer nestruktirisane mreže dat je na slici 2.4.



Slika 2.4. Nestrukturisana mreža za složene geometrije

Diskretizacijom polaznih jednačina matematičkog modela dobija se veliki broj nelineranih algebarskih jednačina. Metod rješavanja sistema algebarskih jednačina zavisi od problema do problema. Kada je problem nelinearan najčešće se koriste iterativne metode, koje predstavljaju u stvari sukcesivnu linearizaciju nelinearnih jednačina. Tip solvera kojim će se rješavati algebarske jednačine zavisi i od tipa mreže i broja elemenata (zapremina) u njoj. Konačno na kraju potrebno je uspostavljanje odgovarajućih kriterijuma konvergencije za iterativne metode. Odluka o tome kada je potrebno prestati sa iteracijama je veoma važna sa aspekta tačnosti rješenja sa jedne strane kao i optimalnog računarskog vremena potrebnog za rješavanje problema.

## 3.3 Osnovne karakteristike rješenja dobijenih numeričkim metodama

Metod kojim se vrši rješavanje sistema algebarskih jednačina treba da ima određena svojstva, tj. karakteristike. U nastavku će biti prikazana neka od osnovnih svojstava numeričkih rješenja.

### 3.3.1 Konzistentnost rješenja

Rješenja diferencijalne jednačine koja se dobijaju diskretizacijom treba da teže tačnom rješenju kada rastojanje izmedju čvorova mreže ili dimenzija kontrolisane zapremine ili elementa teži nuli. Za numeričku metodu se kaže da je konzistentna ako ostatak (greška) teži nuli usitnjavanjem numeričke mreže. Razlika izmedju tačnog rješenja i rješenja dobijenog numeričkom metodom zove se obično *truncation error.* Ova vrijednost koja se kod Tajlorovog reda zove obično ostatak treba da teži nuli kada se numerička mreža usitnjava. Greška numeričkog rješenja je funkcija rastojanja izmedju čvorova ($\Delta x$, ili $\Delta\tau$ u zavisnosti da li je mreža prostorna ili vremenska). Nekada se može desiti da je greška metode funkcija funkcija količnika izmedju prostornog i vremenskog koraka $O(\Delta x/\Delta\tau)$. U tom slučaju konzistentnost rješenja nije zagarantovana sve dok se $\Delta x$ ne smanjuje brže nego $\Delta\tau$. Konzistentnost rješenja predstavlja najvažniju osobinu numeričkog rješenja, jer se bez njega ne može garantovati da će se usitnjavanjem mreže doći do tačnog rješenja.

### 3.3.2 Stabilnost rješenja

Za numeričko rješenje se kaže da je stabilno ako se greške koje se pojavljuju tokom numeričkog rješavanja ne uvećavaju tokom procesa rješavanja. Stabilnost je od posebnog značaja za numeričke metode koje su bazirane na iterativnom rješavanju. Kod njih se uslov stabilnosti vezuje za pojam da greška izmedju dva uzastopna rješenja tokom iteracija mora da teži ka nuli. Metoda je stabilna ako greška ne divergira tokom procesa rješavanja. Jedan od najrasprostranjenijih prilaz istraživanju stabilnosti rješenja je tzv. Neumann – ov metod. O njemu će biti riječi u kasnijim poglavljima.

### 3.3.3 Konvergencija

Za numeričku metodu se kaže da je konvergentna ako rješenje dobijeno diskretizacijom polaznih jednačina teži tačnom rješenju. Za nelinearne probleme kod kojih postoji snažan uticaj graničnih uslova, stabilnost i konvergenciju je teško demonstrirati. Obično se konvergencija provjerava odredjenim numneričkim eksperimentima, tj. ponavljanjem računa sa serijom novih i usitnjenih numeričkih mreža. Ako je metoda stabilna i ako su sve aproksimacije konzistentne, rješenje je obično konvergentno prema rješenju koje ne zavisi od dimenzije mreže.

### 3.3.4 Tačnost rješenja

Kada se govori o preciznosti (tačnosti) rješenja tada se mora imati u vidu da za mnoge matematičke modele nije moguće naći tačno rješenje uslijed složenosti matematičkog modela. Tada je mnogo korisnije diskutovati o ponašanju greške (truncation error), koja treba da teži nuli sa usitnjavanjem numneričke mreže. Takodje treba napomenuti da rješenja koja se dobijaju numeričkom diskretizacijom jednačina matematičkog modela predstavljaju samo aproksimativna rješenja iz više razloga. Kao prvo, postoje tzv. greške modeliranja koje predstavljaju razliku izmedju konkretne realne fizičke pojave i jednačina kojima je ona opisana. Jednačine manje ili više precizno opisuju odredjenje pojave, a često je prisutno i zanemarivanje odredjenih efekata radi pojednostavljivanja jednačina matematičkog modela. Drugo, postoje tzv. diskretizacione greške koje su definisane kao razlike izmedju tačnog rješenja jednačina modela i numeričkog rješenja dobijenog diskretizacijom jednačina matematičkog modela. Na kraju, postoje i tzv. iteracione greške koje predstavljaju grešku izmedju iterativnog rješenja i tačnog rješenja sistema algebarskih jednačina dobijenih diskretizacijom sistema jednačina matematičkog modela. Iteracione greške se ponekad zovu i greške konvergencije. Veoma je važno da se ove tri vrste grešaka jasno uoče kao i da se ako je moguće napravi kvantitativna razlika između njih.

### 3.3.5 Primjenjljivost zakona o održanju

Transportne jednačine koje su predstavljene u prvom poglavlju predstavljaju zakone o održanju mase, količine kretanja i energije napisane za specifičnu geometriju i za fluid koji ima tzv. Njutnovsko ponašanje. Numeričke sheme koje se pišu za ovakve jednačine treba da uzimaju u obzir zakone o održanju. To znači da na primjer za stacionarno strujanje fluida, kada nema izvornih članova u jednačinama matematičkog modela količina transportovane veličine $\Phi$ koja ulazi u kontrolisanu zapreminu mora biti jednaka onoj koja je napušta kroz granice zapremine. U slučaju primjene metode kontrolisane zapremine ova osobina održanja je zagarantovana, jer je i sama metoda bazirana na ovom principu. Ostale diskretizacione metode mogu se napraviti da budu takve da respektuju zakone o održanju, ako se vodi računa o izboru aproksimacija. Tretiranje izvora i ponora transportovane funkcije treba da bude konzistentno, tako da je ukupni izvor ili ponor neke funkcije jednak neto protoku transportovane veličine $\Phi$ kroz granice domena. Za diskretizacione sheme koje respektuju zakone o održanju greška rješenja može da bude samo distribuirana duž čitavog domena integracije, dok se kod metoda koje nisu orijentisane na održanju transportovane veličine $\Phi$, mogu pojaviti vještački izvori ili ponori transportovane funkcije, koji nemaju veze sa fizikom problema. Takve mreže daju približno tačna rješenja samo ako je numerička mreža dovoljno usitnjena.