

POGLAVLJE 6.

- 6.1 Rješavanje generalne transportne jednačine difuzije;
- 6.2 Granični uslovi;
- 6.3 Dirichlet-ovi granični uslovi;
- 6.4 Neumann-ovi granični uslovi;
- 6.5 Kombinovani granični uslovi;
- 6.6 Nestacionarna kondukcija;
- 6.7 Eksplicitna shema;
- 6.8 Implicitna shema;
- 6.9 Crank-Nicholson-ova shema;

6.1 Rješavanje generalne transportne jednačine difuzije

U ovom poglavlju biće razmotrena generalna jednačina kojom se opisuje proces koji se generalno može nazvati difuzija. Kada se koristi ovaj termin on se može primijeniti na prostiranje toplote kroz čvrsta tijela, zatim difuziju nekog elementa u rastvoru ili čvrstom materijalu i sl. Pored toga, jednačina difuzije ima primjenu i u elektrostatici, radijaciji i nekim djelovima fizike. Ovdje će biti razmotrena diskretizacija skalarne transportne jednačine za stacionarne i nestacionarne uslove. Posebna pažnja će biti usmjerena na pronalaženje odgovarajućih veza između članova diskretizovanih jednačina i ponašanja polaznih jednačina koje su opisane u prvom poglavlju. Metodologija koja će biti prikazana u ovom poglavlju može se lako primijeniti i na složene geometrije i uslove.

Posmatrajmo za početak generalnu transportnu difuzionu jednačinu za stacionarne uslove. Neka je ϕ generalna transportna funkcija koja se razmatra. Generalni oblik transportne jednačine (2.1) kada se zanemari konvekcija i nestacionarni član postaje

$$\nabla \cdot J = S, \quad (6.1)$$

gdje je $J=J_xi+J_yj$ vektor difuzije koji je definisan kao Fourier-ov zakon za prostiranje toplote, ili Fick-ov zakon za difuziju nekog elementa u složenom jedinjenju i sl. Generalni oblik se može pisati kao:

$$J = -\Gamma \nabla \phi, \tag{6.2}$$

i koristeći definiciju gradijenta u Dekartovim koordinatama:

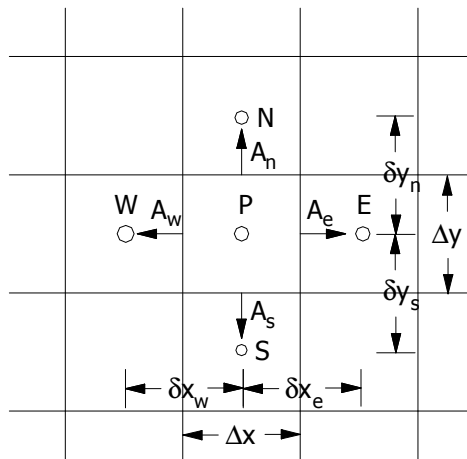
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j, \tag{6.3}$$

polazna jednačina (4.1) dobija oblik:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S = 0. \tag{6.4}$$

Ako je Γ konstantno i ako je $S=0$ jednačina postaje Laplasova, a ako je S različito od nule tada jednačina postaje Poisson-ova jednačina.

Na slici 6.1 prikazana je numerička mreža za diskretizaciju jednačine difuzije. Kao u poglavlju o numeričkim mrežama ova mreža je orijentisana na kontrolisane zapremine, tj. vrijednosti nepoznate funkcije (ϕ) se određuju u kontrolisanim zapreminama P,E,W,S,N. Takodje vrijednosti koeficijenta difuzije Γ takodje se određuju za kontrolisane zapremine. Stranice e, w, s, n određuju površine koje ograničavaju kontrolisanu zapreminu, dok su A_e, A_w, A_s i A_n vektori površina.



Slika 6.1. Dvodimenzijaska mreža za diskretizaciju difuzione jednačine metodom kontrolisane zapremine

Vektori površina su pozitivno orijentisani u odnosu na izlaz iz kontrolisane zapremine P. Zapremina kontrolisane zapremine ΔV sračunava se kao $\Delta V = \Delta x \Delta y$.

Proces diskretizacije počinje integracijom po zapremini jednačine 6.1. Dobija se da je:

$$\int_{\Delta V} \nabla \cdot J dV = \int_{\Delta V} S dV, \quad (6.5)$$

pa se primjenom Gaus-ove teoreme koja zapreminski integral pretvara u površinski poslednja jednačina pretvara u:

$$\int_A J dA = \int_{\Delta V} S dV. \quad (6.6)$$

Integral na lijevoj strani predstavlja integral po površini kontrolisane zapremine i predstavlja sumu integrala po površinama e,w,s,n. Sada je potrebno napraviti aproksimaciju za fluks J. Kao najjednostavnija pretpostavka može se uzeti da se fluks J mijenja linearno duž kontrolisanih zapremina, pa se na taj način lako određuje vrijednost na površini kontrolisane zapremine. Vrijednost izvornog člana u kontrolisanoj zapremini je srednja vrijednost \bar{S} . Primjenom jednačine (6.6) na kontrolisanu zapreminu P dobija se:

$$(J \cdot A)_e + (J \cdot A)_w + (J \cdot A)_s + (J \cdot A)_n = \bar{S} \Delta V, \quad (6.7)$$

a ako se zna da je $A_e = \Delta y$, $A_w = -\Delta y$, tada se dobija da je:

$$\begin{aligned} J_e \cdot A_e &= -\Gamma_e \Delta y \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \\ J_w \cdot A_w &= \Gamma_w \Delta y \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w, \end{aligned} \quad (6.8)$$

dok je analogno za drugi pravac y:

$$\begin{aligned} J_n \cdot A_n &= -\Gamma_n \Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n \\ J_s \cdot A_s &= \Gamma_s \Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Kao završna faza procesa diskretizacije slijedi aproksimacija parcijalnih izvoda u poslednje dvije jednačine. Kao najprostija pretpostavka uzima se da je promjena funkcije ϕ linearna izmedju kontrolisanih zapremina, pa se jednačine (6.8) mogu pisati kao:

$$\begin{aligned}
 J_e \cdot A_e &= -\Gamma_e \Delta y \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_e} \\
 J_w \cdot A_w &= \Gamma_w \Delta y \frac{\phi_P - \phi_W}{(\delta x)_w} \quad ,
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

dok se jednačine (4.9) transformišu u slične izraze:

$$\begin{aligned}
 J_s \cdot A_s &= -\Gamma_s \Delta x \frac{\phi_P - \phi_S}{(\delta y)_s} \\
 J_n \cdot A_n &= \Gamma_n \Delta x \frac{\phi_N - \phi_P}{(\delta y)_n} \quad .
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Izvorni član S također je potrebno definisati za svaku kontrolisanu zapreminu.

Obično se primjenjuje tzv. linearizacija izvornog člana kao:

$$\bar{S} = S_C + S_P \phi_P, \tag{6.12}$$

pa se smjenom jednačina (6.10), (6.11) i (6.12) u jednačinu (6.7) dobija se konačan izraz za vrijednost funkcije ϕ_P :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b, \tag{6.13}$$

gdje su:

$$\begin{aligned}
 a_E &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \\
 a_W &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \\
 a_S &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \\
 a_N &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \quad .
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_S + a_N - S_P \Delta x \Delta y$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y$$

Jednačina (6.14) može biti zapisana u kompaktnoj formi:

$$a_P \phi_P = \sum_i a_i \phi_i + b, \tag{6.15}$$

gdje indeks (i) označava susjedne kontrolisane zapremine E,W,S,N.

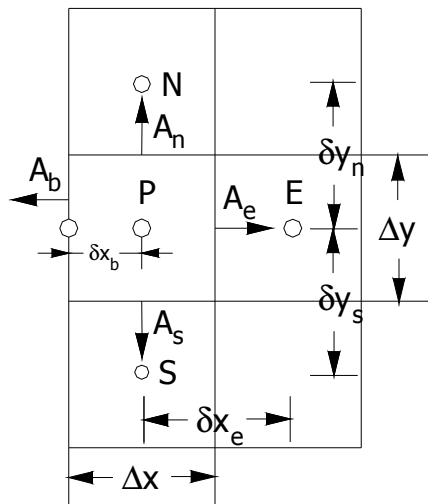
Konačno, sada kada je konačno dobijena diskretizovana jednačina za kontrolisanu zapreminu P potrebno je dati završnu diskusiju i zaključke, a koji se odnose na diskretizovanu jednačinu (6.15).

1. Dobijena diskretizovana jednačina dobijena je na osnovu bilansa flukseva za kontrolisanu zapreminu (P), što znači da je bilans funkcije ϕ zadovoljen za svaku od ćelija mreže. Međutim, to nije garantovano za cijeli domen, jer fluks na jednoj granici jedne kontrolisane zapremine je fluks na granici druge zapremine, tako da prije računa za neku od zapremina potrebno je tačno odrediti granične flukseve okolnih kontrolisanih zapremina;
2. Koeficijenti u jednačini (6.13) tj. (6.15) su istog znaka što je pozitivno sa stanovišta numeričkog rješavanja. Takođe, to ima fizičkog smisla. Tako na primjer ako neka od okolnih temperatura raste, za očekivati je da temperatura u tački P raste a ne opada. Mnoge sheme višeg reda nemaju ovu karakteristiku, što ne znači da nisu dobre već da nemaju ugrađen mehanizam koji je veoma bitan za fizičko razumijevanje problema;
3. Obično se zahtijeva da član S_P u jednačini (6.12) bude negativan, što takođe ima fizičkog smisla. Na primjer ako je S temperaturni izvor, obično nije poželjno da sa porastom temperature raste i vrijednost S nekontrolisano. Sa druge strane u izrazu za a_P u jednačini (6.14) poslednji član na desnoj strani će biti pozitivan, pa će član a_P biti veći od sume članova za okolne strane, što doprinosi stabilnosti iterativnog procesa rješavanja;

6.2 Granični uslovi

Tipična granična kontrolisana zapremina je prikazana na slici 6.2. Granična kontrolisana zapremina je ona kojoj je jedna ili više strana na granici domena. Vrijednosti funkcije ϕ se kao i ranije sračunavaju u centrima kontrolisanih zapremina. Za razliku od tipičnih kontrolisanih zapremina granične kontrolisane zapremine

sadrže i vrijednost funkcije ϕ na graničnoj površini. Razmotrimo za početak kontrolisanu zapreminu čija je lijeva strana granična i koja je označena sa (b). Vektor površine koji odgovara graničnoj površini neka je A_b , i usmjeren od tačke P prema granici.



Slika 6.2. Granična kontrolisana zapremina

Integracijom glavne jednačine dobija se jednačina slična jednačini (6.7):

$$(J \cdot A)_b + (J \cdot A)_e + (J \cdot A)_n + (J \cdot A)_s = \bar{S} \Delta V, \quad (6.16)$$

Vektor A_b se računa kao $A_b = -\Delta y i$, dok se vektor J_b na granici može sračunati kao:

$$J_b = -\Gamma_b \nabla \phi_b, \quad (6.17)$$

pa se prvi član na lijevoj strani jednačine (6.16) može pisati kao:

$$J_b \cdot A_b = \Delta y \Gamma_b \frac{(\phi_P - \phi_b)}{(\delta x)_b}. \quad (6.18)$$

Iz poslednje jednačine se vidi da je potrebno poznavati vrijednost funkcije ϕ na graničnoj površini, ili pak fluks J_b na graničnoj površini. U zavisnosti koji od ova dva podatka je poznat granični uslovi se dijele na nekoliko različitih tipova koji su prikazani u nastavku.

6.3 Dirichlet-ovi granični uslovi

Kada je na granici kontrolisane zapremine poznata vrijednost funkcije ϕ_b na osnovu koje se određuje fluks J_b , iz jednačine 6.16 dobija se sledeći izraz za vrijednost funkcije ϕ u tački P:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b, \quad (6.19)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \\ a_N &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \\ a_S &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \\ a_b &= \frac{\Gamma_b \Delta y}{(\delta x)_b} \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$a_P = a_E + a_N + a_S + a_b - S_P \Delta x \Delta y$$

$$b = a_b \phi_b + S_C \Delta x \Delta y$$

Iz poslednje jednačine proizilaze sledeće važne činjenice:

1. Za kontrolisanu zapreminu koja je granična sa Dirichlet-ovim graničnim uslovom važi da je $a_P > (a_E + a_N + a_S)$, što je važno sa stanovišta stabilnosti tokom iterativnog rešavanja;
2. Vrijednost funkcije ϕ_P je ograničena vrijednošću okolnih funkcija, uključujući i vrijednost ϕ_b koja u težinskom smislu ima veći uticaj od ostalih susjednih funkcija s obzirom da je δx_b duplo manje od iste vrijednosti za neku od ostale tri kontrolisane zapremine;

Primjer 6.1.

Neka je zadata pravougaona geometrija dimenzija $L_x \times L_y = 1 \times 1$, neka je koeficijent difuzije $\Gamma=1$ i neka su zadati granični uslovi $\Phi(0,y)=10.0$, $\Phi(x,0)=10.0$, $\Phi(L_x,y)=200.0$, $\Phi(x,L_y)=200.0$. Radi jednostavnosti posmatrajmo mrežu dimenzija $N_x \times N_y = 3 \times 3$, koja

obezbjeduje da je $\Delta x = \Delta y = 0.333$. Koeficijenti za sve kontrolisane zapremine date su u tabeli P6.1. Sistem od 9 jednačina sa 9 nepoznatih može se riješiti nekom od iterativnih metoda. U tabeli P6.2. date su vrijednosti tokom iterativnog rješavanja sistema jednačina Jacobi iteracionom shemom. Kao što se vidi vrijednosti funkcija u prvoj iteraciji promijenjene su samo za kontrolisane zapremine koje se nalaze u kontaktu sa graničnim površinama koje imaju vrijednost funkcije $\Phi_{gr} = 200.0$, a to su 3,6,7, 8 i 9.

Tabela P 6.1

	ae	aw	as	an
1	1.000	2.000	2.000	1.000
2	1.000	2.000	1.000	1.000
3	1.000	2.000	1.000	2.000
4	1.000	1.000	2.000	1.000
5	1.000	1.000	1.000	1.000
6	1.000	1.000	1.000	2.000
7	2.000	1.000	2.000	1.000
8	2.000	1.000	1.000	1.000
9	2.000	1.000	1.000	2.000

Tabela P 6.2

0	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1	10.000000	10.000000	73.333333	10.000000	10.000000	86.000000	73.333333	86.000000	136.666667
2	10.000000	22.666667	86.000000	22.666667	48.000000	124.000000	86.000000	124.000000	162.000000
3	14.222222	32.800000	94.444444	32.800000	73.333333	139.200000	94.444444	139.200000	174.666667
4	17.600000	40.400000	98.666667	40.400000	86.000000	148.488889	98.666667	148.488889	179.733333
5	20.133333	44.453333	101.481481	44.453333	94.444444	152.880000	101.481481	152.880000	182.829630
6	21.484444	47.211852	102.888889	47.211852	98.666667	155.751111	102.888889	155.751111	184.293333
7	22.403951	48.608000	103.827160	48.608000	101.481481	157.169778	103.827160	157.169778	185.250370
8	22.869333	49.542519	104.296296	49.542519	102.888889	158.111802	104.296296	158.111802	185.723259
9	23.180840	50.010904	104.609053	50.010904	103.827160	158.581689	104.609053	158.581689	186.037267
10	23.336968	50.323411	104.765432	50.323411	104.296296	158.894696	104.765432	158.894696	186.193896
11	23.441137	50.479739	104.869684	50.479739	104.609053	159.051125	104.869684	159.051125	186.298232
12	23.493246	50.583975	104.921811	50.583975	104.765432	159.155394	104.921811	159.155394	186.350375
13	23.527992	50.636098	104.956561	50.636098	104.869684	159.207524	104.956561	159.207524	186.385131
14	23.545366	50.670848	104.973937	50.670848	104.921811	159.242275	104.973937	159.242275	186.402508
15	23.556949	50.688223	104.985520	50.688223	104.956561	159.259651	104.985520	159.259651	186.414092
16	23.562741	50.699806	104.991312	50.699806	104.973937	159.271235	104.991312	159.271235	186.419884
17	23.566602	50.705598	104.995173	50.705598	104.985520	159.277027	104.995173	159.277027	186.423745
18	23.568533	50.709459	104.997104	50.709459	104.991312	159.280888	104.997104	159.280888	186.425676
19	23.569820	50.711390	104.998391	50.711390	104.995173	159.282818	104.998391	159.282818	186.426963
20	23.570463	50.712677	104.999035	50.712677	104.997104	159.284105	104.999035	159.284105	186.427606
21	23.570892	50.713320	104.999464	50.713320	104.998391	159.284749	104.999464	159.284749	186.428035
22	23.571107	50.713749	104.999678	50.713749	104.999035	159.285178	104.999678	159.285178	186.428250
23	23.571250	50.713964	104.999821	50.713964	104.999464	159.285393	104.999821	159.285393	186.428393
24	23.571321	50.714107	104.999893	50.714107	104.999678	159.285536	104.999893	159.285536	186.428464
25	23.571369	50.714178	104.999940	50.714178	104.999821	159.285607	104.999940	159.285607	186.428512
26	23.571393	50.714226	104.999964	50.714226	104.999893	159.285655	104.999964	159.285655	186.428536
27	23.571409	50.714250	104.999980	50.714250	104.999940	159.285679	104.999980	159.285679	186.428552
28	23.571417	50.714266	104.999988	50.714266	104.999964	159.285694	104.999988	159.285694	186.428560
29	23.571422	50.714274	104.999993	50.714274	104.999980	159.285702	104.999993	159.285702	186.428565
30	23.571425	50.714279	104.999996	50.714279	104.999988	159.285708	104.999996	159.285708	186.428567
31	23.571426	50.714282	104.999998	50.714282	104.999993	159.285710	104.999998	159.285710	186.428569
32	23.571427	50.714284	104.999999	50.714284	104.999996	159.285712	104.999999	159.285712	186.428570
33	23.571428	50.714284	104.999999	50.714284	104.999998	159.285713	104.999999	159.285713	186.428571
34	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	104.999999	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571

U tabeli 6.3 date su vrijednosti funkcija u svim kontrolisanim zapreminama kada se umjesto Jacobi upotrijebi Gaus-Siedel-ova iteraciona shema. Kao što je iz tabele vidljivo broj iteracija je znatno manji (19) u poređenju sa Jacobi shemom, dok je krajnji rezultat isti što se vidi iz poslednje vrste u obje tabele. Konačno ako se primijeni SOR iterativni metod broj iteracija se može dodatno smanjiti jer sve vrijednosti u domenu imaju tendenciju rasta jer su vrijednosti funkcija na dvije granične površine jednake 200. U tabeli P 4.4. date su vrijednosti funkcija u svim tačkama tokom procesa iterativnog rješavanja sistema jednačina kada je koeficijent nadrelaksacije $\omega=1.2$. Broj iteracija je dodatno smanjen na 15.

Tabela P 6.3

0	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1	10.000000	10.000000	73.333333	10.000000	10.000000	98.666667	73.333333	98.666667	166.222222
2	10.000000	22.666667	90.222222	22.666667	60.666667	143.422222	90.222222	143.422222	181.140741
3	14.222222	37.022222	100.074074	37.022222	90.222222	154.287407	100.074074	154.287407	184.762469
4	19.007407	45.860741	103.358025	45.860741	100.074074	157.638914	103.358025	157.638914	185.879638
5	21.953580	49.077136	104.452675	49.077136	103.358025	158.738067	104.452675	158.738067	186.246022
6	23.025712	50.167282	104.817558	50.167282	104.452675	159.103251	104.817558	159.103251	186.367750
7	23.389094	50.531865	104.939186	50.531865	104.817558	159.224899	104.939186	159.224899	186.408300
8	23.510622	50.653473	104.979729	50.653473	104.939186	159.265443	104.979729	159.265443	186.421814
9	23.551158	50.694015	104.993243	50.694015	104.979729	159.278957	104.993243	159.278957	186.426319
10	23.564672	50.707529	104.997748	50.707529	104.993243	159.283462	104.997748	159.283462	186.427821
11	23.569176	50.712033	104.999249	50.712033	104.997748	159.284963	104.999249	159.284963	186.428321
12	23.570678	50.713535	104.999750	50.713535	104.999249	159.285464	104.999750	159.285464	186.428488
13	23.571178	50.714035	104.999917	50.714035	104.999750	159.285631	104.999917	159.285631	186.428544
14	23.571345	50.714202	104.999972	50.714202	104.999917	159.285686	104.999972	159.285686	186.428562
15	23.571401	50.714258	104.999991	50.714258	104.999972	159.285705	104.999991	159.285705	186.428568
16	23.571419	50.714276	104.999997	50.714276	104.999991	159.285711	104.999997	159.285711	186.428570
17	23.571425	50.714283	104.999999	50.714283	104.999997	159.285713	104.999999	159.285713	186.428571
18	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	104.999999	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
19	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571

Tabela P 6.4

0	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1	10.000000	10.000000	86.000000	10.000000	10.000000	119.440000	86.000000	119.440000	205.776000
2	10.000000	28.240000	96.336000	28.240000	86.608000	165.404800	96.336000	165.404800	185.006720
3	17.296000	47.209600	107.255680	47.209600	110.247040	159.521306	107.255680	159.521306	186.807178
4	23.424640	53.180646	105.089254	53.180646	105.571763	159.488106	105.089254	159.488106	186.433807
5	24.587331	50.623474	105.004465	50.623474	104.952595	159.236187	105.004465	159.236187	186.407713
6	23.331924	50.664661	104.979277	50.664661	104.949990	159.273638	104.979277	159.273638	186.427912
7	23.599480	50.713967	105.001666	50.713967	105.002565	159.288987	105.001666	159.288987	186.430012
8	23.565691	50.713988	105.000262	50.713988	105.001272	159.285774	105.000262	159.285774	186.428307
9	23.572457	50.714960	105.000094	50.714960	105.000186	159.285706	105.000094	159.285706	186.428621
10	23.571493	50.714233	104.999969	50.714233	104.999927	159.285703	104.999969	159.285703	186.428557
11	23.571395	50.714263	104.999999	50.714263	104.999994	159.285712	104.999999	159.285712	186.428573
12	23.571426	50.714288	105.000000	50.714288	105.000001	159.285716	105.000000	159.285716	186.428572
13	23.571430	50.714286	105.000000	50.714286	105.000001	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
14	23.571428	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
15	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571

6.4 Neumann-ovi granični uslovi

Na graničnoj površini može biti zadat i fluks umjesto vrijednosti funkcije.

Tada važi:

$$-(\Gamma \nabla \phi)_b \cdot i = q_b, \quad (6.21)$$

pa će prvi član u jednačini (4.16) biti:

$$J_b \cdot A_b = -q_b \Delta y. \quad (6.22)$$

Kao i u prethodnom slučaju jednačina (4.16) se prevodi slično u jednačinu za određivanje vrijednosti funkcije ϕ_P :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b, \quad (6.23)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \\ a_N &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \\ a_S &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$a_P = a_E + a_N + a_S - S_P \Delta x \Delta y$$

$$b = q_b \Delta y + S_C \Delta x \Delta y$$

Kao i kod Dirichlet-ovih uslova i ovdje se mogu usvojiti određeni zaključci:

1. $a_P = (a_E + a_N + a_S)$ kada je $S = 0$.
2. Ako je fluks na granici $q_b = 0$ i ako nema izvornog člana vrijednost funkcije ϕ_P je ograničena vrijednošću susjednih zapremina, a u suprotnom može rasti ili opadati što ima fizičkog smisla.
3. Jednom kada se izračuna ϕ_P može se odrediti vrijednost funkcije na graničnoj površini iz jednačine (4.18):

$$\phi_b = \frac{q_b + (\Gamma_b / \delta x_b) \phi_P}{(\Gamma_b / \delta x_b)}, \quad (6.25)$$

Primjer 6.2.

Neka je za istu geometriju kao iz primjera 4.1 umjesto Dirichlet-ovih graničnih uslova na svim stranama, na jednoj strani zadat fluks $q(0,y)=-20$. Ostali granični uslovi neka su isti kao i ranije tj. $\Phi(x,0)=10.0, \Phi(L_x,y)=200.0, \Phi(x,L_y)=200.0$. Koeficijenti za sve kontrolisane zapremine su isti kao u prethodnom primjeru a dati su u tabeli P6.1. Kao i ranije sistem od 9 jednačina sa 9 nepoznatih riješen je sa tri iteracione sheme: Jacobi, Gaus-Siedel i SOR shemom, a rezultati su dati respektivno redom u tabelama P6.5, P6.6 i P6.7. Usljed pojave negativnog fluksa na lijevoj strani vrijednosti u kontrolisanim zapreminama uz lijevu stranu domena su nešto veće, što ima fizičkog smisla. Broj iteracija za Gaus-Siedel-ovu shemu kao i SOR shemu je manji kao i kod prethodnog primjera.

Tabela P6.5

0	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1	8.333333	7.777778	103.333333	10.000000	10.000000	86.000000	73.333333	86.000000	136.666667
2	7.777778	38.333333	121.777778	22.333333	47.444444	130.000000	86.000000	124.000000	162.000000
3	18.500000	56.777778	140.416667	32.244444	78.666667	146.244444	94.388889	139.088889	175.666667
4	25.588889	76.972222	149.088889	42.311111	93.588889	158.950000	98.555556	149.744444	180.888889
5	33.154167	87.200000	157.313889	47.546667	106.994444	164.713333	102.009259	154.606667	184.782407
6	37.020000	96.931944	161.311667	52.431574	113.516667	169.818148	103.692222	158.757222	186.553333
7	40.674213	101.727222	165.020856	54.845778	119.484722	172.276333	105.198133	160.752444	188.095895
8	42.476583	106.171042	166.834222	57.071414	122.400444	174.520295	105.933037	162.555750	188.838130
9	44.143947	108.348194	168.506167	58.162013	125.079625	175.614559	106.604527	163.434322	189.512674
10	44.960885	110.354358	169.324022	59.165620	126.389772	176.619693	106.932723	164.239365	189.841480
11	45.713328	111.336004	170.076846	59.656676	127.594759	177.111055	107.234164	164.632795	190.143176
12	46.081503	112.239422	170.445098	60.108450	128.184133	177.562956	107.381578	164.994420	190.290642
13	46.420301	112.681356	170.783928	60.329443	128.726312	177.783974	107.517145	165.171271	190.426229
14	46.586033	113.087958	170.949666	60.532752	128.991511	177.987294	107.583452	165.333937	190.492541
15	46.738511	113.286848	171.102146	60.632199	129.235485	178.086744	107.644448	165.413501	190.553539
16	46.813095	113.469825	171.176731	60.723689	129.354823	178.178234	107.674283	165.486694	190.583374
17	46.881712	113.559327	171.245348	60.768440	129.464611	178.222986	107.701731	165.522496	190.610821
18	46.915275	113.641668	171.278912	60.809611	129.518312	178.264156	107.715156	165.555433	190.624247
19	46.946153	113.681944	171.309789	60.829749	129.567717	178.284294	107.727507	165.571543	190.636598
20	46.961257	113.718997	171.324893	60.848275	129.591883	178.302821	107.733549	165.586364	190.642640
21	46.975152	113.737122	171.338788	60.857338	129.614115	178.311883	107.739107	165.593614	190.648198
22	46.981948	113.753796	171.345585	60.865675	129.624989	178.320220	107.741825	165.600284	190.650916
23	46.988201	113.761952	171.351837	60.869753	129.634994	178.324298	107.744326	165.603546	190.653417
24	46.991259	113.769455	171.354896	60.873504	129.639887	178.328050	107.745550	165.606547	190.654641
25	46.994073	113.773125	171.357709	60.875339	129.644389	178.329885	107.746675	165.608016	190.655766
26	46.995449	113.776502	171.359086	60.877027	129.646591	178.331573	107.747226	165.609366	190.656317
27	46.996716	113.778153	171.360352	60.877853	129.648617	178.332399	107.747732	165.610027	190.656823
28	46.997335	113.779673	171.360971	60.878613	129.649608	178.333158	107.747980	165.610634	190.657071
29	46.997905	113.780416	171.361541	60.878985	129.650520	178.333530	107.748208	165.610932	190.657299
30	46.998183	113.781100	171.361820	60.879326	129.650966	178.333872	107.748319	165.611205	190.657410
31	46.998440	113.781434	171.362076	60.879494	129.651376	178.334039	107.748422	165.611339	190.657513
32	46.998565	113.781742	171.362202	60.879648	129.651576	178.334193	107.748472	165.611462	190.657563
33	46.998681	113.781892	171.362317	60.879723	129.651761	178.334268	107.748518	165.611522	190.657609
34	46.998737	113.782031	171.362373	60.879792	129.651851	178.334337	107.748541	165.611578	190.657632
35	46.998789	113.782098	171.362425	60.879826	129.651934	178.334371	107.748562	165.611605	190.657653
36	46.998814	113.782161	171.362451	60.879857	129.651975	178.334402	107.748572	165.611630	190.657663
37	46.998838	113.782191	171.362474	60.879872	129.652012	178.334418	107.748581	165.611642	190.657672
38	46.998849	113.782219	171.362486	60.879886	129.652031	178.334432	107.748586	165.611653	190.657677
39	46.998860	113.782233	171.362496	60.879893	129.652048	178.334439	107.748590	165.611659	190.657681
40	46.998865	113.782246	171.362501	60.879899	129.652056	178.334445	107.748592	165.611664	190.657683
41	46.998870	113.782252	171.362506	60.879903	129.652063	178.334448	107.748594	165.611666	190.657685
42	46.998872	113.782257	171.362508	60.879905	129.652067	178.334451	107.748595	165.611668	190.657686
43	46.998874	113.782260	171.362510	60.879907	129.652071	178.334452	107.748596	165.611670	190.657687
44	46.998875	113.782263	171.362511	60.879908	129.652072	178.334453	107.748596	165.611671	190.657687
45	46.998876	113.782264	171.362512	60.879909	129.652074	178.334454	107.748596	165.611671	190.657687
46	46.998876	113.782265	171.362513	60.879909	129.652074	178.334455	107.748597	165.611671	190.657688
47	46.998877	113.782266	171.362513	60.879910	129.652075	178.334455	107.748597	165.611672	190.657688

Tabela P6.6

0	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1	8.333333	7.222222	102.638889	9.666667	9.222222	104.372222	73.277778	98.500000	167.145370
2	7.555556	37.583333	133.822222	22.011111	65.616667	153.316852	90.085185	144.569444	182.981049
3	18.231944	70.334722	154.246227	38.786759	101.751944	167.795844	100.559367	157.058472	187.475719
4	30.613704	93.315069	163.611062	50.585003	117.188597	173.655076	104.607246	161.854312	189.251565
5	39.308351	104.480448	167.867214	56.220839	124.052669	176.234290	106.345859	163.930018	190.027385
6	43.508655	109.587290	169.788728	58.781436	127.133259	177.389874	107.118576	164.855844	190.374286
7	45.425515	111.893612	170.654205	59.935470	128.518700	177.909438	107.465219	165.271641	190.530180
8	46.290604	112.932281	171.043763	60.454905	129.142066	178.143202	107.621091	165.458667	190.600312
9	46.680130	113.399764	171.219075	60.688657	129.422573	178.248392	107.691221	165.542821	190.631869
10	46.855439	113.610140	171.297966	60.793846	129.548800	178.295727	107.722778	165.580689	190.646069
11	46.934330	113.704810	171.333468	60.841182	129.605602	178.317028	107.736978	165.597730	190.652460
12	46.969831	113.747411	171.349443	60.862482	129.631163	178.326613	107.743369	165.605398	190.655335
13	46.985807	113.766582	171.356632	60.872068	129.642665	178.330927	107.746244	165.608849	190.656629
14	46.992996	113.775209	171.359867	60.876381	129.647841	178.332868	107.747538	165.610402	190.657212
15	46.996231	113.779091	171.361323	60.878322	129.650171	178.333741	107.748121	165.611101	190.657474
16	46.997687	113.780838	171.361978	60.879196	129.651219	178.334134	107.748383	165.611415	190.657592
17	46.998342	113.781624	171.362273	60.879589	129.651690	178.334311	107.748501	165.611557	190.657645
18	46.998636	113.781978	171.362405	60.879765	129.651903	178.334391	107.748554	165.611620	190.657668
19	46.998769	113.782137	171.362465	60.879845	129.651998	178.334426	107.748578	165.611649	190.657679
20	46.998829	113.782209	171.362492	60.879881	129.652041	178.334442	107.748588	165.611662	190.657684
21	46.998856	113.782241	171.362504	60.879897	129.652060	178.334450	107.748593	165.611668	190.657686
22	46.998868	113.782255	171.362510	60.879904	129.652069	178.334453	107.748595	165.611670	190.657687
23	46.998873	113.782262	171.362512	60.879908	129.652073	178.334454	107.748596	165.611671	190.657688
24	46.998876	113.782265	171.362513	60.879909	129.652075	178.334455	107.748597	165.611672	190.657688
25	46.998877	113.782266	171.362514	60.879910	129.652076	178.334455	107.748597	165.611672	190.657688
26	46.998877	113.782267	171.362514	60.879910	129.652076	178.334456	107.748597	165.611672	190.657688

Tabela P6.7

0	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1	8.000000	6.533333	120.960000	9.520000	8.816000	127.546240	85.904000	119.132800	207.335808
2	7.216000	50.823467	147.318912	27.360640	95.695744	178.574863	96.117888	167.969306	187.841672
3	26.012032	94.779315	170.542471	51.606031	128.739706	177.194751	108.691490	164.471627	190.764941
4	42.713198	115.175620	171.602617	61.713448	129.818693	178.685750	107.498717	165.845439	190.753250
5	48.524081	114.276366	171.568111	61.059268	129.996308	178.419091	107.881198	165.702294	190.673627
6	46.895874	113.862178	171.370758	60.933758	129.675934	178.329059	107.750971	165.603669	190.651820
7	47.059606	113.803417	171.365591	60.890011	129.652660	178.335005	107.748542	165.611991	190.659035
8	46.996107	113.778393	171.360901	60.877352	129.650291	178.333853	107.748160	165.611398	190.657243
9	46.997502	113.781132	171.362315	60.879558	129.651725	178.334337	107.748559	165.611527	190.657724
10	46.998707	113.782206	171.362500	60.879846	129.652030	178.334473	107.748563	165.611691	190.657688
11	46.998874	113.782254	171.362518	60.879903	129.652090	178.334456	107.748606	165.611674	190.657689
12	46.998872	113.782275	171.362516	60.879916	129.652078	178.334457	107.748597	165.611672	190.657688
13	46.998883	113.782269	171.362515	60.879911	129.652077	178.334456	107.748597	165.611672	190.657688
14	46.998877	113.782267	171.362514	60.879910	129.652076	178.334456	107.748597	165.611672	190.657688
15	46.998878	113.782267	171.362514	60.879910	129.652076	178.334456	107.748597	165.611672	190.657688

6.5 Kombinovani granični uslovi

Na graničnoj površini može biti zadat granični uslov u sledećem obliku:

$$-(\Gamma \nabla \phi)_b \cdot i = h_b (\phi_\infty - \phi_b), \quad (6.26)$$

tj. ako se uzme definicija vektora površine A_b prethodna jednačina može se transformisati u sledeći oblik:

$$J_b A_b = -h_b (\phi_\infty - \phi_b) \Delta y, \quad (6.27)$$

i ako se uzme u obzir jednačina (6.18) dobija se izraz za određivanje granične vrijednosti funkcije ϕ_b :

$$\phi_b = \frac{h_b \phi_\infty + (\Gamma_b / \delta x_b) \phi_P}{h_b + (\Gamma_b / \delta x_b)} \quad (6.28)$$

Ako se poslednji izraz iskoristi za eliminaciju ϕ_b iz jednačine (6.27) dobija se:

$$J_b A_b = -R_{eq} (\phi_\infty - \phi_P) \Delta y, \quad (6.29)$$

gdje je:

$$R_{eq} = \frac{h_b (\Gamma_b / \delta x_b)}{h_b + (\Gamma_b / \delta x_b)}. \quad (6.30)$$

Sada konačno se može diskretizovati jednačina (6.16). Zamjenom jednačine (6.29) u jednačinu (6.16) dobija se kao i prije:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b, \quad (6.31)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \\ a_N &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \\ a_S &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \\ a_b &= R_{eq} \Delta y \\ a_P &= a_E + a_N + a_S + a_b - S_P \Delta x \Delta y \\ b &= R_{eq} \Delta y \phi_\infty + S_C \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (6.32)$$

Kao i za prethodna dva slučaja i za ovaj tip graničnih uslova mogu se izvesti određeni zaključci:

1. $a_P > (a_E + a_N + a_S)$ važi za granični element ako je $S=0$. Dakle slična priča važi kao i za Dirichlet-ove granične uslove;
2. Vrijednost funkcije ϕ_P u graničnim ćelijama je ograničena vrijednostima ϕ_E , ϕ_N , ϕ_S i ϕ_∞ ;
3. Granična vrijednost funkcije ϕ_b može se sračunati nakon što se odrede vrijednosti funkcije u polju, iz jednačine (6.28);

Primjer 6.3.

Neka je geometrija za primjer sa kombinovanim graničnim uslovom ista kao za dva prethodna primjera. Na lijevoj granici neka je zadato $h_b=1000$ i neka je $\Phi_{\infty}=0.0$ Ostali granični uslovi neka su isti kao i ranije tj. $\Phi(x,0)=10.0$, $\Phi(L_x,y)=200.0$, $\Phi(x,L_y)=200.0$. Kao i ranije koeficijenti za sve kontrolisane zapremine su isti kao u prethodnom primjeru a dati su u tabeli P6.1. Sistem od 9 jednačina sa 9 nepoznatih riješen je sa Gaus-Siedel-ovom shemom, a rezultati su dati tabeli P6.8. Uslije pojave negativnog fluksa na lijevoj strani vrijednosti u kontrolisanim zapreminama uz lijevu stranu domena su nešto veće, što ima fizičkog smisla. Broj iteracija za Gaus-Siedel-ovu shemu kao i SOR shemu je manji kao i kod prethodnog primjera.

Tabela P4.8

0	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1	6.679947	5.348750	69.362690	9.335989	8.671185	97.606775	73.222665	98.378770	165.997591
2	5.792305	16.805328	85.906138	21.537231	58.582026	142.097151	89.986000	142.913123	180.835046
3	9.743130	30.920024	95.693107	35.662231	87.898132	152.885257	99.762559	153.699147	184.430734
4	14.459122	39.704795	98.961752	44.423963	97.678291	156.214155	103.020518	157.025909	185.540011
5	17.389364	42.908247	100.052646	47.617635	100.941486	157.306829	104.107257	158.117751	185.904097
6	18.457675	43.995320	100.416660	48.701284	102.030296	157.670211	104.469839	158.480846	186.025176
7	18.820183	44.359255	100.538121	49.064064	102.393594	157.791378	104.590818	158.601918	186.065549
8	18.941544	44.480769	100.578649	49.185191	102.514814	157.831802	104.631185	158.642310	186.079019
9	18.982064	44.521319	100.592171	49.225613	102.555261	157.845290	104.644654	158.655787	186.083513
10	18.995587	44.534850	100.596683	49.239100	102.568757	157.849791	104.649148	158.660283	186.085012
11	19.000099	44.539365	100.598189	49.243601	102.573260	157.851292	104.650647	158.661784	186.085513
12	19.001604	44.540871	100.598691	49.245102	102.574762	157.851793	104.651148	158.662285	186.085680
13	19.002106	44.541374	100.598859	49.245603	102.575264	157.851960	104.651315	158.662452	186.085735
14	19.002274	44.541541	100.598915	49.245770	102.575431	157.852016	104.651370	158.662507	186.085754
15	19.002330	44.541597	100.598933	49.245826	102.575487	157.852035	104.651389	158.662526	186.085760
16	19.002349	44.541616	100.598940	49.245845	102.575505	157.852041	104.651395	158.662532	186.085762
17	19.002355	44.541622	100.598942	49.245851	102.575512	157.852043	104.651397	158.662534	186.085763
18	19.002357	44.541624	100.598942	49.245853	102.575514	157.852044	104.651398	158.662535	186.085763
19	19.002358	44.541625	100.598943	49.245854	102.575514	157.852044	104.651398	158.662535	186.085763

6.6 Nestacionarna kondukcija

Sada kada je detaljno objašnjena diskretizacija difuzione jednačine za stacionarne uslove, razmotrimo diskretizaciju nestacionarnog člana. Difuziona jednačina koja podrazumijeva nestacionarne uslove ima oblik:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot J = S, \quad (6.33)$$

i neka su poznati tzv. početni uslovi tj. $\phi(x,y,0)$. Vrijeme predstavlja tzv. marširajuću koordinatu. Poznavajući početne uslove, i usvajanjem diskretnog vremenskog koraka

integracije Δt , potrebno je odrediti polje funkcije ϕ u zadatom geometrijskom domenu u svakom vremenskom trenutku.

U cilju diskretizacije jednačine (6.33) potrebno je izvršiti integraciju po zapremini ΔV kao i ranije. Pored toga vrši se i integracija u vremenu od t do $t+\Delta t$.

$$\iint_{\Delta t, \Delta V} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dV dt + \iint_{\Delta t, \Delta V} \nabla \cdot J dV dt = \iint_{\Delta t, \Delta V} S dV dt, \quad (6.34)$$

odakle se primjenom Gausove teoreme o vezi površinskog i zapreminskog integrala može dobiti:

$$\int_{\Delta V} ((\rho\phi)^1 - (\rho\phi)^0) \cdot dV + \iint_{\Delta t, A} J dA dt = \iint_{\Delta t, \Delta V} S dV dt. \quad (6.35)$$

Gornji indeksi 1 i 0 označavaju vremenske trenutke $t+\Delta t$ i t redom posmatrano. Ako se izvrši osrednjavanje po zapremini može se pisati da je:

$$\int_{\Delta V} \rho\phi \cdot dV = (\rho\phi)_p \cdot \Delta V, \quad (6.36)$$

pa se nestacionarni član u jednačini (4.35) može pisati kao:

$$\int_{\Delta V} ((\rho\phi)^1 - (\rho\phi)^0) \cdot dV = ((\rho\phi)_p^1 - (\rho\phi)_p^0) \cdot \Delta V. \quad (6.37)$$

Vratimo se sada članovima koji su vezani za flukseve. Kao i prije ako se pretpostavi da se fluksevi na granicama sračunavaju na račun vrijednosti u zapreminama može se pisati:

$$\iint_{\Delta t, A} J dA dt = \int \sum_{\Delta t f=e,w,s,n} J_f A_f dt. \quad (6.38)$$

Sada je potrebno napraviti aproksimaciju za vektor fluksa J u vremenskoj skali. Pretpostavimo da se fluks može aproksimirati između t i $t+\Delta t$ preko težinskog faktora f tako da važi:

$$\int_{\Delta t} J A dt = (f \cdot J^1 A + (1-f) \cdot J^0 A) \Delta t, \quad (6.39)$$

gdje gornji indeksi 1 i 0 označavaju posmatrani i prethodni vremenski trenutak respektivno. Fluksevi J^1 i J^0 mogu se aproksimirati linearnom aproksimacijom, kao i kod stacionarnog slučaja na osnovu vrijednosti između susjednih kontrolisanih zapremina kao:

$$\begin{aligned}
J_e^1 \cdot A_e &= -\Gamma_e \frac{(\phi_E^1 - \phi_P^1)}{(\delta x)_e} \Delta y \\
J_w^1 \cdot A_w &= \Gamma_w \frac{(\phi_P^1 - \phi_w^1)}{(\delta x)_w} \Delta y \\
J_s^1 \cdot A_s &= \Gamma_s \frac{(\phi_P^1 - \phi_S^1)}{(\delta y)_s} \Delta x \quad , \\
J_n^1 \cdot A_n &= -\Gamma_n \frac{(\phi_N^1 - \phi_P^1)}{(\delta y)_n} \Delta x
\end{aligned} \tag{6.40}$$

i za prethodni vremenski trenutak:

$$\begin{aligned}
J_e^0 \cdot A_e &= -\Gamma_e \frac{(\phi_E^0 - \phi_P^0)}{(\delta x)_e} \Delta y \\
J_w^0 \cdot A_w &= \Gamma_w \frac{(\phi_P^0 - \phi_w^0)}{(\delta x)_w} \Delta y \\
J_s^0 \cdot A_s &= \Gamma_s \frac{(\phi_P^0 - \phi_S^0)}{(\delta y)_s} \Delta x \quad . \\
J_n^0 \cdot A_n &= -\Gamma_n \frac{(\phi_N^0 - \phi_P^0)}{(\delta y)_n} \Delta x
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Konačno na kraju razmotrimo diskretizaciju izvornog člana. Kao i ranije ako se S zamijeni sa $S_C + S_P \phi$ intergal po zapremini je:

$$\int_{\Delta V} (S_C + S_P \phi_P) \cdot dV = (S_C + S_P \phi_P) \Delta V \quad , \tag{6.42}$$

pa se dvostruki integral koji je predstavljen na desnoj strani jednačine (6.35) može pisati kao:

$$\iint_{\Delta t, \Delta V} S dV dt = \int_{\Delta t} (S_C + S_P \phi_P) \Delta V dt \quad . \tag{6.43}$$

Kao i za flukseve ako se izvrši aproksimacija između t i $t + \Delta t$, koristeći težinski faktor f koji ima vrijednost između 0 i 1 može se pisati:

$$\int_{\Delta t} (S_C + S_P \phi_P) \Delta V dt = f \cdot (S_C + S_P \phi_P)^1 \Delta V \Delta t + (1 - f) \cdot (S_C + S_P \phi_P)^0 \Delta V \Delta t \quad . \tag{6.44}$$

Radi jednostavnosti zadržimo samo gornji indeks 0 koji predstavlja prethodni vremenski trenutak, dok se indeks 1 koji predstavlja tekući vremenski trenutak izostavlja podrazumijevajući da su vrijednosti funkcije ϕ vrijednosti za posmatrani trenutak. Primjenom jednačina (6.37), (6.40), (6.41) i (6.44) u polaznu jednačinu o balansu fluksa (6.34) dobija se izraz za vrijednost funkcije ϕ_P kao:

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} (f \phi_{nb} + (1-f) \phi_{nb}^0) + b + \left(a_P^0 - (1-f) \sum_{nb} a_{nb} \right) \phi_P^0, \quad (6.45)$$

gdje indeks nb označava orijentacije susjednih zapremina E,W,S,N. Koeficijenti a_{nb} i član b se sračunavaju kao:

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \\ a_W &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \\ a_S &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \\ a_N &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \\ a_P^0 &= \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} \\ a_P &= f \sum_{nb} a_{nb} - f \cdot S_P \Delta x \Delta y + a_P^0 \\ b &= (f \cdot S_C + (1-f) \cdot S_C^0 + (1-f) \cdot S_P^0 \cdot \phi_P^0) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (6.46)$$

U nastavku biće elaborirana poslednja jednačina za tri različita slučaja što se tiče težinskog člana f na osnovu kojeg se vrši aproksimacija vrijednosti funkcije ϕ između vremena t i t+ Δt .

6.7 EksPLICITNA shema

Kada se uzme da je f=0 dobija se tzv. eksPLICITNA shema. To praktično znači da se vrijednosti fluksa i izvornih članova u određenom vremenskom trenutku t

sračunava isključivo na osnovu vrijednosti iz prethodnog vremenskog trenutka t^0 . U tom slučaju jednačina (6.45) dobija sledeći oblik:

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb}^0 + b + \left(a_P^0 - \sum_{nb} a_{nb} \right) \phi_P^0, \quad (6.47)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \\ a_W &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \\ a_S &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \\ a_N &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \\ a_P &= a_P^0 = \frac{\rho \Delta x \Delta y}{\Delta t} \\ b &= (S_C^0 + S_P^0 \cdot \phi_P^0) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (6.48)$$

Neke karakteristike eksplicitne sheme mogu se primijetiti i biće izložene u nastavku.

1. Na desnoj strani jednačine (6.47) nalaze se isključivo članovi koji su vezani za prethodni vremenski trenutak, tako da se vrijednosti funkcije ϕ mogu sračunati direktno bez iterativnog postupka;
2. Kada $\Delta t \rightarrow \infty$ dobijaju se jednačine kao za stacionarni slučaj. Kao posledica imamo činjenicu da za dovoljno dugo vrijeme posmatranja možemo odrediti stacionarno stanje i jednačinama napisanim za nestacionarni slučaj;
3. Eksplicitna shema je u skladu sa pretpostavkom da vrijednost funkcije ϕ_P^0 preovlađuje u vremenskom intervalu Δt ;

Ovaj tip sheme je veoma jednostavan i veoma se često koristi u mnogim CFD modelima. Bez obzira na to ova shema ima i ozbiljne nedostatke. Poslednji član na desnoj strani jednačine (6.45) može biti negativan ako je:

$$a_p^0 < \sum_{nb} a_{nb} . \quad (6.49)$$

Ako je posljednja jednačina zadovoljena može se desiti da povećanjem vrijednosti funkcije u prethodnom vremenskom trenutku dolazi do smanjivanja u posmatranom, što nije u skladu sa fizikom problema. Ovaj se problem može prevazići ako se zahtijeva da je $a_p^0 > \sum_{nb} a_{nb}$. Za uniformnu mrežu ovaj se uslov može preformulisati za jednodimenzionu, dvodimenzionu i trodimenzionu mrežu:

$$\begin{aligned} \Delta t &\leq \frac{\rho(\Delta x)^2}{2\Gamma} \\ \Delta t &\leq \frac{\rho(\Delta x)^2}{4\Gamma} . \\ \Delta t &\leq \frac{\rho(\Delta x)^2}{6\Gamma} \end{aligned} \quad (6.50)$$

Uslovi opisani poslednjom jednačinom često se zovu Neumann-ovi uslovi stabilnosti. Oni zahtijevaju da vremenski korak integracije bude limitiran sa kvadratom dimenzije ćelije. Za veoma sitne mreže zahtijeva se veoma mali vremenski korak integracije što dovodi do drastičnog povećavanja kompjuterskog vremena.

Primjer 6.4.

Uzmimo za primjer geometriju domena kao u primjeru 6.1 i neka su zadate granične vrijednosti funkcija $\Phi(0,y)=10.0$, $\Phi(x,0)=10.0$, $\Phi(L_x,y)=200.0$, $\Phi(x,L_y)=200.0$. Kao početni uslov potrebno je zadati vrijednost funkcije u domenu u početnom trenutku. Neka je $\Phi(0,y,t)=10.0$. Neka je gustina materije $\rho=1$. Kao i ranije razmotrimo mrežu dimenzije $N_x \times N_y = 3 \times 3$, koja obezbjeđuje da je $\Delta x = \Delta y = 0.333$. Pored koeficijenata a_E , a_W , a_S i a_N potrebno je još definisati i koeficijent a_P^0 . Medjutim da bi se on odredio potrebno je definisati vremenski korak integracije da bi bio zadovoljen Neumann-ov kriterijum stabilnosti dat izrazima (6.50). Za usvojenu mrežu dobija se da je:

$$\frac{\rho(\Delta x)^2}{4\Gamma} = \frac{1 \cdot (0.333)^2}{4 \cdot 1} = 0.027778 , \quad (P1)$$

pa se može usvojiti $\Delta t = 0.02$. Tada se dobija da je:

$$a_p^0 = \frac{\rho \Delta x \Delta y}{\Delta t} = 5.5555, \quad (P2)$$

Koeficijenti a_E , a_W , a_S , a_N za sve kontrolisane zapremine isti su kao i za prethodne slučajeve i dati su u tabeli P6.1. Sistem od 9 jednačina sa 9 nepoznatih rješava se nekom od iterativnih metoda. U tabeli P6.9. date su vrijednosti tokom procesa rješavanja za sve vremenske trenutke.

Tabela P6.9

0.00	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
0.02	10.000000	10.000000	78.400000	10.000000	10.000000	78.400000	78.400000	78.400000	146.800000
0.04	10.000000	22.312000	85.240000	22.312000	34.624000	122.176000	85.240000	122.176000	160.480000
0.06	14.432320	29.206720	94.788640	29.206720	61.710400	134.679520	94.788640	134.679520	175.144960
0.08	16.559834	37.288317	97.516432	37.288317	76.277958	145.163872	97.516432	145.163872	178.473030
0.10	19.299007	41.592592	100.640079	41.592592	87.040616	149.924523	100.640079	149.924523	181.981151
0.12	20.629413	45.015606	102.021874	45.015606	93.317534	153.531585	102.021874	153.531585	183.414336
0.14	21.755265	46.975948	103.176744	46.975948	97.605898	155.528832	103.176744	155.528832	184.598224
0.16	22.370920	48.354418	103.796721	48.354418	100.231373	156.921439	103.796721	156.921439	185.222522
0.18	22.817917	49.187264	104.245917	49.187264	101.964093	157.757255	104.245917	157.757255	185.673916
0.20	23.081982	49.743753	104.510340	49.743753	103.049973	158.314832	104.510340	158.314832	185.938698
0.22	23.261193	50.089988	104.689718	50.089988	103.755083	158.661305	104.689718	158.661305	186.118244
0.24	23.371500	50.316078	104.800055	50.316078	104.201889	158.887479	104.800055	158.887479	186.228610
0.26	23.444068	50.458828	104.872636	50.458828	104.489809	159.030248	104.872636	159.030248	186.301203
0.28	23.489653	50.551055	104.918223	50.551055	104.673214	159.122481	104.918223	159.122481	186.346793
0.30	23.519208	50.609702	104.947779	50.609702	104.790973	159.181129	104.947779	159.181129	186.376350
0.32	23.537956	50.647403	104.966527	50.647403	104.866172	159.218831	104.966527	159.218831	186.395099
0.34	23.550029	50.671458	104.978600	50.671458	104.914372	159.242887	104.978600	159.242887	186.407171
0.36	23.557723	50.686886	104.986294	50.686886	104.945188	159.258315	104.986294	159.258315	186.414865
0.38	23.562661	50.696746	104.991233	50.696746	104.964925	159.268174	104.991233	159.268174	186.419804
0.40	23.565815	50.703062	104.994387	50.703062	104.977550	159.274490	104.994387	159.274490	186.422958
0.42	23.567837	50.707102	104.996408	50.707102	104.985633	159.278530	104.996408	159.278530	186.424980
0.44	23.569130	50.709688	104.997701	50.709688	104.990805	159.281117	104.997701	159.281117	186.426272
0.46	23.569957	50.711343	104.998529	50.711343	104.994115	159.282772	104.998529	159.282772	186.427100
0.48	23.570487	50.712403	104.999058	50.712403	104.996234	159.283831	104.999058	159.283831	186.427630
0.50	23.570826	50.713080	104.999397	50.713080	104.997590	159.284509	104.999397	159.284509	186.427969
0.52	23.571043	50.713514	104.999614	50.713514	104.998457	159.284943	104.999614	159.284943	186.428186
0.54	23.571182	50.713792	104.999753	50.713792	104.999013	159.285221	104.999753	159.285221	186.428325
0.56	23.571271	50.713970	104.999842	50.713970	104.999368	159.285398	104.999842	159.285398	186.428413
0.58	23.571327	50.714084	104.999899	50.714084	104.999596	159.285512	104.999899	159.285512	186.428470
0.60	23.571364	50.714156	104.999935	50.714156	104.999741	159.285585	104.999935	159.285585	186.428507
0.62	23.571387	50.714203	104.999959	50.714203	104.999834	159.285631	104.999959	159.285631	186.428530
0.64	23.571402	50.714233	104.999973	50.714233	104.999894	159.285661	104.999973	159.285661	186.428545
0.66	23.571412	50.714252	104.999983	50.714252	104.999932	159.285680	104.999983	159.285680	186.428554
0.68	23.571418	50.714264	104.999989	50.714264	104.999957	159.285693	104.999989	159.285693	186.428561
0.70	23.571422	50.714272	104.999993	50.714272	104.999972	159.285700	104.999993	159.285700	186.428564
0.72	23.571424	50.714277	104.999996	50.714277	104.999982	159.285705	104.999996	159.285705	186.428567
0.74	23.571426	50.714280	104.999997	50.714280	104.999989	159.285709	104.999997	159.285709	186.428569
0.76	23.571427	50.714282	104.999998	50.714282	104.999993	159.285711	104.999998	159.285711	186.428570
0.78	23.571427	50.714283	104.999999	50.714283	104.999995	159.285712	104.999999	159.285712	186.428570
0.80	23.571428	50.714284	104.999999	50.714284	104.999997	159.285713	104.999999	159.285713	186.428571
0.82	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	104.999998	159.285713	105.000000	159.285713	186.428571
0.84	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	104.999999	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
0.86	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	104.999999	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
0.88	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	104.999999	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
0.90	23.571428	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
0.92	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
0.94	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
0.96	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
0.98	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.00	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.02	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.04	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.06	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.08	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.10	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.12	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.14	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.16	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.18	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571

1.20	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.22	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.24	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.26	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.28	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.30	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.32	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.34	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.36	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.38	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.40	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.42	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.44	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.46	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.48	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.50	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.52	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.54	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.56	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.58	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.60	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.62	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.64	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.66	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.68	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.70	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.72	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.74	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.76	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.78	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.80	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.82	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.84	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.86	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.88	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.90	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.92	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.94	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.96	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.98	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
2.00	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571

6.8 Implicitna shema

Implicitna shema se dobija kada je $f=1$. Tada se iz jednačine (6.45) dobija sledeći oblik diskretizovane jednačine za vrijednost funkcije ϕ u tački P:

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b + a_P^0 \phi_P^0, \quad (6.51)$$

gdje je:

$$a_E = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e}$$

$$a_W = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \cdot \quad (6.52)$$

$$a_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s}$$

$$a_N = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n}$$

$$a_p^0 = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t}$$

$$a_p = \sum_{nb} a_{nb} - S_p \Delta x \Delta y + a_p^0$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y$$

Neke od karakteristika ove sheme biće prikazane u nastavku.

1. Kada nema izvornih članova tada važi $a_p = \sum_{nb} a_{nb} + a_p^0$, što znači da je vrijednost funkcije ϕ_p ograničena vrijednošću u susjednim čvorovima, i vrijednosti u prethodnom vremenskom trenutku ϕ_p^0 , što je u skladu sa ponašanjem paraboličkog tipa jednačine;
2. Rješenje transportne jednačine za vremenski trenutak $t+\Delta t$ se mora određivati rješavanjem sistema jednačina direktno ili iterativno;
3. Kao i kod eksplicitne sheme kada $\Delta t \rightarrow \infty$ dobijaju se jednačine za stacionarne uslove, što znači da dovoljno dugim izračunavanjem može dobiti rješenje kao i za stacionarne uslove;
4. Implicitna shema je u skladu sa pretpostavkom da vrijednost funkcije ϕ_p preovladjuje u vremenskom intervalu Δt ;
5. Za razliku od explicitne sheme vremenski korak integracije ne igra ulogu kod implicitne sheme jer vremenski korak integracije može biti bilo koja vrijednost, što naravno vodi ka manje ili više tačnom rješenju.

Primjer 6.5.

Za iste uslove kao u primjeru 6.4. riješimo sistem jednačina koje su napisane kada je $f=1$. Granične vrijednosti funkcija $\Phi(0,y)=10.0$, $\Phi(x,0)=10.0$, $\Phi(L_x,y)=200.0$, $\Phi(x,L_y)=200.0$ i početni uslovi isti su kao u prethodnom primjeru. Gustina materije je $\rho=1$. Kao i u prethodnim primjerima mreža je dimenzija $N_x \times N_y = 3 \times 3$, koja obezbjeđuje da je $\Delta x = \Delta y = 0.333$. Koeficijent a_p^0 sada više ne zavisi od Neumann-ovog

kriterijuma stabilnosti jer nema negativnih članova na desnoj strani jednačine (4.51). Koeficijenti a_E , a_W , a_S , a_N za sve kontrolisane zapremine isti su kao i za prethodne slučajeve i dati su u tabeli P6.1. Sistem od 9 jednačina sa 9 nepoznatih rješava se iterativnom metodom Gaus-Siedel-a kao i u prethodnom primjeru. U tabeli P6.10. date su vrijednosti tokom procesa rješavanja za sve vremenske trenutke. Vremenski korak integracije je uzet da je $\Delta t=0.05$. Kao što se može vidjeti iz poslednje vrste vrijednosti su slične onima dobijenim kada je shema eksplicitna, uglavnom zbog malog vremenskog koraka integracije tako da nije puno važno da li prethodni ili tekući vremenski trenutak prevlađuje u intervalu Δt .

Tabela P 6.10.

0.00	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
0.05	13.042413	22.507699	67.491639	22.507699	39.799331	90.201331	67.491639	90.201331	121.940864
0.10	16.508213	33.375527	88.807879	33.375527	65.712270	126.841167	88.807879	126.841167	161.107544
0.15	19.215541	40.654765	97.505855	40.654765	82.728515	143.709203	97.505855	143.709203	175.796169
0.20	21.020934	45.068793	101.358113	45.068793	92.773870	151.640454	101.358113	151.640454	181.695291
0.25	22.127362	47.611450	103.173238	47.611450	98.407002	155.461589	103.173238	155.461589	184.219114
0.30	22.771985	49.032203	104.065587	49.032203	101.480669	157.344320	104.065587	157.344320	185.359190
0.35	23.135601	49.810823	104.516381	49.810823	103.132398	158.289229	104.516381	158.289229	185.897161
0.40	23.336347	50.232090	104.747949	50.232090	104.012306	158.770197	104.747949	158.770197	186.159551
0.45	23.445564	50.458046	104.868099	50.458046	104.478694	159.017551	104.868099	159.017551	186.290634
0.50	23.504389	50.578528	104.930810	50.578528	104.725176	159.145692	104.930810	159.145692	186.357232
0.55	23.535850	50.642508	104.963655	50.642508	104.855216	159.212413	104.963655	159.212413	186.391460
0.60	23.552595	50.676390	104.980893	50.676390	104.923755	159.247274	104.980893	159.247274	186.409191
0.65	23.561476	50.694298	104.989950	50.694298	104.959858	159.265532	104.989950	159.265532	186.418424
0.70	23.566176	50.703750	104.994713	50.703750	104.978868	159.275109	104.994713	159.275109	186.423249
0.75	23.568659	50.708735	104.997218	50.708735	104.988877	159.280139	104.997218	159.280139	186.425777
0.80	23.569969	50.711362	104.998536	50.711362	104.994145	159.282782	104.998536	159.282782	186.427103
0.85	23.570659	50.712746	104.999229	50.712746	104.996918	159.284172	104.999229	159.284172	186.427799
0.90	23.571023	50.713475	104.999594	50.713475	104.998378	159.284903	104.999594	159.284903	186.428165
0.95	23.571215	50.713859	104.999787	50.713859	104.999146	159.285287	104.999787	159.285287	186.428358
1.00	23.571316	50.714061	104.999888	50.714061	104.999551	159.285490	104.999888	159.285490	186.428459
1.05	23.571369	50.714167	104.999941	50.714167	104.999763	159.285596	104.999941	159.285596	186.428512
1.10	23.571397	50.714223	104.999969	50.714223	104.999875	159.285652	104.999969	159.285652	186.428540
1.15	23.571412	50.714253	104.999984	50.714253	104.999934	159.285681	104.999984	159.285681	186.428555
1.20	23.571420	50.714268	104.999991	50.714268	104.999965	159.285697	104.999991	159.285697	186.428563
1.25	23.571424	50.714276	104.999995	50.714276	104.999982	159.285705	104.999995	159.285705	186.428567
1.30	23.571426	50.714281	104.999998	50.714281	104.999990	159.285709	104.999998	159.285709	186.428569
1.35	23.571427	50.714283	104.999999	50.714283	104.999995	159.285712	104.999999	159.285712	186.428570
1.40	23.571428	50.714284	104.999999	50.714284	104.999997	159.285713	104.999999	159.285713	186.428571
1.45	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	104.999998	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.50	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	104.999999	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.55	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	104.999999	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.60	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.65	23.571428	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.70	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.75	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.80	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.85	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.90	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.95	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
2.00	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
2.05	23.571429	50.714286	105.000000	50.714286	105.000000	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571

6.9 Crank-Nickolson-ova shema

Tzv. Crank-Nickolson-ova shema se dobija kada se uzme da je $f=0.5$. Diskretizaciona jednačina za zapreminu P tada dobija oblik:

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} (0.5\phi_{nb} + 0.5\phi_{nb}^0) + b + \left(a_P^0 - 0.5 \sum_{nb} a_{nb} \right) \phi_P^0, \quad (6.53)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \\ a_W &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \\ a_S &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \\ a_N &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \\ a_P^0 &= \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} \\ a_P &= 0.5 \sum_{nb} a_{nb} - 0.5 S_P \Delta x \Delta y + a_P^0 \\ b &= 0.5 \left((S_C + S_C^0) + S_P^0 \phi_P^0 \right) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (6.54)$$

Kao i ranije i ovdje je potrebno istaći odredjene zakonitosti.

1. Kada je $a_P^0 < 0.5 \sum_{nb} a_{nb}$ tada član koji množi ϕ_P^0 postaje negativan što može dovesti do rešenja koje nema fizičkog smisla. Bolje rečeno svaka vrijednost f između 0 i 1 dovodi do ovake pojave;
2. Crank-Nickolson-ova shema u suštini predstavlja linearnu interpolaciju u vremenu vrijednosti funkcije ϕ . Ako se pažljivo koristi ova shema greške koje se javljaju tokom rješavanja mogu se svesti na minimum ako se vremenski korak integracije prilagođava tokom numeričkog rješavanja.

Primjer 6.6.

Konačno isti sistem jednačina kao u prethodna dva primjera riješimo kada je $f=0.5$, tj. Crank-Nickolson-ovu shemu. Kao i kod eksplicitne sheme i ovdje je potrebno voditi računa o vremenskom koraku integracije jer jedan od članova na desnoj strani jednačine (6.53) može biti negativan. Uslov koji zadovoljava Nemann-ov kriterijum stabilnosti zadovoljava automatski i ovu shemu pa će u primjeru biti uzeto da je $\Delta t=0.02$. Rezultati proračuna prikazani su u tabeli P6.11.

Tabela P6.11.

0.00	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
0.02	10.408320	13.493404	57.925462	13.493404	17.948840	66.564498	57.925462	66.564498	105.442604
0.04	11.785257	20.736981	78.256075	20.736981	35.312164	102.190039	78.256075	102.190039	144.726892
0.06	13.864569	27.764233	88.481320	27.764233	52.887252	123.346953	88.481320	123.346953	163.098071
0.08	15.997810	33.674243	94.272374	33.674243	67.355838	136.081783	94.272374	136.081783	172.546938
0.10	17.868962	38.321365	97.824998	38.321365	78.292754	143.980438	97.824998	143.980438	177.781033
0.12	19.380984	41.828598	100.119254	41.828598	86.232108	149.026849	100.119254	149.026849	180.857524
0.14	20.543761	44.405506	101.648087	44.405506	91.878636	152.330130	101.648087	152.330130	182.752414
0.16	21.409653	46.265249	102.685776	46.265249	95.851673	154.532162	102.685776	154.532162	183.961898
0.18	22.040661	47.591294	103.397523	47.591294	98.631271	156.019391	103.397523	156.019391	184.754385
0.20	22.493748	48.529081	103.888581	48.529081	100.569941	157.033052	103.888581	157.033052	185.283413
0.22	22.815783	49.188599	104.228479	49.188599	101.919842	157.728281	104.228479	157.728281	185.641175
0.24	23.043069	49.650658	104.464170	49.650658	102.858928	158.207147	104.464170	158.207147	185.885271
0.26	23.202706	49.973538	104.627762	49.973538	103.511900	158.537936	104.627762	158.537936	186.052818
0.28	23.314454	50.198763	104.741371	50.198763	103.965807	158.766883	104.741371	158.766883	186.168288
0.30	23.392499	50.355678	104.820292	50.355678	104.281289	158.925550	104.820292	158.925550	186.248085
0.32	23.446919	50.464912	104.875124	50.464912	104.500544	159.035608	104.875124	159.035608	186.303329
0.34	23.484825	50.540911	104.913224	50.540911	104.652916	159.111995	104.913224	159.111995	186.341624
0.36	23.511209	50.593767	104.939699	50.593767	104.758804	159.165033	104.939699	159.165033	186.368190
0.38	23.529563	50.630517	104.958096	50.630517	104.832388	159.201870	104.958096	159.201870	186.386630
0.40	23.542327	50.656065	104.970881	50.656065	104.883524	159.227458	104.970881	159.227458	186.399434
0.42	23.551202	50.673824	104.979765	50.673824	104.919059	159.245235	104.979765	159.245235	186.408328
0.44	23.557371	50.686166	104.985938	50.686166	104.943753	159.257587	104.985938	159.257587	186.414506
0.46	23.561659	50.694744	104.990228	50.694744	104.960913	159.266169	104.990228	159.266169	186.418798
0.48	23.564639	50.700705	104.993209	50.700705	104.972838	159.272132	104.993209	159.272132	186.421780
0.50	23.566710	50.704848	104.995281	50.704848	104.981125	159.276276	104.995281	159.276276	186.423852
0.52	23.568150	50.707727	104.996721	50.707727	104.986883	159.279156	104.996721	159.279156	186.425292
0.54	23.569150	50.709728	104.997721	50.709728	104.990885	159.281157	104.997721	159.281157	186.426293
0.56	23.569845	50.711119	104.998416	50.711119	104.993666	159.282547	104.998416	159.282547	186.426988
0.58	23.570328	50.712085	104.998900	50.712085	104.995598	159.283513	104.998900	159.283513	186.427471
0.60	23.570664	50.712756	104.999235	50.712756	104.996941	159.284185	104.999235	159.284185	186.427807
0.62	23.570897	50.713223	104.999469	50.713223	104.997874	159.284651	104.999469	159.284651	186.428040
0.64	23.571059	50.713547	104.999631	50.713547	104.998523	159.284976	104.999631	159.284976	186.428202
0.66	23.571172	50.713772	104.999743	50.713772	104.998974	159.285201	104.999743	159.285201	186.428315
0.68	23.571250	50.713929	104.999822	50.713929	104.999287	159.285358	104.999822	159.285358	186.428393
0.70	23.571305	50.714038	104.999876	50.714038	104.999504	159.285466	104.999876	159.285466	186.428448
0.72	23.571342	50.714113	104.999914	50.714113	104.999656	159.285542	104.999914	159.285542	186.428485
0.74	23.571369	50.714166	104.999940	50.714166	104.999761	159.285595	104.999940	159.285595	186.428512
0.76	23.571387	50.714202	104.999958	50.714202	104.999834	159.285631	104.999958	159.285631	186.428530
0.78	23.571400	50.714228	104.999971	50.714228	104.999884	159.285656	104.999971	159.285656	186.428543
0.80	23.571408	50.714245	104.999980	50.714245	104.999920	159.285674	104.999980	159.285674	186.428551
0.82	23.571415	50.714258	104.999986	50.714258	104.999944	159.285686	104.999986	159.285686	186.428557
0.84	23.571419	50.714266	104.999990	50.714266	104.999961	159.285695	104.999990	159.285695	186.428562
0.86	23.571422	50.714272	104.999993	50.714272	104.999973	159.285701	104.999993	159.285701	186.428565
0.88	23.571424	50.714276	104.999995	50.714276	104.999981	159.285705	104.999995	159.285705	186.428567
0.90	23.571425	50.714279	104.999997	50.714279	104.999987	159.285708	104.999997	159.285708	186.428568
0.92	23.571426	50.714281	104.999998	50.714281	104.999991	159.285710	104.999998	159.285710	186.428569
0.94	23.571427	50.714282	104.999998	50.714282	104.999994	159.285711	104.999998	159.285711	186.428570
0.96	23.571427	50.714283	104.999999	50.714283	104.999996	159.285712	104.999999	159.285712	186.428570
0.98	23.571428	50.714284	104.999999	50.714284	104.999997	159.285713	104.999999	159.285713	186.428571
1.00	23.571428	50.714285	104.999999	50.714285	104.999998	159.285713	104.999999	159.285713	186.428571
1.02	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	104.999998	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.04	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	104.999999	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.06	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	104.999999	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571
1.08	23.571428	50.714285	105.000000	50.714285	104.999999	159.285714	105.000000	159.285714	186.428571

