POGLAVLJE 5.

5.1 Rješavanje sistema algebarskih jednačina

Sve diskretizacione metode u principu dovode do formiranja sistema algebarskih jednačina čijim se rješavanjem dobija skup vrijednosti tražene funkcije ϕ u domenu koji se razmatra. Ove jednačine mogu biti linearne ako koeficijenti matrice ne zavise od funkcije ϕ, ili pak nelinearne ako zavise. Tehnike za rješavanje sistema jednačina ne zavise od metode diskretizacije polazne jednačine i predstavlalju grubo rečeno put do rješenja. Sistemi algebarskih jednačina koji će se pojavljivati u ovom kursu podrazumijeva se da imaju samo jedno rješenje, i to ono koje se traži. Različite metode rješavanja istog sistema diskretizovanih jednačina treba da daju isto rješenje. Kod nelinearnih problema ovaj uslov nije zagarantovan, jer rješenje može zavisiti od početno predtpostavljenih vrijednosti prilikom iterativnog rješavanja koje je potrebno da bi se prevazišao problem nelinearnosti. Generalno gledano sve metode rješavanja mogu se podijeliti u dvije grupe: direktne koje daju tačna rješenja i iterativne koje daju rješenja sa zadatom tašnošću.

5.2 Direktne metode rješavanja

Koristeći neku od naprijed navedenih diskretizacionih metoda sistem algebarskih jednačina generalno ima oblik:

$$A\Phi = B\,, \tag{5.1}$$

gdje je A matrica koeficijenata , Φ je matrica nepoznatih funkcija $\Phi=[\phi_1,\phi_2,\ldots]^T$ a B je matrica kolona nastala od izvornih članova u jednačinama. Direktna metoda rješavanja podrazumijeva odredjivanje inverzne matrice matrici nepoznatih koeficijenata A^{-1} tako da je:

$$\Phi = A^{-1}B\,. \tag{5.2}$$

Rješenje Φ je jednoznačno odredjeno ako je moguće odrediti inverznu matricu A^{-1} tj. ako je determinanta matrice A različita od nule. Praktično odredjivanje inverzne matrice od matrice koeficijenata se veoma rijetko radi kod praktičnih problema zbog sporosti i komplikovanosti, pogotovo kada elementi matrice A nisu strukturisani na pogodan način. Medjutim pogodnim odabirom notacije elemenata u numeričkoj mreži moguće je dobiti pogodan oblik matrice A sa tačno definisanim bendom (širinom), van kojega su svi elementi matrice jednaki nuli. Kod jednodimenzionih problema problem je još jednostavniji za posmatranje jer se pogodnom notacijom koja će biti prikazana u nastavku može obezbijediti da nenulti članovi budu glavna dijagonala i dvije dijagonale uz nju. Za ovakav sistem jednačina gdje su glavna dijagonala i dvije susjedne uz nju različite od nule koristi se tzv. Tomasov algoritam za rješavanje.

Direktne metode nemaju neki veći značaj u komercijalnim programima koji se bave strujanjem (CFD modeli) zbog značajnih memorijskih resursa koji su potrebni za čuvanje ogromnog broja podataka koji čine matricu koeficijenata. Pored toga matrica koeficijenata A je najčešće nelinearna, tj. njeni elementi su funkcije od traženih vrijednosti funkcije ϕ, što problem čini praktično nemogućim za direktno rješavanje. U nastavku će biti prikazane neke od najkarakterističnijih direktnih metoda rješavanja kao što je Gausova eliminacija, Gaus-Jordan-ova eliminacija, LU dekompozicija.

5.3 Gausova metoda eliminacije

Vratimo se ponovo na polazni sistem jednačina (3.1). Matrica koeficijenata ima generalni oblik:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Osnovni koncept Gausove metode eliminacije je eliminacija elemenata koji se nalaze ispod glavne dijagonale, tj. njihovo svodjenje na nulu. To se može uraditi množenjem recimo prve jednačine sa a_{21}/a_{11} i oduzimanjem od druge jednačine. Medjutim, tada će se i svi elementi iz drugog reda transformisati. Nakon toga ponavlja se postupak za element a_{31} i tako redom dok se ne dobiju nule u prvoj koloni. Zatim se sličan postupak ponavlja za elemente druge kolone počev od elementa a_{32}, i tako redom do kolone n-1, dok se zadnja kolona ne dira. Kao rezultat ovih transformacija dobija se matrica sledeće forme:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ 0\ \ a_{22}\ a_{23}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Svi elementi matrice (3.4) su različiti od elemenata polazne matrice osim prvog reda koji ostaje nepromijenjen. Kako su elementi polazne matrice praktično nepotrebni u daljem rješavanju novi elementi matrice preuzimaju njihovu notaciju kao što je i napisano u poslednjoj jednačini. Dosad opisani postupak svodjenja polazne matrice na trougaonu matricu zove se obično *eliminacija unaprijed*. Nakon dobijanja trougaone matrice njeno rješavanje ide od poslednje prema prvoj jednačini. Poslednja jednačina sadrži samo jednu nepoznatu ϕ_n koja se odredjuje kao:

$$\phi_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, \tag{5.5}$$

a poslije se prelazi na jednačinu koja je ispred nje i koja sadrži nepoznate ϕ_{n-1} i ϕ_n koja je prethodno odredjena. Generalno sva rješenja za jednačine koje slijede u poretku unazad posmatrano od poslednje mogu se zapisati u obliku:

$$\phi_i = \frac{b_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} a_{ik}\phi_k}{a_{ii}}. \tag{5.6}$$

Desna strana poslednje jednačine se lako sračunava jer se ona odnosi na već sračunate vrijednosti iz prethodnih jednačina. Ovaj dio postupka koji se odnosi na sračunavanje vrijednosti nepoznatih funkcija ϕ_i zove se obično *substitucija unazad.* Nije teško pokazati da je broj aritmetičkih operacija potreban da se riješi sistem od n jednačina reda veličine $n^3/3$ od čega na rješavanje sistema jednačina metodom unazad zahtijeva $n^2/2$ i mnogo je manji od broja operacija potrebnih da se matrica svede na trougaoni oblik. Zbog toga se Gausova metoda primjenjuje veoma rijetko mada je najefikasnija metoda za direktno rješavanje u slučaju matrica koje imaju većinu nenultih elemenata.

Kao primjer rješavanja sistema jednačina posmatrajmo sistem od tri jednačine sa tri nepoznate koji je napisan u obliku:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 & | & 20 \\ -20 & 40 & -20 & | & 20 \\ -20 & -20 & 130 & | & 20 \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Množenjem prve vrste sa (-20/80) i oduzimanjem od druge i treće vrste dobija se:

$$\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 & | & 20 \\ 0 & 35 & -25 & | & 25 \\ 0 & -25 & 125 & | & 25 \end{bmatrix}, \tag{5.8}$$

pa se dalje množenjem druge vrste sa (-25/35) i oduzimanjem od treće jednačine dobija konačno sistem iz kojeg se substitucijom unazad dobijaju rješenja sistema:

$$\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 & | & 20 \\ 0 & 35 & -25 & | & 25 \\ 0 & 0 & 750/7 & | & 300/7 \end{bmatrix}, \tag{5.9}$$

a to su x_3=0.40, x_2=1.0 i x_1=0.60.

5.4 Gaus-Jordan-ova eliminacija

Gaus-Jordan-ova eliminacija je specijalni oblik Gaus-ove eliminacije, kada se pogodnim transformacijama elementi iznad glavne dijagonale i ispod glavne dijagonale svode na nulu (eliminišu se). Matrica se transformiše u tzv. dijagonalnu matricu, koja se skalira tako da su vrijednosti koeficijenata na glavnoj dijagonali jednaki jedinici. Broj množenja i operacija kod Gaus-Jordan-ove eliminacije je približno $N=(n^3/2-n/2)+n^2$, što je oko 50% više nego kod klasične Gausove metode. Pogledajmo na kratkom primjeru matrice 3 x 3 suštinu Gaus-Jordan-ove eliminacije. Neka su matrica koeficijenata i matrica slobodnih članova definisani skraćenim zapisom jednačinom (5.10) kao i u prethodnom primjeru.

$$[A|b]=\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 & | & 20 \\ -20 & 40 & -20 & | & 20 \\ -20 & -20 & 130 & | & 20 \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

Skaliranjem prve vrste u cilju dobijanja jediničnog elementa na mjestu $a_{11}=1$, množi se prva vrsta sa 1/80. Tada jednačina (5.10) postaje:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/4 & -1/4 & | & 1/4 \\ -20 & 40 & -20 & | & 20 \\ -20 & -20 & 130 & | & 20 \end{bmatrix}, \tag{5.11}$$

pa se sada množenjem prve jednačine sa 20 i dodavanjem prvoj i trećoj jednačini dobija:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/4 & -1/4 & | & 1/4 \\ 0 & 35 & -25 & | & 25 \\ 0 & -25 & 125 & | & 25 \end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

Sledeći korak je skaliranje druge jednačine u cilju dobijanja $a_{22}=1$. Dijeljenjem druge jednačine sistema sa 35 dobija se:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/4 & -1/4 & | & 1/4 \\ 0 & 1 & -5/7 & | & 5/7 \\ 0 & -25 & 125 & | & 25 \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

Sada se druga jednačina množi sa 25 i dodaje trećoj, a poslije toga se druga množi sa 1/4 i dodaje prvoj jednačini pa se dobija:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/7 & | \; 3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & | 5/7 \\ 0 & 0 & 750/7 & | \; 300/7 \end{bmatrix}, \tag{5.14}$$

a zatim se skaliranjem treće jednačine sistema sa 750/7 dobija:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/7 & | \;\; 1/4 \\ 0 & 1 & -5/7 & | \;\; 5/7 \\ 0 & 0 & 1 & | \;\; 2/5 \end{bmatrix}. \tag{5.15}$$

Konačno, da bi se dobile nule iznad glavne dijagonale treća jednačina se množi sa 5/7 i dodaje drugoj, a zatim sa 3/7 i dodaje prvoj, pa se konačno dobija:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | \;\; 0.60 \\ 0 & 1 & 0 & | \;\; 1.00 \\ 0 & 0 & 0 & | \;\; 0.40 \end{bmatrix}. \tag{5.16}$$

Na desnoj strani su rješenja sistema jednačina s obzirom da je matrica postala jedinična sa nenultim elementima na glavnoj dijagonali.

5.5 LU dekompozicija

Kao što je naprijed već rečeno suština svih direktnih metoda je rješavanje sistema jednačina koji je definisan jednačinom (5.1). Matrica koeficijenata A može se dekomponovati tako da važi:

$$\mathrm{A} = \mathrm{LU}, \tag{5.17}$$

gdje je L donja matrica koja ima elemente iznad glavne dijagonale jednake nuli, dok je U gornja matrica koja ima nule ispod glavne dijagonale. S obzirom na (5.17) jednačina (5.1) se može pisati kao:

$$\mathrm{LUx} = \mathrm{B}. \tag{5.18}$$

Množenjem jednačine (3.18) sa L^{-1} dobija se da je:

$$\mathrm{L^{-1}LUx} = \mathrm{IUx} = \mathrm{Ux} = \mathrm{L^{-1}B}, \tag{5.19}$$

tj. dobija se jednačina:

$$\mathrm{Ux} = \mathrm{L^{-1}B}, \tag{5.20}$$

a ako se uzme da je $L^{-1}B=B'$ dobija se:

$$\mathrm{U}x = \mathrm{B}', \tag{5.21}$$

koja se lako rješava metodom substrakcije unazad jer su elementi matrice U ispod glavne dijagonale jednaki nuli. Takodje lako je pokazati da važi LB′=B što je važno za odredjivanje elemenata matrice B′. Iz prethodno izloženog jasno je da je matrica U matrica koja se dobija Gausovom eliminacijom i koja je prikazana jednačinom (5.9):

$$\mathrm{U} = \begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ 0 & 35 & -25 \\ 0 & 0 & 750/7 \end{bmatrix}, \tag{5.22}$$

dok je matrica L sastavljenja od multiplikatora pomoću kojih su eliminisani elementi ispod glavne dijagonale polazne matrice A:

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -5/7 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

Sada je moguće odrediti matricu B′ iz sledeće jednačine:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -5/7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}, \tag{5.24}$$

odakle se dobija $b_1'=20$, $b_2'=25$ i $b_3'=300/7$. Konačno kada je odredjena matrica B′ vrši se izračunavanje nepoznatih primjenom jednačine (5.21):

$$\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ 0 & 35 & -25 \\ 0 & 0 & 750/7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 300/7 \end{bmatrix}, \tag{5.25}$$

odakle slijedi $x_1=0.6$, $x_2=1.0$ i $x_3=0.40$.

5.6 Trodijagonalni sistem jednačina

Veliki broj sistema linearnih algebarskih jednačina formira speijalnu formu matrice koeficijenata, tako da su nenulti članovi samo na glavnoj dijagonali i dvije njoj susjedne dijagonale. Za takve sisteme jednačina postoje direktne metode rješavanja koje su jako efikasne što se tiče vremena izračunavanja, i ne zahtijevaju velike resurse memorije računara kao što je slučaj kod Gaus-ove ili Gaus-Jordan-ove eliminacije. Jedna od najpoznatijih metoda rješavanja trodijagonalnog sistema linearnih algebarskih jednačina je Thomas-ov algoritam. Posmatrajmo jednačine napisane za čvor ili element (i) ili pak za kontrolisanu zapreminu (P) date izrazima (4.25), (4.41) i (4.46) koje su dobijene metodama konačnih razlika, konačnih elemenata i kontrolisane zapremine respektivno. Svaka od njih ima generalni oblik koji se može pisati kao:

$$A_W^i \phi_{i-1} + A_P^i \phi_i + A_E^i \phi_{i+1} = B_i \,, \tag{5.26}$$

gdje je za koeficijente upotrijebljena notacija W,P,E što može biti i drugačije tj. (i-1), (i) i (i+1). Na desnoj strani poslednje jednačine nalaze se slobodni članovi koji su posledica postojanja izvornog člana u polaznoj jednačini koja se razmatra. Kada se jednačina (5.26) razvije za sve tačke domena dobija se matrica oblika:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}. \tag{5.27}$$

Kao što se može vidjeti u svakom redu je potrebno eliminisati samo po jedan član da se dobije trougaona matrica kao kod Gaus-ovog algoritma. U tom cilju prva jednačina se množi sa (a_{21}/a_{11}) i oduzima se od druge jednačine. Tada druga vrsta dobija sledeći oblik:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{22} - (a_{21}/a_{11})a_{12} & a_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.28}$$

Redom samo član a_{32} je nenulti u sledećem redu pa se ponavlja prethodno izloženi postupak. Takodje je karakteristično da se samo mijenja dijagonalni član i to po sledećem algoritmu:

$$a_{i,i} = a_{i,i} \quad (i = 1)\,, \tag{5.29a}$$

$$a_{i,i} = a_{i,i} - (a_{i,i-1}/a_{i-1,i-1})a_{i-1,i} \quad (i = 2......n)\,, \tag{5.29b}$$

pa je broj operacija da se matrica (3.27) svede na trodijagonalni oblik svega 3n zajedno sa promjenama slobodnih članova. Slobodni članovi se takodje mijenjaju po sledećem algoritmu:

$$b_i = b_i \ (i = 1), \tag{5.30a}$$

$$b_i = b_i - (a_{i,i-1} / a_{i-1,i-1}) b_{i-1} \quad (i = 2,.......n), \tag{5.30b}$$

dok je prvi član isti kao i kod polaznog sistema jednačina. Nakon ovih transformacija opisanih sa poslednje dvije jednačine odredjuju se vrijednosti nepoznate funkcije substritucijom unazad kao u Gausovom algoritmu:

$$\phi_i = \frac{b_i}{a_{i,i}} \ (i = n) \quad , \tag{5.31a}$$

$$\phi_i = \frac{b_i - a_{i,i+1}\phi_{i+1}}{a_{i,i}} \quad (i = n-1, n-2.......1), \tag{5.31b}$$

Radi jednostavnosti umjesto matrice A opisane jednačinom (5.27) koristi se matrica A′ dimenzija n x 3, jer nema potrebe za zapisom nultih elemenata. Prva kolona matrice A' je sastavljena od elemenata ispod glavne dijagonale matrice A ($a'_{i,1}=a_{i,i-1}$), drugu kolonu matrice A' čine elementi glavne dijagonale matrice A ($a'_{i,2}=a_{i,i}$), i konačno treću kolonu čine elementi iznad glavne dijagonale matrice A ($a'_{i,3}=a_{i,i+1}$). Konačno matrica A′ ima sledeći oblik:

$$A' = \begin{bmatrix} - & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \\ \multicolumn{3}{c}{.........................} \\ a'_{n-1,1} & a'_{n-1,2} & a'_{n-1,3} \\ a'_{n,1} & a'_{n,2} & - \end{bmatrix}, \tag{5.32}$$

Sada je potrebno elimisati elemente prve kolone matrice A′, na sličan način kao kod polazne matrice A. U tom slučaju mijenjaće se samo elementi druge kolone, i slobodni članovi b_i prema algoritmu:

$$a'_{1,2} = a'_{1,2}, \tag{5.33a}$$

$$a'_{i,2} = a'_{i,2} - (a'_{i,1} / a'_{i-1,2}) a'_{i-1,3} \quad (i = 2,3....n), \tag{5.33b}$$

$$b_1 = b_1 , \tag{5.34a}$$

$$b_i = b_i - (a'_{i,1} / a'_{i-1,2}) b_{i-1} \quad (i = 2,3,.......n) . \tag{5.34b}$$

Nakon što su odredjene vrijednosti $a'_{i,2}$ i b_i substitucijom unazad odredjuju se vrijednosti nepoznate funkcije ϕ_i prema:

$$\phi_n = \frac{b_n}{a'_{n,2}} , \tag{5.35a}$$

$$\phi_i = \frac{b_i - a'_{i,3}\phi_{i+1}}{a'_{i,2}} \quad (i = n-1, n-2.......1) . \tag{5.35b}$$

Kao primjer rješavanja sistema jednačina Thomas-ovim algoritmom posmatrajmo jednačinu provodjenja toplote kroz jednodimenzioni štap koji se nalazi u vazduhu temperature T_a, i koji je ukliješten izmedju dva kraja sa konstantnim temperaturama (T(0.0)=0, T(1.0)=100). Jednačina ima oblik:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \alpha^2 T = -\alpha^2 T_a , \tag{5.36}$$

i neka se jednačina diskretizuje primjenom metode konačnih razlika, pa se dobija diskretizovani oblik za čvor (i):

$$\frac{\overline{T}_{i+1} - 2\overline{T}_i + \overline{T}_{i-1}}{\Delta x^2} - \alpha^2 \overline{T}_i = -\alpha^2 T_a . \tag{5.37}$$

Uzmimo sada da je α^2=16cm^{-2} T_a=0.0 i Δx=0.125cm, pa poslednja jednačina dobija sledeći oblik pogodan za formiranje sistema algebarskih jednačina:

$$\overline{T}_{i-1} - 2.25\overline{T}_i + \overline{T}_{i+1} = 0 . \tag{5.38}$$

S obzirom da je Δx=0.125cm i da je domen L=1, postoji 8 podioka unutar domena, tj. 9 čvorova od koji su u prvom i poslednjem poznate vrijednosti funkcije T_1=0.0, i T_9=100.0. Za preostalih 7 čvorova razvija se jednačina (5.38) i konačno se dobija matrica A′ i b kao:

$$A' = \begin{bmatrix} - & -2.25 & 1.0 \\ 1.0 & -2.25 & 1.0 \\ 1.0 & -2.25 & 1.0 \\ 1.0 & -2.25 & 1.0 \\ 1.0 & -2.25 & 1.0 \\ 1.0 & -2.25 & 1.0 \\ 1.0 & -2.25 & - \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -100.0 \end{bmatrix}. \tag{5.39}$$

Eliminacijom elemenata prve kolone koristeći jednačine (5.33) mijenjaju se samo članovi druge kolone. Na primjer član $a'_{2,2}$ će biti:

$$a'_{2,2} = a'_{2,2} - (a'_{2,1} / a'_{1,2})a'_{1,3} = -2.25 - [1.0/(-2.25)] \cdot (1.0) = -1.805556, \tag{5.40}$$

dok se preostali elementi kolone 2 dobijaju na sličan način. Slobodni članovi matrice kolone b se mijenjaju koristaći jednačine (3.34). Na primjer član b_2 će biti:

$$b_2 = b_2 - (a'_{2,1} / a'_{1,2})b_1 = 0.0 - [1.0/(-2.25)] \cdot (0.0) = 0.0. \tag{5.41}$$

Konačno matrica A′ i b postaju:

$$A' = \begin{bmatrix} - & -2.250000 & 1.0 \\ 0.0 & -1.805556 & 1.0 \\ 0.0 & -1.696154 & 1.0 \\ 0.0 & -1.660431 & 1.0 \\ 0.0 & -1.647747 & 1.0 \\ 0.0 & -1.643111 & 1.0 \\ 0.0 & -1.641398 & - \end{bmatrix} \quad b' = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -100.0 \end{bmatrix}. \tag{5.42}$$

Sada se korišćenjem jednačina za substituciju unazad (5.35) dobijaju rješenja jednačine (3.36). Na primjer temperature T_7 i T_6 su:

$$T_7 = \frac{b_7}{a'_{7,2}} = (-100.0)/(-1.641398) = 60.923667, \tag{5.43}$$

$$T_6 = \frac{b_6 - a'_{6,3}T_7}{a'_{6,2}} = [0 - (1.0)(60.923667)]/(-1.643111) = 37.078251. \tag{5.44}$$

Ponavljanjem procedure za preostalih 5 čvorova dobija se konačno rješenje za 7 nepoznatih čvorova koje se prikazuje kao matrica kolona:

$$T = \begin{bmatrix} 1.966751 \\ 4.425190 \\ 7.989926 \\ 13.552144 \\ 22.502398 \\ 37.078251 \\ 60.923667 \end{bmatrix} . \tag{5.45}$$

5.7 Iterativne metode rješavanja

Iterativne metode se znatno više koriste pri rješavanju sistema algebarskih jednačina zbog svoje jednostavnosti i praktično minimalnih memorijskih zahtjeva pri definisanju matrice koeficijenata. Ove metode kao osnovu imaju princip "prepostavi i koriguj" koje dovodi do približno tačnog rješenja ponavljanjem dovoljan broj puta. Jedan od najjednostavnijih oblika predstavlja tzv. Gaus-Seidel-ova metoda iteracije koja ukratko može biti opisana u par sledećih koraka:

1. Pretpostaviti vrijednosti funkcije ϕ u cijelom posmatranom domenu;
2. Izračunati vrijednost funkcije u svakoj tački koristeći izraz:
$$\phi_P = \frac{(a_E \phi_E + a_W \phi_W + b)}{a_P} , \tag{5.46}$$
tokom izračunavanja izvršiti tzv. update kako bi novosračunate vrijednosti brzo širile svoj uticaj na preostale čvorove ili zapremine;
3. Preći cio domen integracije i istovremeno sračunati razlike izmedju novih i prethodnih vrijednosti za svaki čvor. Kao reprezent za kriterijum konvergencije uzeti maksimalnu vrijednost. Tada je završena jedna iteracija;
4. Provjeriti kriterijum konvergencije, tj. da li je razlika izmedju nove sračunate vrijednosti i prethodne vrijednosti manja od željeno zadate vrijednosti npr. 0.1%. Ak uslov nije ispunjen vratiti se na tačku 2 i ponavljati postupak;

Iteracione procedure po pravili ne moraju biti konvergentne u svakom slučaju. Proces konvergencije se odredjuje nekim od kriterijuma, a za linearne probleme najčešće se koristi tzv. Scarborough-ov kriterijum. Scarborough-ov kriterijum konvergencije ima kao uslov da

$$\frac{|a_E|+|a_W|}{|a_P|} \le 1$$, za sve čvorne tačke ili kontrolisane zapremine;

$$\frac{|a_E|+|a_W|}{|a_P|} < 1$$, za makar jedan čvor ili kontrolisanu zapreminu.

Matrice koje zadovoljavaju ove kriterijume se zovu dijagonalno dominantne, što je slučaj sa matriama koje se dobijaju predstavljenim metodama. Pogodnim odabirom notacije kontrolisanih zapremina tj. čvorova mreže moguće je dobiti čak i simetrične matrice posmatrano u odnosu na glavnu dijagonalu.

Sve u svemu Gauss-Siedel-ova metoda se rijetko koristi za praktične CFD probleme, jer se brzina konvergencije znatno smanjuje povećanjem broja jednačina. U kasnijim poglavljima biće opisana multimrežna metoda da se ubrza proces konvergencije a samim tim i učini kompjuterski program korisnim za praktičnu upotrebu.

Razmotrimo za početak tzv. Jacobi iteracionu shemu. Neka je zadat sistem jednačina Ax=b, napisan u indeksnoj notaciji kao:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i \quad (i = 1,2,\ldots..n). \tag{5.47}$$

Jakobi iteraciona shema podrazumijeva rješavanje po x_i svake od jednačina (5.47) kao da su svi ostali elementi poznati. Tada izraz za x_i postaje:

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j\right) \quad (i = 1,2,\ldots..n). \tag{5.48}$$

Za ovu kao i svaku drugu iteracionu shemu potrebno je zadavanje početnog vektora tj, početnih vrijednosti funkcija x_i (i=1,2,…n). U nastavku početne tj. prethodne vrijednosti će biti sa gornjim indeksom radi orjentacije. Dakle vrijednost funkcije u prvoj iteraciji biće:

$$x_i^{(1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(0)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(0)}\right) \quad (i = 1,2,.....n), \tag{5.49}$$

dok je za neku proizvoljnu iteraciju (k) važi:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1,2,.....n). \tag{5.50}$$

Mnogo jednostavniji oblik poslednje jednačine može se dobiti ako joj se na desnoj strani doda i oduzme član $x_i^{(k)}$ pa se dobija pogodan oblik:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1,2,.....n). \tag{5.51}$$

Poslednji član u jednačini (5.51) predstavlja rezidual jednačine (i). Tokom iteracionog procesa ovaj se rezidual smanjuje dok ne isčezne sa odgovarajućim zanemarivanjem. Poslednja jednačina može se napisati u sledećoj formi koja je pogodna za numeričko rješavanje:

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} + \frac{R_i^{(k)}}{a_{i,i}} \qquad (i = 1,2,.....n) \\ R_i^{(k)} &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)} \quad (i = 1,2,.....n) \end{aligned} . \tag{5.52}$$

Kao što se vidi iz sheme vrijednost funkcije $x_i^{(k+1)}$ zavisi samo od vrijednosti u prethodnoj iteraciji $x_i^{(k)}$. Radi ilustracije Jacobi iteracione metode posmatrajmo sistem jednačina zadat u formi:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}. \tag{5.53}$$

Reziduali kada se razvije poslednji sistem jednačina postaju:

$$\begin{aligned} R_1 &= 100 - 4x_1 + x_2 - x_4 \\ R_2 &= 100 + x_1 - 4x_2 + x_3 - x_5 \\ R_3 &= 100 + x_2 - 4x_3 + x_4 \\ R_4 &= 100 - x_1 + x_3 - 4x_4 + x_5 \\ R_5 &= 100 - x_2 + x_4 - 4x_5 \end{aligned} . \tag{5.54}$$

Ako se kao početna vrijednost za $x_i^{(0)}$ (i=1,5) zada vrijednost 0.0 tada se u prvoj iteraciji dobija da je $R_i^{(0)}=100$ (i=1,5), i zamjenom ovih vrijednosti u jednačinu (5.52) dobijaju se vrijednosti u prvoj iteraciji $x_i^{(1)}=25$ (i=1,5). Uslijed simetrije matrice koeficijenata kao i matrice slobodnih članova lako se vidi da je $x_1=x_5$ i da je $x_2=x_4$. U tabeli 5.1 date su vrijednosti dobijene iterativnim postupkom.

Tabela 5.1. Vrijednosti dobijene Jacobi iteracionim postupkom

iteracija	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0	0	0	0	0
1	25	25	25	25	25
2	25	31.250000	37.500000	31.250000	25
3	25	34.375000	40.625000	34.375000	25
4	25	35.156250	42.187500	35.156250	25
5	25	35.546875	42.578125	35.546875	25
....	....				
16	25	35.714284	42.857140	35.714284	25
17	25	35.714285	42.857142	35.714285	25
18	25	35.714285	42.857143	35.714285	25

Kao što se vidi iz prethodno izloženog vrijednosti u k-toj iteraciji zavise isključivo od vrijednosti u prethodnoj iteraciji. Medjutim, pri rješavanju sistema jednačina često se dogadja da sračunata vrijednost i k-toj iteraciji figuriše u jednačini za čvor ili zapreminu koja u redosledu slijedi za njim. Ako bi se ta vrijednost uvrstila u jednačine za trenutnu iteraciju postupak se ubrzava. Na tom principu je zasnovana tzv. Gaus-Siedel-ova iteraciona shema koja se ukratko može predstaviti sledećim jednačinama:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\right)\ (i=1,2,.....n)\,. \qquad (5.55)$$

Kao što se vidi drugi član u zagradi predstavlja član dobijen na osnovu već sračunatih vrijednosti u (k+1) iteraciji. Kao i ranije ako se na desnoj strani doda i oduzme član $x_i^{(k)}$ dobija se sledeća forma pogodna za rješavanje na računaru:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{R_i^{(k)}}{a_{i,i}} \qquad (i = 1,2,.....n)$$
$$R_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} \quad (i = 1,2,.....n) \tag{5.56}$$

U poslednjoj jednačini drugi član na desnoj strani jednačine predstavlja vrijednost koja je sračunata na osnovu "novosračunate" vrijednosti u (k+1) iteraciji. Ova metoda još je poznata kao sukcesivno iterativna metoda, i za sigurno brže konvergira prema tačnom rješenju od Jacobi metode. Razmotrimo kao primjer sistem jednačina (5.53) i riješimo ga Gaus-Siedel-ovom shemom. Neka su sve početne vrijednosti $x_i^{(0)}=0.0$ (i=1,2,..n). Početni rezidual ya tačku 1 je $R_1^{(0)}=100$. Njegovom zamjenom u prvu od jednačina (5.52) dobija se $x_1^{(1)}=25.0$. Sada je $x^T=[25 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$, pa se dobija $R_2^{(1)}=125$, pa se zamjenom ove vrijednosti u drugu od jednačina (5.52) dobija:

$$x_2^{(1)} = 0.0 + \frac{125}{4} = 31.25 \,. \tag{5.57}$$

Na sličan način dobija se da je $R_3^{(1)}=131.250$, $x_3^{(1)}=32.81250$, $R_4^{(1)}=107.81250$, $x_4^{(1)}=26.953125$, $R_5^{(1)}=95.703125$, $x_5^{(1)}=23.925781$. Postupak se ponavlja dok razlika između dvije uzastopne vrijednosti ne bude manja od $1x10^{-6}$, za što je potrebno 15 iteracija, što je tri manje od Jacobi metode prethodno predstavljene. Sumirani rezultati prikazani su u tabeli 5.2.

Tabela 5.2. Vrijednosti dobijene Gaus-Siedel-ovom iteracionom shemom

iteracija	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1	25.000000	31.250000	32.812500	26.953125	23.925781
2	26.074219	33.740234	40.173340	34.506226	25.191498
3	24.808502	34.947586	42.363453	35.686612	25.184757
4	24.815243	35.498485	42.796274	35.791447	25.073240
5	24.926760	35.662448	42.863474	35.752489	25.022510
....	....				
13	25.000002	35.714287	42.857142	35.714285	25.999999
14	25.000001	35714286	42.857143	35.714285	25.000000
15	25.000000	35.714286	42.857143	35.714286	25.000000

Pored navedene dvije iterativne sheme kojima se rješavaju sistemi algebarskih linearnih jednačina, tokom rješavanja se može uvesti i tzv. relaksacija. Ona podrazumijeva množenje reziduala $R_i^{(k)}$ sa faktorom ω koji treba odabrati tako da proces konvergencije teče brže sa jedne strane, ili pak da se ublaži osciliranje vrijednosti pomenutog reziduala tokom iterativnog rješavanja. Gaus-Siedel-ova metoda može se modifikovati uvodjenjem relaksacionog faktora ω, tako da shema za rješavanje sistema jednačina 3.47 bude data izrazima:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \cdot \frac{R_i^{(k)}}{a_{i,i}} \qquad (i = 1,2,\ldots..n)$$
$$R_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} \quad (i = 1,2,\ldots..n) \tag{5.58}$$

Kada je ω=1 tada se dobija Gaus-Siedel-ova shema, kada je 1.0<ω<2.0 tada je sistem prerelaksiran, a ako je ω<1.0 tada je sistem podrelaksiran. Način na koji će biti odabran relaksacioni faktor ω zavisi od ponašanja sistema algebarskih jednačina tokom rješavanja. Kao generalno pravilo može se reći da veći sistem jednačina zahtijeva nešto veću vrijednost ω, kako bi se uticaj graničnih uslova brže prenosio kroz domen u kome se rješava neka jednačina.

Radi ilustracije posmatrajmo problem koji je prethodno riješen Gaus-Siedel-ovom metodom. Neka je početni vektor kao i ranije $x^{(0)T}$=[0 0 0 0 0], pa se zamjenom u drugu od jednačina (5.54) dobija da je $R_1^{(0)}$=100.0. Neka je relaksacioni faktor ω=1.10, pa se dobija vrijednost u prvoj iteraciji:

$$x_1^{(1)} = 0.0 + 1.1\frac{100}{4} = 27.50\,. \tag{5.59}$$

Sada je novi vektor stanja x^T=[27.5 0 0 0 0], pa se dobija da je $R_2^{(0)}$=127.50, odakle slijedi:

$$x_2^{(1)} = 0.0 + 1.1\frac{127.50}{4} = 35.06250\,. \tag{5.60}$$

Sukcesivnim ponavljanjem dobijaju se i ostale vrijednosti u prvoj iteraciji. Rezultati iterativnog procesa rješavanja dati su u tabeli 5.3.

Tabela 5.3. Vrijednosti dobijene Relaksacionom Gaus-Siedel-ovom shemom

iteracija	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1	25.000000	31.062500	37.142188	30.151602	26.149503
2	26.100497	34.194375	41.480925	35.905571	25.355629
3	24.419371	35.230346	42.914285	35.968342	25.167386
4	24.855114	35.692519	42.915308	35.790750	25.010375
5	24.987475	35.726188	42.875627	35.717992	24.996719
....	....				
11	24.999996	35.714285	42.857145	35.714287	25.000000
12	25.000000	35714286	42.857143	35.714286	25.000000
13	25.000000	35.714286	42.857143	35.714286	25.000000