Aktuarske osnove tarifa

U osiguranju lica ih čine:

- Tablice smrtnosti
- Obračunska kamatna stopa
- Troškovi sprovođenja osiguranja

Tablice smrtnosti

Konstruišu se na dva načina:

- Direktnom i/ili
- Indirektnom metodom

Tablice sastavljene po direktnoj metodi predstavljaju red izumiranja jedne stvarne generacije. Ova je metoda dopuna indirektnoj, po kojoj se statističkom procedurom, uzima uzorak iz grupa lica razne starosti, pa se za raspodjelu na populaciji proglašava raspodjela na uzorku. Tablice sastavljene po noj predstavljaju red izumiranja jedne fiktivne grupe lica.

Određivanje vjerovatnoće smrti

Svaki član grupe iz uzorka, po indirektnoj metodi, prati se u toku godine. Jedinica vremena može biti godina starosti (vrijeme od jednog do drugog rođendana), godina osiguranja (vrijeme od dana stupanja u odnos osiguranja do istog dana naredne godine) ili kalendarska godina.

Opšte tablice smrtnosti osiguranih lica formirane su na osnovu vjerovatnoće smrti cjelokupnog stanovništva, a tablice smrtnosti osiguranih lica, kao materijal iz koga će se odrediti tražena vjerovatnoća, uzimaju samo osigurana lica.

Vjerovatnoća smrti je količnik broja realizovanih smrtnih slučajeva grupe lica iste starosti, u toku jedne godine, i cjelokupnog broja lica koji sačinjavaju grupu.Neka se posmatraju osigurana lica i neka se kao vremenska jedinica koristi rođendanska godina.

Označimo sa Ax broj članova grupe koji se osigurao na svoj x-ti rođendan, Bx – oni koji su stupili u osiguranje u toku svoje (x+1)-ve godine, mx- oni koji su umrli u toku te godine. Ako pretpostavimo da su smrtni slučajevi ravnomjerno raspoređeni tokom čitave godine, uzimamo da je svaki član (od Bx) posmatran pola godine u prosjeku.

Oni koji su posmatrani pola godine tretiraju se kao pola osobe, pa je ukupan broj posmatranih osoba:

$A_x + B_x/2$. Ako iz osiguranja u toku (x+1)-ve godine istupi C_x lica, uz pretpostavku da je istupanje iz grupe ravnomjerno (dakle smatramo ih kao pola osobe), dolazimo do ukupnog broja posmatranih osoba starih x godina:

$$l_x = A_x + (B_x - C_x)/2$$

i konačno

$$q_x = m_x/l_x$$

Ako kao jedinicu vremena uzmemo godinu osiguranja, istovremeno se svako lice posmatra i u periodu između dva svoja uzastopna rođendana. Po ZVB, neka djelove godina manje od 6 mjeseci ne uzimamo u obzir, a veće od 6 mjeseci kao punu godinu, tada se rođendan svake osobe svodi na početak osiguranja, a rođendanska godina poklapa sa godinom osiguranja. Ovdje je $Bx/2 = 0$, pa je $qx = mx/(Ax - Cx/2)$.

Izravnavanje tablica smrtnosti je postupak prerade i zamjene drugim vrijednostima onih vrijednosti koje u nizu dovode do naglih promjena, kako bi niz dobio veću pravilnost.

To je posebno izraženo kad se posmatra nedovoljno veliki broj osoba, ali i usled drugih nedostataka metode i materijala.

Najčešće se koriste Tablice smrtnosti 17 engleskih društava, jugoslovenske iz 1952-54. i iz 1980-82 god.

Kamatna stopa

Pretpostavljamo da je konstantna i nešto niža od aktuelne kamatne stopa na tržištu novca. Izbor stope je važan zbog kalkulativnih i finansijskih razloga. Ona je kod nas obično 5%, a na zapadu od 3-4%.

Osiguranje života je dugoročan posao pa se sredstva prikupljena na ime premija plasiraju na finansijskom tržištu.Označimo sa Bn veličinu fonda za osiguranje neophodnu za isplate osiguranih suma u određenom trenutku, a sa A- iznos osiguravajućeg fonda na početku roka osiguranja (sadašnja vrijednost). Važi:

$$A=Bn/(1+i)^n$$

Troškovi sprovođenja osiguranja

- Troškovi pribavljanja osiguranja (akvizicioni troškovi α), koji postoje jednokratno i odmjeravaju se proporcionalno osiguranoj sumi
- Inkaso troškovi (β troškovi)- troškovi naplate osiguranja (u procentima bruto premije)
- Tekući upravni (administrativni) troškovi (γ troškovi)- obračunavaju se na sumu osiguranja i uključuju sve unutrašnje administrativne troškove koji se neposredno ne odnose na zaključivanje osiguranja.

  Bruto premija = neto (tehnička) pr. + troškovi

Neto premija kod osig. života

- Vjerovatnoća života i smrti jednog lica
- Komutativni brojevi (određuju se pomoću broja živih-lx i umrlih lica- dx):

  Dx, Nx, Sx, Cx, Mx, Rx
- Osiguranje lične rente
- Osiguranje kapitala
- Osiguranje premijama
- Primjeri

DEFINICIJA VJEROVATNOĆE

Klasična (Laplasova) definicija vjerovatnoće događaja A:

$$\boxed{p(A) = \frac{M}{N}}$$

M – broj povoljnih ishoda

N – broj svih mogućih ishoda

Primjer: ***Kolika je vjerovatnoća da pri bacanju novčića padne grb?***

$$\Omega = \{P, G\}$$

$$A = \{G\}$$

$$p(A) = \frac{1}{2}$$

OSOBINE VJEROVATNOĆE

TEOREMA.

1. $0 \leq p(A) \leq 1$
2. $p(\Omega) = 1, \quad p(\varnothing) = 0$
3. Za $A \cap B = \varnothing$ je $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

   Za A, B, ... , C koji su međusobno disjunktni važi

   $p(A \cup B \cup \ldots \cup C) = p(A) + p(B) + \ldots + p(C)$

4. Ako je $A \subseteq \Omega$ tada je $p(A) \leq p(B)$
5. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
6. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
7. $p(A \cup B) \leq p(A) + p(B)$

MATEMATIČKO OČEKIVANJE

Neka je X diskretna slučajna veličina sa konačnim skupom realizacija i raspodjelom:

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Matematičko očekivanje (srednja vrijdnost) slučajne veličine je broj, koji označavamo sa EX, definisan sa:

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum x_i p_i$$

Disperzija (varijansa) slučajne veličine X, u oznaci DX, se definiše sa:

$$DX = E(X - EX)^2$$

Kvadratni korijen iz disperzije se zove ***standardna devijacija ili standardno odstupanje, u oznaci σ(X).***

MATEMATIČKO OČEKIVANJE

Neka je X diskretna slučajna veličina sa konačnim skupom realizacija i raspodjelom:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Matematičko očekivanje (srednja vrijdnost) slučajne veličine je broj, koji označavamo sa EX, definisan sa:

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum x_i p_i$$

Disperzija (varijansa) slučajne veličine X, u oznaci DX, se definiše sa:

$$DX = E(X - EX)^2$$

Kvadratni korijen iz disperzije se zove ***standardna devijacija ili standardno odstupanje, u oznaci $\sigma(X)$.***

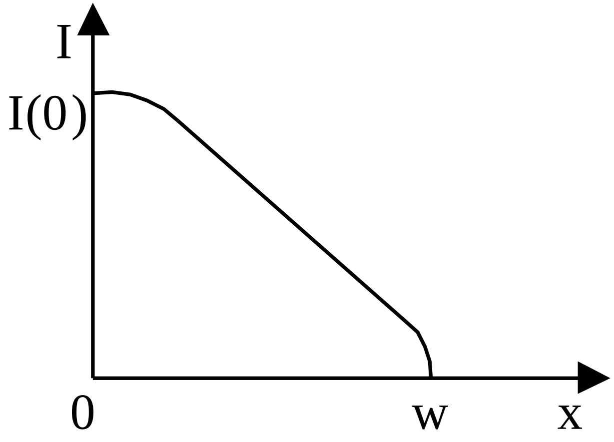
BIOMETRIJSKE FUNKCIJE

Funkciju, koja starosnom dobu pridružuje broj živih lica tog starosnog doba, označavamo sa l i zovemo **FUNKCIJA DOŽIVLJENJA.**

$$\boxed{l : N \cap [0, w] \rightarrow N \cap [0, l(x_0)]}$$

w - oznaka za najdublju starost

$l(x_0)$- broj članova polazne grupe osoba starih x_0 godina



BIOMETRIJSKE FUNKCIJE

$$\boxed{p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}}$$

vjerovatnoća da će lice staro x godina doživjeti narednu (x+1)-vu godinu

$$\boxed{q_x = 1 - p_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}}$$

vjerovatnoća da lice staro x godina neće doživjeti narednu (x+1)-vu godinu

$$\boxed{{}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}}$$

vjerovatnoća da će lice staro x godina doživjeti x+n godina

$$\boxed{{}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}}$$

vjerovatnoća da lice staro x godina neće doživjeti x+n godina

OSIGURANJE LIČNE RENTE

JEDNOKRATNOM PREMIJOM - MIZOM

Lična renta je iznos koji osigurano lice prima lično, sve dok je u životu.

Lična renta može biti:

- neposredna (teče odmah po osiguranju) ili odložena;
- anticipativna (isplaćuje se početkom perioda) ili dekurzivna (krajem perioda)
- godišnja renta (prima se jednom godišnje) ili renta u ratama;
- konstantna ili promjenljiva rentu;

Prema trajanju renta može biti:

- neposredna doživotna lična renta,
- odložena doživotna lična renta,
- neposredna privremena lična renta i
- odložena privremena lična renta.

NEPOSREDNA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Razmotrimo problem određivanja mize anticipativne rente od 1 €, tj. sume koju treba da uplati lice staro x godina osiguravajućem zavodu, da bi mu zavod od dana osiguranja do smrti isplaćivao, početkom godine, rentu od 1€.

Označimo sa:

- a_x – premiju;
- X_i - diskretnu slučajnu veličinu koja predstavlja vrijednost i-te isplate (koja je diskontovana na dan osiguarnja), $i = 0, 1, 2, \ldots, w - x$ (w-najdublja starost), za osobu staru x godina.
- ako je p kamatna stopa važi $q = 1 + \frac{p}{100}$

NEPOSREDNA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Raspodjela slučajne veličine:

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{q^i} \\ 1-\dfrac{l_{x+i}}{l_x} & \dfrac{l_{x+i}}{l_x} \end{pmatrix}, \quad i = 0,1,2,\ldots,w-x$$

Očekivanja tih diskretnih slučajnih veličina su

$$EX_i = 0\cdot\left(1-\frac{l_{x+1}}{l_x}\right)+\frac{1}{q^i}\cdot\frac{l_{x+i}}{l_x}=\frac{l_{x+i}}{l_x}\cdot\frac{1}{q^i} \qquad i = 0,1,2,\ldots,w-x$$

Dijeljenjem brojioca i imenioca prethodne relacije sa q^x dobijamo:

$$EX_i = \frac{\dfrac{l_{x+i}}{q^{x+i}}}{\dfrac{l_x}{q^x}} = \frac{D_{x+i}}{D_x}, \text{ gdje je } D_x = \frac{l_x}{q^x}$$ (diskontovani broj živih lica starih x god)

NEPOSREDNA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Kako je a_x jednako sumi očekivanja slučajnih veličina X_i, važi:

$$a_x = EX_0 + EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_{w-x}$$

$$= \frac{l_x}{l_x} \cdot 1 + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q} + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{l_w}{l_x} \cdot \frac{1}{q^{w-x}}$$

$$= \sum_{i=0}^{w-x} \frac{l_{x+i}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^i}$$

$$= \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots + \frac{D_w}{D_x}$$

$$= \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_w}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

gdje je: $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_w$ zbir diskontovanih brojeva živih lica starih $x, x+1, \ldots$ godina.

NEPOSREDNA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Miza anticipativne rente od l € pri neposrednom doživotnom osiguranju lične rente iznosi:

$$\boxed{a_x = \frac{N_x}{D_x}}$$

osiguranik mora uplatiti (odjednom) iznos a_x da bi mu osiguravač, godišnje (početkom godine), isplaćivao rentu od l €.

$$\boxed{M = R \cdot a_x}$$

miza anticipativne rente od R €

$$\boxed{b_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}}$$

miza dekurzivne rente od 1 €

$$\boxed{b_x = a_x - 1}$$

veza između dekurzivne i anticipativne rente od 1 €

ODLOŽENA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Ako isplate rente počinju m godina poslije izvršene uplate osiguranja (prvih m godina isplate se ne vrše), imamo da je miza anticipativne rente od l €:

$$\boxed{{}_m a_x = \frac{N_{x+m}}{D_x} (= EX_m + EX_{m+1} + \ldots + EX_{w-x})}$$

$$\boxed{{}_m b_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}}$$

miza dekurzivne rente od 1 €

Ova vrsta rente se koristi npr. kod osiguranja penzija.

Ukoliko osiguranik umre u toku prvih m godina ili u toku isplaćivanja, miza ostaje u korist onih osiguranika koji dožive isplaćivanje.

NEPOSREDNO PRIVREMENA LIČNA RENTA

Ona se isplaćuje najviše n godina od dana osiguranja (što zavisi od dužine života osiguranika).

Miza neposredne privremene n godina anticipativne lične rente od 1 € je:

$$a_{x,n} = EX_0 + EX_1 + \ldots + EX_{n-1} = \frac{l_x}{l_x} + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q} + \ldots + \frac{l_{x+n-1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}$$

$$\boxed{a_{x,\,n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}$$

Očigledno važi relacija: $a_{x,n} = a_x - {}_n a_x$

$$b_{x,n} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$ miza dekurzivne rente

ODLOŽENA PRIVREMENA LIČNA RENTA

Ovo je model osiguranja lične rente kod kojeg je prva isplata poslije m godina (ako je osiguranik živ) a posljednja isplata (ako bude u životu) kad osiguranik bude imao x+m+n-1 godina.

Miza anticipativne odložene privremene lične rente od 1 € u ovom slučaju je jednaka:

$$
\begin{aligned}
{}_m a_{x,n} &= EX_m + EX_{m+1} + EX_{m+2} + \ldots + EX_{m+n-1} \\
&= \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^m} + \frac{l_{x+m+1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^{m+1}} + \ldots + \frac{l_{x+m+n-1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^{m+n-1}} \\
&= \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}
\end{aligned}
$$

Važi relacija: ${}_m a_{x,n} = {}_m a_x - {}_{m+n} a_x$

$${}_m b_{x,n} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$ miza dekurzivne odložene privremene rente od 1 €

OSIGURANJE KAPITALA

Ovo je vid osiguranja uplatom mize gdje se, za razliku od osiguranja lične rente, osigurana suma isplaćuje korisniku polise jednom (ili najviše dva puta).

Osnovna podjela je na:

- osiguranje kapitala za slučaj doživljenja,
- osiguranje kapitala za slučaj smrti
- mješovito osiguranje

OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ DOŽIVLJENJA

Osiguravajući zavod vrši isplatu osigurane sume samo licima koja dožive ugovoreni rok.

$$X_n : \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{q^n} \\ 1-\dfrac{l_{x+n}}{l_x} & \dfrac{l_{x+n}}{l_x} \end{pmatrix}$$

X_n – diskretna slučajna veličina (koja predstavlja vrijednosti diskontovane isplate)

n - broj godina počev od x-te poslije čijeg isteka će se izvršiti ugovorena isplata (ako osiguranik bude u životu) tj. n je trajanje osiguranja.

$$B_x = EX_n = \frac{1}{q^n} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$\boxed{B_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}}$$

B_x – miza osiguranja kapitala za slučaj doživljenja (x+n)-te godine ukoliko osiguramo iznos od 1 €

Ako umjesto 1 € osiguramo R € miza će biti jednaka **RB_x**

DOŽIVOTNO

OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Osiguravač isplaćuje (jednom) ugovorenu sumu nasljedniku osiguranika, krajem godine u kojoj osiguranik umre.

Raspodjela slučajne veličine X- diskontovane isplate od 1€ :

$$X : \begin{pmatrix} \frac{1}{q} & \frac{1}{q^2} & \cdots & \frac{1}{q^{w-x}} \\ \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} & \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} & \cdots & \frac{l_{w-1} - l_w}{l_x} \end{pmatrix}$$

Po principu ekvivalencije, miza A_x je u ovom slučaju jednaka očekivanju slučajne veličine X, tj.:

$$A_x = EX = \sum_{i=0}^{w-x-1} \frac{1}{q^{i+1}} \cdot \frac{l_{x+i} - l_{x+i+1}}{l_x}$$

DOŽIVOTNO

OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Za komutacione brojeve d_x, C_x i M_x važe sledeće relacije:

$$d_x = l_x - l_{x+1},$$

$$C_x = \frac{d_x}{q^{x+1}}$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{w+1}$$

Slijedi da je miza doživotnog osiguranja kapitala za slučaj smrti

$$\boxed{A_x = \frac{1}{D_x} \sum_{i=0}^{w-x-1} C_{x+i} = \frac{M_x}{D_x}}$$

ODLOŽENO DOŽIVOTNO

OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Osiguravajući zavod se obavezuje da će ugovoreni kapital, oderđenom korisniku (iz ugovora), isplatiti krajem godine u kojoj osiguranik umre, pod uslovom da smrt nastupi poslije m godina od dana osiguranja.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{q^{m+1}} & \dfrac{1}{q^{m+2}} & \cdots & \dfrac{1}{q^{w-x}} \\ \dfrac{l_x - l_{x+m}}{l_x} & \dfrac{l_{x+m} - l_{x+m+1}}{l_x} & \dfrac{l_{x+m+1} - l_{x+m+2}}{l_x} & \cdots & \dfrac{l_{w-1} - l_w}{l_x} \end{pmatrix}$$

Slijedi da je miza odloženog doživotnog osiguranja kapitala za slučaj smrti

$$\boxed{{}_{m}A_{x} = EX = \frac{M_{x+m}}{D_x}}$$

PRIVREMENO NEPOSREDNO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Osiguravač isplaćuje osiguranu sumu nasljedniku samo ako osiguranik umre u toku n godina od osiguranja.

Miza privremenog neposrednog osiguranja kapitala za slučaj smrti

$$\boxed{A_{x,n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}$$

MJEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA

1. MJEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA SA JEDNOM ISPLATOM

- Oblik osiguranja kapitala pri kome se isplata vrši ili osiguraniku, ako ostane u životu, ili nasljedniku, ako osiguranik umre u toku trajanja osiguranja.

- Ako se lice osigura na ovaj način ono plaća dvije premije: premiju za osiguranje kapitala za slučaj doživljenja i premiju za privremeno neposredno osiguranje kapitala za slučaj smrti. Miza ovog vida osiguranja je:

$$\boxed{\overline{A_x} = B_x + A_{x,n} = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+m}}{D_x}}$$

MJEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA

2. MJEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA SA DVIJE ISPLATE

- Mješovito osiguranje se može ugovoriti i tako da budu predviđene dvije isplate: jedne osiguraniku, ako doživi x+n godina i druge nasljednicima na kraju godine u kojoj umire.
- Ako osiguranik umre prije isteka n godina tada se isplaćuje samo jedan iznos (nasljedniku) inače se isplaćuju dva iznosa (jedan osiguraniku, jedan nasljedniku).
- Jednokratna premija je suma premija onih osiguranja iz kojih se sastoji: osiguranja kapitala za slučaj doživljenja i doživotnog osiguranja kapitala za slučaj smrti:

$$\boxed{A_x^{'} = B_x + A_x = \frac{D_{x+n} + M_x}{D_x}}$$

Ova vrsta osiguranja sve više preovladava u savremenom osiguranju života.

OSIGURANJE PREMIJAMA

Kod ove vrste osiguranja osigurano lice ne uplaćuje mizu (jednokratnu premiju) već uplaćuje određene sume (premije P) više puta.

Premija može biti:

- doživotna ili privremena
- godišnja ili u ratama

Pretpostavimo da za određeno osiguranje osiguranik treba da plati jednokratnu premiju A, ali ne raspolaže tolikim novcem, pa će umjesto toga plaćati godišnje premije P.

Shvatimo godišnje premije kao ličnu rentu koju osigurano lice plaća osiguravajućem zavodu.

Ako se godišnje premije počinju plaćati od trenutka osiguranja do smrti, tada one predstavljaju doživotnu neposrednu ličnu rentu. Slično je i za ostale vrste premija (odložena, privremena).

OSIGURANJE PREMIJAMA

U slučaju da aticipativna renta ima vrijednost jedan njena miza bi bila a_x. Kako renta ima vrijednost jednaku visini premije P, njena miza je $P \cdot a_x$. Primjenjujući princip ekvivalencije dobijamo jednakost:

$$\boxed{P \cdot a_x = A}$$

A- visina jednokratne premije

$$P = \frac{A}{a_x}$$

P- visina premije za jedinicu osigurane sume

Slično, ako se premija P uplaćuje neposredno privremeno:

$$\boxed{P \cdot a_{x,n} = A}$$

$$P = \frac{A}{a_{x,n}}$$

Veza između A i P- izvođenje

$$A = P + \frac{P}{q} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{P}{q^2} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_x} + \ldots$$

$$\boxed{P \cdot a_x = A}$$

$$\boxed{P \cdot a_{x,n} = A}$$

OSIGURANJE ODLOŽENE DOŽIVOTNE LIČNE RENTE PREMIJAMA

- Isplate se vrše poslije n godina od dana osiguranja do kraja života. Ako osiguranik ne doživi (x+n) -tu godinu renta se neće ni isplaćivati. Ako smrt ne nastupi ranije, vrijeme trajanja uplata godišnje premije je najviše do godinu dana pred početak isplate rente, tj. do (x+n)-te godine.
- Zbir diskontovanih ispata je:

$$EX_n + EX_{n+1} + \ldots + EX_{w-x}$$

- Zbir diskontovanih uplata:

$$P_x \cdot (EX_0 + EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_{t-1}),\ \ t \le n$$

- Po principu jednakosti uplata i isplata imamo da važi:

$$EX_n + EX_{n+1} + \ldots + EX_{w-x} = P_x \cdot (EX_0 + EX_1 + \ldots + EX_{t-1}),\ \ t \le n$$

$$\boxed{{}_n a_x = P_x \cdot a_{x,t}}$$

OSIGURANJE ODLOŽENE DOŽIVOTNE LIČNE RENTE PREMIJAMA

$$P_x = \frac{{}_n a_x}{a_{x,t}}, \; t \leq n$$

godišnja premija odložene doživotne anticipativne lične rente

$$P_x = \frac{\frac{N_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}} = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}, \quad t \leq n$$

Ako se prva renta primi krajem (x+1) -ve godine godišnja premija je:

$$P_x = \frac{N_{x+n+1}}{N_x - N_{x+t}}$$

OSIGURANJE ODLOŽENE PRIVREMENE LIČNE RENTE PREMIJAMA

Renta se prima po isteku n godina od dana osiguranja i traje m godina (m > n).

Godišnja premija kod ove vrste osiguranja je:

$$\boxed{P_x = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{N_x - N_{x+t}}, t \leq n}$$

LIČNA RENTA U RATAMA

Ako se radi o renti u ratama, tj. ako se isplate vrše u razmacima kraćim od jedne godine (k puta godišnje), ubiraćemo rentu od 1/k € k puta godišnje, umjesto 1 € kao kod modela godišnje rente.

Miza odložene privremene anticipativne rente u ratama je:

$$_{m}a_{x,n}^{(k)}=\frac{l_{x+m}}{l_x}\cdot\frac{\frac{1}{k}}{q^m}+\frac{l_{x+m+\frac{1}{k}}}{l_x}\cdot\frac{\frac{1}{k}}{q^{m+\frac{1}{k}}}+\ldots+\frac{l_{x+m-\frac{1}{k}}}{l_x}\cdot\frac{\frac{1}{k}}{q^{m+n-\frac{1}{k}}}$$

Miza neposredne privremene anticipativne rente u ratama:

$$a_{x,n}^{(k)}=\frac{1}{k}+\frac{\frac{1}{k}}{q^{\frac{1}{k}}}\cdot\frac{l_{x+\frac{1}{k}}}{l_x}+\frac{\frac{1}{k}}{q^{\frac{2}{k}}}\cdot\frac{l_{x+\frac{2}{k}}}{l_x}+\ldots+\frac{\frac{1}{k}}{q^{n-\frac{1}{k}}}\cdot\frac{l_{x+n-\frac{1}{k}}}{l_x}$$

LIČNA RENTA U RATAMA

$$a_{x,n}^{(k)} \cong a_{x,n} - \frac{k-1}{2k}(EX_0 - EX_n)$$ anticipativna privremena neposredna renta u ratama

$$b_{x,n}^{(k)} \cong b_{x,n} + \frac{k-1}{2k}(EX_0 - EX_n)$$ dekurzivna privremena neposredna renta u ratama

$$a_x^{(k)} \cong a_x - \frac{k-1}{2k}$$ anticipativna neposredna doživotna renta u ratama

$$b_x^{(k)} \cong b_x + \frac{k-1}{2k}$$ dekurzivna neposredna doživotna renta u ratama

LIČNA RENTA U RATAMA

$${}_m a_{x,n}^{(k)} \cong {}_m a_{x,n} - \frac{k-1}{2k}(EX_m - EX_{m+n})$$ odložena privremena anticipativna renta u ratama

$${}_m b_{x,n}^{(k)} \cong {}_m b_{x,n} + \frac{k-1}{2k}(EX_m - EX_{m+n})$$ odložena privremena deklurzivna renta u ratama

$${}_m a_x^{(k)} \cong {}_m a_x - \frac{k-1}{2k} EX_m$$ anticipativna odložena doživotna renta u ratama

$${}_m b_x^{(k)} \cong {}_m b_x + \frac{k-1}{2k} EX_m$$ dekurzivna odložena doživotna renta u ratama

PREMIJA U RATAMA

Neka se premije plaćaju k puta u toku godine dana, i neka je $P^{(k)}$ - premija u ratama.

Godišnja rata rente u ratama je $k \cdot P^{(k)}$

Npr. ako se premija plaća n godina neposredno privremeno, tada važi:

$$A = k \cdot P^{(k)} \cdot a_{x,n}^{(k)}$$

odnosno

$$\boxed{P^{(k)} = \frac{A}{k \cdot a_{x,n}^{(k)}}}$$

Ako je P – godišnja premija tada je:

- polugodišnja premija $$P^{(2)} \cong \frac{1}{2} \cdot P \cdot 1{,}02 = 0{,}51 \cdot P$$
- kvartalna premija $$P^{(4)} \cong \frac{1}{4} \cdot P \cdot 1{,}03 = 0{,}2575 \cdot P$$
- mjesečna premija $$P^{(12)} \cong \frac{1}{12} \cdot P \cdot 1{,}04 = 0{,}087 \cdot P$$

OBRAČUN BRUTO PREMIJE

Troškovi osiguravajućeg društva obuhvataju:

1. akvizicione troškove – troškove pribavljanja osiguranja
2. inkaso troškove – troškove naplate premije i
3. administrativne (upravne) troškove.

Visina jednokratne bruto premije za jedinicu osiguranog kapitala iznosi

$$JB = JN + x_1 + y + z \cdot JB$$

odakle dobijamo da je

$$JB = \frac{JN + x_1 + y}{1 - z}$$

Na osnovu principa ekvivalencije, suma diskontovanih godišnjih iznosa d (na t=0, dan zaključenja ugovora), mora biti jednaka x_1 -visini akvizicionih troškova, tj.

$$d \cdot a_x = x_1 \quad \text{ili} \quad d \cdot a_{x,n} = x_1$$

u zavisnosti od toga da li godišnje premije plaćamo doživotno ili za n godina.

Dalje je

$$\mathrm{d} = \frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{a}_\mathrm{x}} \qquad \mathrm{d} = \frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{a}_{\mathrm{x,n}}}$$

$$d = \frac{D_x \cdot x_1}{N_x} \qquad \mathrm{d} = \frac{\mathrm{D}_\mathrm{x} \cdot \mathrm{x}_1}{\mathrm{N}_\mathrm{x} - \mathrm{N}_{\mathrm{x+n}}}$$

Za upravne troškove y, slično prethodnom, imamo da je e njihov alikvotni dio:

$$e = \frac{D_x \cdot y}{N_x} \quad \text{ili} \quad \mathrm{e} = \frac{\mathrm{D_x} \cdot \mathrm{y}}{\mathrm{N_x} - \mathrm{N_{x+n}}}$$

za doživotno ili privremeno plaćanje premija, respektivno.

Sada je

$$PB = PN + d + e + z \cdot PB \quad \text{odakle je} \quad \mathrm{PB} = \frac{\mathrm{PN} + \mathrm{d} + \mathrm{e}}{1 - \mathrm{z}} \quad \textbf{(*)}$$

Dakle, gornja relacija (*) predstavlja visinu godišnje bruto premije potrebne da bi se osigurala jedinica kapitala ili renta od l € godišnje. Iznosi d i e određeni su prethodnim relacijama.

Primjer 1.

Lice staro x godina je osiguralo kapital za slučaj doživljenja k godina (k>x)), tj. sa trajanjem od k-x godina.

Akvizicioni troškovi su x=20‰, upravni y=45‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi su z=4% od bruto premije. Odrediti, pa izraziti u promilima:

jednokratnu bruto premiju,

godišnju, za 20 godina, bruto premiju za ovu vrstu osiguranja.

<u>Rješenje:</u>

$$a)\, JB = \frac{JN + x_1 + y}{1 - z} = \frac{\frac{D_k}{D_x} + 0{,}02 + 0{,}045}{1 - 0{,}04} \cdot 1.000‰$$

b) $$PB = \frac{PN + d + e}{1 - z} \cdot 1.000‰$$

Ovdje je PN visina godišnje neto premije za osiguranje kapitala za slučaj doživljenja, a premije se plaćaju neposredno privremeno za 20 godina.

Primjer 2.

Lice staro 30 godina osiguralo je kapital za slučaj doživljenja 50-te godine i plaća bruto premiju od 500 € za 20 godina. Akvizicioni troškovi su jednokratno 2%, upravni troškovi su godišnje 5‰ osigurane sume, a inkaso troškovi su 2,5% od bruto premije. Koliki je kapital? Kolika je neto premija?

Rješenje:

Slično kao u Primjeru 1 b) izračunamo PN,

$$\mathrm{d} = \mathrm{D}_{30} \cdot \frac{0{,}02}{\mathrm{N}_{30} - \mathrm{N}_{50}} \qquad \mathrm{e} = 0{,}005$$

pa iz (*) dobijamo PB - visinu bruto premije za jedinicu osiguranog kapitala.

Iz proporcije $PB : 1 = 500 : K$ dobijamo da je $K = \frac{500}{PB}$

Neto premija y, koja odgovara bruto premiji od 500 € se dobija iz razmjere:

$y : 500 = PN : PB$ pa je $y = 500 \cdot \frac{PN}{PB}$

Račun, uz upotrebu tablica, samostalno.