Finansijska matematika 1

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2019-20

Četvrta nedjelja

Konstnantni intenzitet kamate

PRETPOSTAVKA: $\delta(t) = \delta = const.$

- Početak poglavlja 3
- Pretpostavka važi do kraja poglavlja 4

Veličine v i δ

Sadašnja vrijednost:

- $v(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta(s)\, ds\right) = e^{-\delta t}$
- $v := v(0) = e^{-\delta t}$ – diskontni faktor
- $v(t) = v^t$

Sadašnja vrijednost zavisi samo od dužine perioda

Vrijednost u trenutku s kapitala C sa rokom dospijeća $s + t$ je:

$$C\frac{v(s+t)}{v(s)} = Cv^t$$

Akumulacija kapitala

$$F(t) = \exp\left(\int_0^t \delta(s)\, ds\right) = e^{\delta t}$$

- $i = e^{\delta} - 1$ (konstantna) efektivna kamatna stopa
- $1 + i = \delta$
- $F(t) = (1 + i)^t$

Diskontna stopa

Konstantna diskontna stopa

$$d = 1 - v = 1 - e^{-\delta t}$$

Interpretacija:

Kapital $1 - d$ uložen po kamatnoj stopi i se nakon godinu dana akumulira na 1:

$$(1-d)(1+i) = \left(1 - \frac{1}{1+i}\right)(1+i) = 1$$

Dakle, $1 - d = v$ je sadašnja vrijednost kapitala vrijednosti 1.

Diskontna stopa

Jednakost $d = iv$

- $d = 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = iv$
- Interpretacija?

Diskontna stopa

Jednakost $d = iv$

- $d = 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = iv$
- Interpretacija?

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow 1 + i \\ 1 - d &\longrightarrow 1 \end{aligned}$$

Sadašnja vrijednost kamate i je d

Diskontna stopa i neprekidno kamaćenje

Jednakost $d = \delta F(1)$

$$\int_0^1 e^{-\delta t}\, dt = \frac{1 - e^{-\delta}}{\delta} = \frac{d}{\delta}$$

Interpretacija?

Diskontna stopa i neprekidno kamaćenje

Jednakost $d = \delta F(1)$

$$\int_0^1 e^{-\delta t}\, dt = \frac{1 - e^{-\delta}}{\delta} = \frac{d}{\delta}$$

Interpretacija?

$d = \delta F(1) = iv!$

Veličine δ , i, v i d

Value Of	$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{d}$
In Terms Of				
δ		$e^{\delta} - 1$	$e^{-\delta}$	$1 - e^{-\delta}$
i	$\ln\,(1+i)$		$(1+i)^{-1}$	$i\,(1+i)^{-1}$
v	$-\ln\,v$	$v^{-1} - 1$		$1 - v$
d	$-\ln\,(1-d)$	$(1-d)^{-1} - 1$	$1 - d$	

EXAMPLE 3.2.2

In return for an immediate payment of £500 and a further payment of £200 2 years from now, an investor will receive £1,000 after 5 years. Find the yield for the transaction.

Solution

Choose 1 year as the unit of time. The equation of value at time 0 is

$$f(i) = -500 - 200(1+i)^{-2} + 1{,}000(1+i)^{-5} = 0$$

Our earlier discussion indicates that there is a unique root by Theorem 3.2.2.

Since $f(0.08) = 9.115$ and $f(0.09) = -18.405$, the yield is between 8% and 9% per annum. A first approximation for the yield, obtained by linear interpolation, is

$$0.08 + (0.09 - 0.08)\frac{9.115 - 0}{9.115 - (-18.405)} = 0.0833$$

i.e., $i \approx 8.33\%$ per annum.

If the yield were required to a greater degree of accuracy, one might evaluate $f(0.085)$ and interpolate between this and $f(0.08)$. The yield to four decimal places is, in fact, 8.3248% per annum.

Zaključak

- Ako investitor može da uloži novac negdje drugo po kamatnoj stopi većoj od $i = 0.833$ investicija je nepovoljna
- Ako investitor može da uloži novac negdje drugo samo po kamatnoj stopi manjoj od $i = 0.833$ investicija je povoljna
- Sadašnja vrijednost investicije obračunata sa kamatnom stopom $i = 0.833$ je nula!
- i je interna stopa prinosa (implied yield, internal rate of return, IRR).

Cilj: definistati i opisati IRR za opšte novčane tokove

Jednačina vrijednosti

- $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – fiksirani trenuci
- $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$
  - c_i – neto tok novca u trenutku t_i
  - $c_i > 0$ – prihod u trenutku t_i
  - $c_i < 0$ – rashod u trenutku t_i
- δ – (nepoznati) intenzitet kamate
- i – (nepoznata) kamatna stopa

Pitanje:

Po kojoj (konstantnoj) kamatnoj stopi i je sadašnja vrijednost toka novca jednaka 0?

Jednačina vrijednosti

Jednačina vrijednosti po i

$$\sum_{k=1}^{n} c_k v^{t_k} = \sum_{k=1}^{n} c_k (1+i)^{-t_k} = 0$$

Jednačina vrijednosti po δ

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e^{-\delta t_k} = 0$$

Jednačina vrijednosti

Neprekidni slučaj

- $\rho(t)$ – neto intenzitet nočanog toka
  - $\rho(t) > 0$ – intenzitet prihoda
  - $\rho(t) < 0$ – intenzitet rashoda

- δ – (nepoznati) konstantni intenzitet kamate

Jednačina vrijednosti

$$\int_0^\infty \rho(t)e^{-\delta t}\,dt = 0$$

Može se razmatrati i kombinovani slučaj sa intenzitetom novčanog toka i diskretnim novčanim tokom, kao i ranije.

Jednačina vrijednosti

Broj rješenja

- Moguće je da jednačina nema rješenja
- Više od jednog rješenja - interpretacija?
- Jedinstveno rješenje - uslovi?
- *Intenzitet kamate određen jednačinom vrijednosti* je jedinstveno rješenje δ_0 (ako postoji).
- *Interna stopa prinosa* ili *kamatna stopa određena jednačinom vrijednosti* je jedinstveno rješenje $i_0 = 1 - e^{-\delta_0}$ (ako postoji).

Teorema 3.2.1

Ako niz neto novčanih tokova $c_1, c_2, \ldots, c_n$ mijenja znak tačno jednom onda jednačina vrijednosti ima jedinstveno rješenje.

Teorema 3.2.2

Ako niz kumulativnih vrijednosti novčanog toka $A_1, A_2, \ldots, A_n$, gdje je $A_i = c_1 + \ldots + c_i$, mijenja znak tačno jednom onda jednačina vrijednosti ima jedinstveno rješenje.

- Dokaz prve teoreme jako lak: neprekidna strogo monotona funkcija siječe Ox osu tačno jednom.
- Dokaz druge teoreme tehnički zahtjevniji.

Jednačina vrijednosti

Opšti slučaj

- Iznenađujuće komplikovan
- Problematične interpretacije u slučaju više rješenja
- Obimna literatura

Sljedeće neđelje:

Anticipativni annuitet (annuity due)

- n godišnjih uplate vrijednosti 1 počev od početka prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\overline{n}|}$:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - v^n \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1 - v^n}{d}$$

Dekurzivni annuitet (immediate annuity)

- n godišnjih uplate vrijednosti 1 počev od kraja prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\overline{n}|}$:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n = \frac{1 - v^n}{i}$$

Anuiteti sa više godišnjih uplata

- Anuiteti sa m jednakih uplata m puta godišnje.
- Sadašnje vrijednosti se označavaju sa: $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$ i $a^{(m)}_{\overline{n}|}$.

Rastući i opadajući anuiteti

- Prirodno se definišu i rastući anuiteti sa uplatama $1, 2, \ldots, n$
- Za sadašnje vrijednosti se koriste oznake: $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ i $(Ia)_{\overline{n}|}$.
- Razmatraju se i opadajući anuiteti sa uplatama $n, n-1, \ldots, 1$
- Za sadašnje vrijednosti se koriste oznake: $(D\ddot{a})_{\overline{n}|}$ i $(Da)_{\overline{n}|}$.

Ukupna vrijednost anuiteta

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} \text{ i } s_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}} \text{ i } s^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}$$

$$(I\ddot{s})_{\overline{n|}}, \quad (Is)_{\overline{n|}}, \quad (D\ddot{s})_{\overline{n|}}, \quad (Ds)_{\overline{n|}}, \ \ldots$$

Anticipativni perpetuitet (perpetuity due)

- Godišnje uplate vrijednosti 1 počev od početka prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + \ldots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}$$

Dekurzivni perpetuitet (immediate perpetuity)

- Godišnje uplate vrijednosti 1 počev od kraja prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\overline{\infty}|}$:

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}$$

Perpetuiteti sa m godišnjih plaćanja

Anticipativni perpetuitet sa m godišnjih plaćanja

- m godišnjih uplata vrijednosti $\frac{1}{m}$ počev od početka prvog perioda dužine $\frac{1}{m}$.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}$:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m} + \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{2}{m}}}{m} + \ldots = \frac{1}{m}\frac{1}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{d^{(m)}}$$

Dekurzivni perpetuitet sa m godišnjih plaćanja

- m godišnjih uplata vrijednosti $\frac{1}{m}$ počev od kraja prvog perioda dužine $\frac{1}{m}$
- Sadašnja vrijednost se označava sa $a^{(m)}_{\overline{\infty}|}$:

$$a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{2}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{3}{m}}}{m} + \ldots = \frac{1}{m}\frac{v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{i^{(m)}}$$

Neprekidni perpetuitet

- Neprekidna plaćanja počev od trenutka $t = 0$.
- Konstantan intenzitet plaćanja $r(t) = 1$.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\bar{a}_{\overline{\infty}|}$:

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|} = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t}\, dt = \frac{1}{\delta}$$