Finansijska matematika 1

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2019-20

Peta nedjelja

Anuiteti krajem roka

Immediate annuity-certain

Dekurzivni anuiteti (anuiteti krajem roka)

- Niz od n (godišnjih) uplata, vrijednost svake uplate je 1
- Uplate se vrše krajem perioda: k-ta uplata u trenutku $t+k$

Sadašnja vrijednost (u trenutku t)

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k = \frac{v(1-v^n)}{1-v} = \frac{1-v^n}{v^{-1}-1} = \frac{1-v^n}{i}$$

Ukupna vrijednost (u trenutku $t+n$)

$$s_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k} = (1+i)^n a_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Anuiteti početkom roka

Annuity-due

Anticipativni anuiteti (anuiteti početkom roka)

- Niz od n (godišnjih) uplata, vrijednost svake uplate je 1
- Uplate početkom perioda: k-ta uplata u trenutku $t + k - 1$

Sadašnja vrijednost (u trenutku t)

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^{k-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d}$$

Ukupna vrijednost (u trenutku $t + n$)

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (1 + i)^{n-k} = (1 + i)^n \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{(1 + i)^n - 1}{d}$$

Veza između $a_{\overline{n|}}$ i $\ddot{a}_{\overline{n|}}$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{n|}} &= (1+i)a_{\overline{n|}} \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} &= 1 + a_{\overline{n-1|}} \\ 1 &= i\,a_{\overline{n|}} + v^n = d\,\ddot{a}_{\overline{n|}} + v^n \end{aligned}$$

Veza između $s_{\overline{n|}}$ i $\ddot{s}_{\overline{n|}}$

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{\overline{n|}} &= (1+i)s_{\overline{n|}} \\ \ddot{s}_{\overline{n|}} &= s_{\overline{n+1|}} - 1 \\ (1+i)^n &= i\,s_{\overline{n|}} + 1 = d\,\ddot{s}_{\overline{n|}} + 1 \end{aligned}$$

Veza između $a_{\overline{n}|}$ i $s_{\overline{n}|}$

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^n a_{\overline{n}|}$$

Veza između $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ i $\ddot{s}_{\overline{n}|}$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

Perpetuiteti

Beskonačni niz (jednakih) uplata

Dekurzivni perpetuitet (immediate perpetuity)

- Godišnje uplate vrijednosti 1, k-ta uplata u trenutku $t + k$
- Sadašnja vrijednost:

$$a_{\overline{\infty}|} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|} = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}$$

Anticipativni perpetuitet (perpetuity due)

- Godišnje uplate vrijednosti 1, k-ta uplata u trenutku $t + k - 1$
- Sadašnja vrijednost:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}$$

Odloženi anuiteti

- $t = 0$, prvih $m \in \mathbb{N}$ godina nema uplata
- Niz od n (godišnjih) uplata, vrijednost svake uplate je 1

Odloženi dekurzivni anuiteti (krajem roka)

- Uplate se vrše krajem perioda: k-ta uplata u trenutku $m + k$
- Sadašnja vrijednost (u trenutku $t = 0$):

$$ {}_{m|}a_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^{m+k} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{n}|} = v^m a_{\overline{n}|} $$

Odloženi anticipativni anuiteti (početkom roka)

- Uplate početkom perioda: k-ta uplata u trenutku $m + k - 1$
- Sadašnja vrijednost (u trenutku $t = 0$):

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^{m+k-1} = \ddot{a}_{\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m \ddot{a}_{\overline{n}|} $$

Neprekidni anuiteti

- Konstantno neprekidno plaćanje u vrijednosti 1 godišnje
- Konstantan intenzitet plaćanja: $\rho(t) \equiv 1$ [Vidi 3. nedjelju]
- $n \in \mathbb{R}^+$ – trajanje plaćanja

Neprekidni anuitet

Sadašnja vrijednost u trenutku $t = 0$:

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\, dt = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} = \frac{1 - v^n}{\delta}, \quad (\delta \neq 0)$$

Veza sa diskretnim anuitetima

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} \frac{1 - v^n}{i} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|}$$

Odloženi neprekidni anuitet

- Konstantno neprekidno plaćanje u vrijednosti 1 godišnje
- Konstantan intenzitet plaćanja: $\rho(t) \equiv 1$
- $n \in \mathbb{R}^+$ – trajanje plaćanja
- Plaćanje počinje u trenutku $m \in \mathbb{R}^+$;

Odloženi neprekidni anuitet

Sadašnja vrijednost u trenutku $t = 0$:

$$_{m|}\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_m^{m+n} e^{-\delta t}\, dt = \bar{a}_{\overline{m+n}|} - \bar{a}_{\overline{n}|} = v^m \, \bar{a}_{\overline{n}|}$$

Varijabilni anuiteti

- Niz od n uplata
- k-ta uplata u trenutku t_k
- X_k – Vrijednost k-te uplate
- Sadašnja vrijednost: $\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} X_k$

Specijalni slučajevi

- Rastući anuitet: $X_k = t_k = k$
- Opadajući anuitet: $t_k = k$, $X_k = n - k$
- X_k formira geometrijsku progresiju

- Niz od n uplata vrijednosti: 1, 2, ..., n
- k-ta uplata u trenutku k
- k – Vrijednost k-te uplate
- Sadašnja vrijednost: $(Ia)_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} kv^k = \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i}$

Sadašnja vrijednost - izvodjenje:

$$i(Ia)_{\overline{n}|} = (Ia)_{\overline{n}|} - \frac{1}{v}(Ia)_{\overline{n}|} = -nv^n + \sum_{k=1}^{n} v^{k-1} = \ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n$$

Interpretacija jednakosti: $\ddot{a}_{\overline{n}|} = i(Ia)_{\overline{n}|} + nv^n$?

Rastući anuiteti

Anticipativni rastući anuiteti

- Niz od n uplata vrijednosti: 1, 2, ..., n
- k-ta uplata u trenutku $k-1$
- k – Vrijednost k-te uplate
- Sadašnja vrijednost:

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} k v^{k-1} = (1+i)(Ia)_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|} + (Ia)_{\overline{n-1}|}$$

Ima li smisla definisati $(Ia)_{\overline{\infty}|}$ $(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|}$?

- Niz od n uplata vrijednosti: 1, 2, ..., n
- k-ta uplata u trenutku $k-1$
- k – Vrijednost k-te uplate
- Sadašnja vrijednost:

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} k v^{k-1} = (1+i)(Ia)_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|} + (Ia)_{\overline{n-1}|}$$

Ima li smisla definisati $(Ia)_{\overline{\infty}|}$ $(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|}$?

$$(Ia)_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2}; \qquad (I\ddot{a})_{\overline{\infty}|} = (1+i)(Ia)_{\overline{\infty}|}$$

Konstantan intenzitet plaćanja u toku godine

Intenzitet plaćanja je r u periodu od $r-1$ do r; sadašnja vrijednost:

$$(I\bar{a})_{\overline{n}|} = \sum_{r=1}^{n} \int_{r-1}^{r} r v^t \, dt = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - n v^n}{\delta} \tag{1}$$

Rastući intenzitet plaćanja

Intenzitet plaćanja je t u trenutku t; sadašnja vrijednost:

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = \int_{0}^{n} t v^t \, dt = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|} - n v^n}{\delta} \tag{2}$$

Rastući anuiteti

Prirodno se definišu ukupna vrijednost rastućih anuiteta i odloženi rastući anuiteti:

- $(Is)_{\overline{n}|} = (1+i)^n (Ia)_{\overline{n}|}$
- $(I\ddot{s})_{\overline{n}|} = (1+i)^n (I\ddot{a})_{\overline{n}|}$
- $(I\bar{s})_{\overline{n}|} = (1+i)^n (I\bar{a})_{\overline{n}|}$
- $(\bar{I}\bar{s})_{\overline{n}|} = (1+i)^n (\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}$

- ${}_{m|}(Ia)_{\overline{n}|} = v^m (Ia)_{\overline{n}|}$
- ${}_{m|}(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = v^m (I\ddot{a})_{\overline{n}|}$
- ${}_{m|}(I\bar{a})_{\overline{n}|} = v^m (I\bar{a})_{\overline{n}|}$
- ${}_{m|}(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = v^m (\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}$

Rastući anuiteti

Svaki anuitet čija plaćanja formiraju aritmetički niz se može predstaviti preko standardnih rastućih anuiteta!

Opadajući anuiteti

Dekurzivni opadajući anuiteti

- Niz od n uplata vrijednosti: n, $n-1$, ..., 1
- k-ta uplata u trenutku k
- $n-k$ – Vrijednost k-te uplate
- Sadašnja vrijednost: $(Da)_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n}(n-k)v^k = \dfrac{n - a_{\overline{n}|}}{i}$

Sadašnja vrijednost - izvodjenje:

$$(Ia)_{\overline{n}|} + (Da)_{\overline{n}|} = (n+1)a_{\overline{n}|}$$

Zašto?

Definicije i oznake analogne rastućim anuitetima

- Anticipativni opadajući anuiteti
- Neprekidni opadajući anuiteti
- Ukupna vrijednost opadajućih anuiteta
- Odloženi opadajući anuiteti

Kamata koja se obračunava p puta godišnje

Nominalna i efektivna kamatna stopa

i i $i^{(p)}$ – (konstantna) efektivna i nominalna kamatna stopa

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^p$$

$$(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 = \frac{i^{(p)}}{p}$$

$$i = \frac{i^{(p)}}{p} \cdot \frac{(1+i) - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}$$

$$i = \sum_{t=1}^{p} \frac{i^{(p)}}{p}(1+i)^{\frac{p-t}{p}}$$

Interpretacija posljednje jednakosti?

	0	1/p	2/p	3/p	...	(p-1)/p	1
(1)	d						
(2)	$d^{(p)}/p$	$d^{(p)}/p$	$d^{(p)}/p$	$d^{(p)}/p$	...	$d^{(p)}/p$	
(3)		$i^{(p)}/p$	$i^{(p)}/p$	$i^{(p)}/p$	...	$i^{(p)}/p$	$i^{(p)}/p$
(4)							i
(5)	$\longleftarrow$				δ		$\longrightarrow$

FIGURE 4.1.1
Equivalent payments

Kamata koja se obračunava p puta godišnje

Nominalna i efektivna diskontna stopa

d i $d^{(p)}$ – (konstantna) efektivna i nominalna diskontna stopa

$$1-d=\left(1-\frac{d^{(p)}}{p}\right)^{p}$$

$$1-(1-d)^{\frac{1}{p}}=\frac{d^{(p)}}{p}$$

$$d=\frac{d^{(p)}}{p}\cdot\frac{1-(1-d)}{(1-d)^{\frac{1}{p}}-1}$$

$$d=\sum_{t=1}^{p}\frac{d^{(p)}}{p}(1-d)^{\frac{t-1}{p}}$$

Kamata koja se obračunava p puta godišnje

Efektivna kamatna i diskontna stopa i δ

$$i^{(p)} = p(e^{\frac{\delta}{p}} - 1) \qquad d^{(p)} = p(1 - e^{-\frac{\delta}{p}})$$

Monotonost efektivne kamatne i diskontne stope

$$\lim_{p\to\infty} i^{(p)} = \lim_{p\to\infty} d^{(p)} = \delta$$
$$i > i^{(2)} > i^{(3)} > \ldots > \delta$$
$$d < d^{(2)} < d^{(3)} < \ldots < \delta$$

Zašto?

Anuiteti sa p godišnjih plaćanja

Dekurzivni anuiteti (anuiteti krajem roka)

- Niz od $n \cdot p$ uplata: n godina, p uplata godišnje,
- Vrijednost svake uplate je 1/p
- Uplate se vrše u trenucima 1/p, 2/p, 3/p...

Sadašnja vrijednost

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \sum_{t=1}^{np} \frac{1}{p} v^{t/p} = \ldots = \frac{1 - v^n}{i^{(p)}} = \frac{i}{i^{(p)}} a_{\overline{n}|}$$

Anuiteti sa p godišnjih plaćanja

Alternativna interpretacija

- p godišnjih jednakih uplata u trenucima 1/p, ..., 1
- Kamata na uplate vrijednosti $\frac{i^{(p)}}{p}$ je i
- Kamata na uplate vrijednosti $\frac{1}{p}$ je onda $\frac{i}{i^{(p)}}$
- Sadašnja vrijednost p uplata vrijednosti $\frac{1}{p}$:
  - Tekuće (nulte) godine je $v\frac{i}{i^{(p)}}$
  - Ako su uplate k-te godine: $\frac{1}{p}$ je $v^k\frac{i}{i^{(p)}}$
- Sadašnja vrijednost k jednakih uplata vrijednosti $\frac{i}{i^{(p)}}$ je $\frac{i}{i^{(p)}}a_{\overline{n}|}$!

Zaključak

Sadašnja vrijednost po p uplata vrijednosti $\frac{1}{p}$ kroz n godina je onda isto:

$$\frac{i}{i^{(p)}}a_{\overline{n}|}$$

Anuiteti sa p godišnjih plaćanja

Računski detalji o prethodnoj interpretaciji

$$i = \sum_{t=1}^{p} \frac{i^{(p)}}{p}(1+i)^{\frac{p-t}{p}}$$

$$\frac{i}{i^{(p)}} = \sum_{t=1}^{p} \frac{1}{p}(1+i)^{\frac{p-t}{p}}$$

$$v\frac{i}{i^{(p)}} = \sum_{t=1}^{p} \frac{1}{p}v^{\frac{t}{p}}$$

$$v^{k+1}\frac{i}{i^{(p)}} = \sum_{t=1}^{p} \frac{1}{p}v^{\frac{kp+t}{p}}$$

$$\frac{i}{i^{(p)}}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{t=1}^{p} \frac{1}{p}v^{\frac{kp+t}{p}} = \sum_{t=1}^{np} \frac{1}{p}v^{t/p}$$

Definicije i oznake analogne (godišnjim) anuitetima

- Anticipativni anuiteti sa p godišnjih plaćanja
- Odloženi anuiteti sa p godišnjih plaćanja
- Neograničeni anuiteti ($n = \infty$)
- Oznake za sadašnje vrijednosti i ukupne vrijednosti:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}}, \quad {}_{m|}a^{(p)}_{\overline{n|}}, \quad {}_{m|}\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}}, \quad a^{(p)}_{\overline{\infty|}}, \quad \ddot{a}^{(p)}_{\overline{\infty|}}, \quad s^{(p)}_{\overline{n|}}, \quad \ddot{s}^{(p)}_{\overline{n|}}$$

Anuiteti sa p godišnjih plaćanja

Neke jednakosti

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{d^{(p)}}\, a_{\overline{n}|}$$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = v^{1/p}\, \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$$

$$s^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(p)}}\, s_{\overline{n}|}$$

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{d^{(p)}}\, \ddot{s}_{\overline{n}|}$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \lim_{p\to\infty} a^{(p)}_{\overline{n}|} = \lim_{p\to\infty} \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$$

$$i\, a_{\overline{n}|} = i^{(p)}\, a^{(p)}_{\overline{n}|} = d^{(p)}\, \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = d\, \ddot{a}_{\overline{n}|} = \delta\, \bar{a}_{\overline{n}|}$$

$$a^{(p)}_{\overline{\infty}|} = 1/i^{(p)}, \qquad \ddot{a}^{(p)}_{\overline{\infty}|} = 1/d^{(p)}$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{\infty}|} = a^{(p)}_{\overline{\infty}|} + 1/p$$