Finansijska matematika 1

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2019-20

Sedma nedjelja

The idea of arbitrage is best explained by telling a little joke: A professor working in Mathematical Finance and a normal person go on a walk and the normal person sees a 100EUR bill lying on the street. When the normal person wants to pick it up, the professor says:
Don't try to do that. It is absolutely. impossible that there is a 100EUR bill lying on the street. Indeed, if it were lying on the street, somebody else would have picked it up before you.
(end of joke)

F. Delbean, W. Schachmermayer: *The Mathematics of Arbitrage*

Arbitraža

Primjer

Cijene

- New York: 1EUR = 1USD
- Frankfurt: 1EUR = 0.9USD

Strategija za zaradu bez rizika i ulaganja:

- Pozajmi 0.9USD
- Kupi 1 EUR za 0.9USD u Frankfurtu
- Prodaj 1 EUR za 1 USD u NY
- Vrati 0.9 USD
- Zarada 0.1 USD

Arbitraža

Primjer, komentari

- Pozajmimo 900 000 000 USD? Zarada 100 000 000USD.
- Neodrživa situacija.
- Market forces
  - Rast potražnje EUR u Frankfurtu - rast cijene EUR
  - Rast ponude EUR u NY - pad cijene EUR
  - Cijene bi se izjednačile
- Jednake cijene u oba grada – strategija je neprofitabilna

Arbitraža

Neformalna definicija

Arbitraža je mogućnost zarade bez rizika i ulaganja.

- Mogućnost arbitraže je gotovo nemoguća i veoma kratkotrajna.
- *The principle of no arbitrage*:
  Finansijska tržista ne bi trebalo da dozvoljavaju mogućnost arbitraže.

Toy example

Model tržišta

- Dva vremenska perioda: danas ($t = 0$) i sjutra ($t = 1$)
- Dva stanja svijeta: $\Omega = \{g, b\}$
- Vjerovatnosna mjera P: $P(g) = P(b) = \frac{1}{2}$
- Bezrizična aktiva B:

$$B_0(g) = B_0(b) = B_1(g) = B_1(b) = 1$$

- Rizična aktiva S:

$$S_0(g) = S_0(b) = 1, \quad S_1(g) = 2,\ S_1(b) = \frac{1}{2}$$

Pretpostavljamo likvidnost, zanemarujemo transakcione troškove...

Toy example

Opcija

Call opcija

Vlasnik call opcije na aktivu S ima pravo, ali ne i obavezu, da kupi aktivu S po unaprijed definisanoj cijeni K (strike price) u trenutku $t = 1$.

Put opcija

Vlasnik put opcije na aktivu S ima pravo, ali ne i obavezu, da proda aktivu S po unaprijed definisanoj cijeni K (strike price) u trenutku $t = 1$.

Toy example
Call opcija

- C – call opcija sa strike cijenom $K = 1$
- Opcija se koristi samo ako se ostvaruje profit
- $\omega = g$: $S_1(g) = 2 > 1 = K \quad \Rightarrow \quad C_1(g) = 2 - 1 = 1$
- $\omega = b$: $S_1(b) = \frac{1}{2} < 1 = K \quad \Rightarrow \quad C_1(b) = 0$

$$C_1 = max(S_1 - K, 0) = (S_1 - K, 0)^+$$

Kolika je vrijednost opcije u trenutku $t = 0$?

Toy example
Vrijednost call opcije

$C_0 = E[C_1] = \frac{1}{2}$?

- Zakon velikih brojeva?
- Rizična aktiva je u prosjeku profitabilnija od bezrizične
- $E[S_0] = 2/2 + 1/4 = 1.25 > 1 = S_1$
- $C_0 = \frac{1}{2}$ dozvoljava arbitražu (na sljedećim slajdovima).

Toy example
Replicirajući portfolio

Posmatrajmo portfolio $\Pi = \frac{2}{3}S - \frac{1}{3}B$

- Negativna vrijednost – pozajmica.
- $\Pi_1(g) = \frac{2}{3}S_1(g) - \frac{1}{3}B_1(g) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 = C_1(g)$
- $\Pi_1(b) = \frac{2}{3}S_1(b) - \frac{1}{3}B_1(b) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 = C_1(b)$
- $\Pi_1 = C_1$

$$\Pi_1 = C_1 \qquad \Rightarrow \qquad \Pi_0 = C_0!$$

Toy example

$$C_0 = P_0 = \frac{2}{3}S_0 - \frac{1}{3}B_0 = \frac{1}{3}$$

$C_0 \neq \frac{1}{3}$ vodi arbitraži:

- Npr. $C_0 = \frac{1}{2}$
- Prodaj C_0 za $\frac{1}{2}$
- Kupi Π_0 za $\frac{1}{3}$
- U trenutku $t = 1$: $\Pi_1 = C_1$
- Zarada bez rizika i ulaganja $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$!

Toy example

Equivalent martingale measure

Vjerovatnosna mjera Q: $Q(b) = \frac{2}{3}$, $Q(g) = \frac{1}{3}$

- $E^Q[S_1] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 2 = 1 = S_0$
- $E^Q[C_1] = \frac{2}{3} \cdot 0\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} = C_0$
- Q je risk *neutral probability measure*, *equivalent martingale measure*

The First Fundamental Theorem of Asset Pricing

(Veoma) neformalna formulacija

Postoji risk neutralna vjerovatnosna mjera akko nema arbitraže

The Second Fundamental Theorem of Asset Pricing

(Veoma) neformalna formulacija

Postoji jedinstvena risk neutralna vjerovatnosna mjera akko nema arbitraže i svaki finansijski instrument ima jedinstvenu cijenu

Osma nedjelja

Model

- t - vrijeme
  - Model sa jednim periodom: $t = 0$ ili $t = 1$
  - $t = 0$ – ''danas''
  - $t = 1$ – ''sjutra''

- Ω – konačni prostor elementarnih ishoda
  - $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$, $K < \infty$
  - ω_k – elementarni ishod, ''stanje svijeta''
  - Interpretacija:
    ''Stanje svijeta'' je nepoznato u trenutku $t = 0$, a poznato u trenutku $t = 1$

- P – vjerovatnosna mjera

- $P(\omega_k) > 0$, $k = 1, \ldots, K$

Model

B – bankovni proces (bank account proces)

- $B = \{B_t \,:\, t = 0, 1\}$
- $B_0 \equiv 1$ – pretpostavka
- B_1 – u opštem slučaju slučajna veličina
- B_1 – je konstantno u jednostavnim modelima
- Bankovni proces definiše kamatnu stopu
- $r = B_1 - B_0$
- Pretpostavka: $r \geq 0$

Model

S – cjenovni process (price process)

- $S_1, S_2, \dots S_N$ – cijene akcija N različitih kompanija, $N < \infty$
- $S_n(0)$ – cijena n-te akcije $(n = 1, \dots, N)$ u trenutku $t = 0$: poznata konstanta
- $S_n(1)$ – cijena n-te akcije $(n = 1, \dots, N)$ u trenutku $t = 0$: nenegativna slučajna veličina [cijene ne mogu biti negativne]
- $S_n(1)(\omega_k)$ – cijena n-te akcije $(n = 1, \dots, N)$ u k-tom stanju svijeta$(k = 1, \dots, K)$
- Ako je $N = 1$ koristićemo oznaku $S_1 = S$

Model

H – strategija trgovanja (trading strategy)

- $H = (H_0, H_1, \ldots, H_N) \in R^{N+1}$
- H_0 – količina novca (broj Eura) u banci
- H_n – broj akcija n-te kompanije
- $H_n \in \mathbb{R}$
  - $H_n < 0$ – pozajmica
  - Moguće je pozajmljivati novac – pozajmica u banci
  - Moguće je pozamljivati akcije – going short
- Strategija trgovanja definiše portfolio
  - U modelima sa više perioda strategija trgovanja je (slučajan i predvidiv) proces koji definiše portfolio u svakom trenutku

Model

V – Vrijednost portfolija

$$V_t = H_0 B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t) \tag{1}$$

- V_t – vrijednost portfolija u trenutku t
- $V_t = V_t(H)$ – zavisi od strategije trgovanja H
- V_t je linearno po H
- V_0 je poznata konstanta
- V_1 je slučajna veličina

Model

G - prinos

$$G = V_1 - V_0$$

- $G = G(H)$ – prinos odredjen strategijom trgovanja H

$$G = H_0 r + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n$$

- $\Delta S_n = S_n(1) - S_n(0)$
- $r = B_1 - 1 = B_1 - B_0$

Model

S^* – diskontovani cjenovni proces

$$S_n^*(t) = \frac{S_n(t)}{B_t}$$

- Normalizacija cijena
- Bankovni proces – *numèraire*
- ''Bankovni proces je postao konstantan''
- Diskontovane (sadašnje) vrijednosti cijena
- Korisno za poredjenje kretanja cijena jedne u odnosu na drugu

Model

- V_t^* – diskontovana vrijednost portfolija
- $V_t^* = H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(t)$
- $V_t^* = \dfrac{V_t}{B_t}$
- $G_t^* = V_1^* - V_0^*$– diskontovani prinos
- $G_t^* = \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*$

Dominantne strategije trovanja

Definicija

$\hat{H}$ je dominantna strategija trgovanja ako postoji (bar jedna) strategija trgovanja $\tilde{H}$ tako da važi:

1. $\hat{V}_0 = \tilde{V}_0$
2. $\hat{V}_1 > \tilde{V}_1$

- $\hat{V} = V(\hat{H})$, $\hat{V} = V(\tilde{H})$ – oznake
- Nejednakost 2. je nejednakost između s.v.:

$$\hat{V}_1(\omega) > \tilde{V}_1(\omega) \text{ važi za svako } \omega \in \Omega$$

Dominantne strategije trovanja

Tvrđenje 1.4

Postoji dominantna strategija trgovanja akko postoji strategija trgovanja H za koju važi:

1. $V_0 = 0$
2. $V_1 > 0 \qquad (V_1(\omega) > 0$ za svako $\omega \in \Omega)$

- Dokaz? – Sami!
- Interpretacija?
- Model dozvoljava dominantne strategije?

Dominantne strategije trgovanja

Tvrđenje 1.5

Postoji dominantna strategija trgovanja akko postoji strategija trgovanja H za koju važi:

1. $V_0 < 0$
2. $V_1 \geq 0 \qquad (V_1(\omega) \geq 0$ za svako $\omega \in \Omega)$

- Dokaz? – Sami!
- Interpretacija?
- Model ne bi trebalo da dozvoljava dominantne strategije!

Linearna cjenovna mjera

Linear pricing measure

Definicija

Vektor $\pi \in \mathbb{R}_+^K$ je *linearna cjenovna mjera* ako za svaku strategiju trgovanja H važi:

$$V_0^*(H) = \sum_{w \in \Omega} \pi(\omega) V_1^*(\omega)$$

- "V_0 kao cijena V_1"

Linearna cjenovna mjera

- Kako je $V_t^* = H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(t)$:

$$H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega) \left(H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(1)(\omega) \right)$$

- $\sum_{\omega} \pi(\omega) = 1$ – Zašto?
- $S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega) S_n^*(1)(\omega)$ – Zašto?

Linearna cjenovna mjera

Tvrdjenje 1.8

Vektor π je linearna cjenovna mjera ako i samo ako je vjerovatnosna mjera na Ω i važi:

$$S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega) S_n^*(1)(\omega)$$

Dokaz - sami.

Linearna cjenovna mjera i dominantne strategije

Tvrdjenje 1.9

Ne postoje dominantne strategije trgovanja ako i samo ako postoji linearna cjenovna mjera

Dokaz – linearno programiranje, Farkas lemma; projekat.

Zakon jedne cijene

Definicija

Kažemo da važi *zakon jedne cijene* ako ne postoje dvije strategije $\hat{H}$ i $\tilde{H}$ za koje važi $\hat{V}_1 \equiv \tilde{V}_1$ važi i $\hat{V}_0 > \tilde{V}_0$.

- $\hat{V}_1 \equiv \tilde{V}_1$ znači: $\hat{V}_1(\omega) = \tilde{V}_1(\omega)$ za svako ω
- $\hat{V}_0$, $\tilde{V}_0$ – konstante
- Interpretacija?
- Odnos sa postojanjem dominantnih strategija?

Zakon jedne cijene

Tvrđenje 1.12

Ako nema dominantnih strategija trgovanja onda važi zakon jedne cijene. Obrnuto tvrđenje ne važi.

Dokaz – sami.

Arbitraža

Arbitrage (opportunity)

Definicija

Arbitraža je strategija trgovanja H za koju važi:

1. $V_0 = V_0(H) = 0$
2. $V_1 = V_1(H) \geq 0$
3. $E[V_1] = E[V_1(H)] > 0$

- Interpretacija?
- Sličnosti i razlike sa dominantnim strategijama?

Arbitraža

Tvrđenje 1.13

Ako postoji dominantna strategija postoji arbitraža. Obrnuto nije tačno.

Dokaz – sami.

Arbitraža

Alternativna definicija

Strategija trgovanja H je arbitraža akko važi:

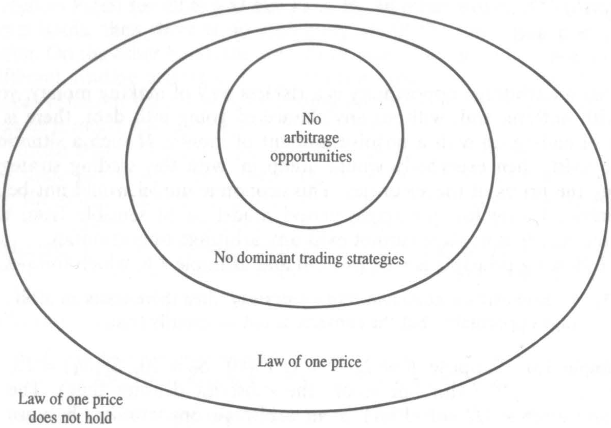
1. $V_0^* = 0$
2. $V_1^* \geq 0$
3. $E[V_1^*] > 0$

Tvrđenje 1.14

Strategija trgovanja H je arbitraža akko važi:

1. $G^* \geq 0$
2. $E[G^*] > 0$

Dokaz – sami.


No
arbitrage
opportunities
No dominant trading strategies
Law of one price
Law of one price
does not hold

Rizik neutralna vjerovatnostna mjera

Risk neutral probability measure, martingale measure

Definicija

Vjerovatnosna mjera Q je *rizik neutralna vjerovatnosna mjera* ako važi:

1. $Q(\omega) > 0$ za svako $\omega \in \Omega$
2. $E_Q[\Delta S_n^*] = 0$ za $n = 1, \ldots, N$

- E_Q – očekivanje u odnosu na mjeru Q:

$$E_Q[\Delta S_n^*] = \sum_{\omega} Q(\omega) \Delta S_n^*(\omega)$$

- Q je *strogo pozitivna* linearna cjenovna mjera

Rizik neutralna vjerovatnostna mjera

Tvrđenje 1.16

Nema arbitraže akko postoji rizik neutralna vjerovatnosna mjera.

- The First Fundamental Theorem of Asset Pricing
- Važan rezultat
- Dokaz – na tabli

Rizik neutralna vjerovatnostna mjera

- Rizik neutralna mjera ne mora da postoji
- Rizik neutralna mjera ne mora biti jedinstvena

Tvrđenje 1.18

Za proizvoljnu rizik neutralnu mjeru Q i strategiju trgovanja H važi:

$$V_0^* = E_Q[V_1^*]$$

Uslovno potraživanje

Contigent claim

Uslovno potraživanje je s.v. X.

Interpretacija

- "Ugovor o isplati"
- Prodavac prodaje ugovor/uslovno potraživanje/obećanje
- Prodavac se obavezuje da će u trenutku $t = 1$ isplatiti $X(\omega)$ ako se ispostavi da je stanje svijeta ω.

Kako odrediti cijenu uslovnog potraživanja X *u trenutku* $t = 0$?

Primjeri

Pretpostavimo $N = 1$.

Call opcija

Vlasnik *call opcije* ima pravo, ali ne i obavezu, da kupi akciju S u trenutku $t = 1$ po cijeni e.

- e – ugovorena cijena (excercise price)
- Opcija će se iskoristiti samo ako je $S > e$. Zašto?

$$X = (S - e)^+$$

Primjeri

Pretpostavimo $N = 1$.

Put opcija

Vlasnik *put opcije* ima pravo, ali ne i obavezu, da proda akciju S u trenutku $t = 1$ po cijeni e.

- e – ugovorena cijena (excercise price)
- Opcija će se iskoristiti samo ako je $S < e$. Zašto?

$$X = (e - S)^+$$

Uslovno potraživanje

Definicija

Uslovno potraživanje X je *marketabilno* ako postoji strategija trgovanja H, koju zovemo *replicirajuća strategija*, takva da je $V_1(H) = X$.

- Marketable, attainable contingent claim. Replicating strategy.
- Da li je svako uslovno potraživanje marketabilno?

Uslovno potraživanje

- p – cijena uslovnog potraživanja X
- Ako H replicira X i $p \neq V_0(H)$ onda postoji arbitraža. Zašto?
- Da li svaka replicirajuća strategija H ima istu vrijednost portfolija u trenutku $t = 0$?
  - Zakon jedne cijene!
- Da li postoji arbitraža ako je $p = V_0(H)$?

Uslovno potraživanje

Tvrđenje 1.19

Ako važi zakon jedne cijene onda je vrijednost p uslovnog potraživanja X: $p = V_0(H)$, gdje je H replicirajuća strategija za X.

Tvrđenje 1.20

Ako ne postoji arbitraža onda je vrijednost p uslovnog potraživanja X: $p = E_Q[X/B_1]$, gdje je Q proizvoljna rizik neutralna mjera.

- $p = E_Q[X/B_1] = E_Q[V_1(H)/B_1] = E_Q[V_1^*(H)] = V_0(H)$

Primjer

Put-call parity

Neka je:

- $N = 1$
- e – ugovorena cijena za date call i put opcije
- c – cijena call opcije
- p – cijena put opcije

Onda važi:

$$c - p = S(0) - \frac{e}{1+r}$$

Kompletna tržišta

Pretpostavka: postoji rizik neutralna vjerovatnostna mjera.

Kada postoji strategija H koje replicira usl. potraživanje X?

- X – dato uslovno potraživanje
- $H = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ – tražena strategija trgovanja
- $V_1(H)$ je s.v.: vektor dužine K.
- A – matrica takva da je $V_1(H) = AH$:

$$A := \begin{bmatrix} B_0(\omega_1) & S_1(0)(\omega_1) & \ldots & S_n(0)(\omega_1) \\ B_0(\omega_2) & S_1(0)(\omega_2) & \ldots & S_n(0)(\omega_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_0(\omega_K) & S_1(0)(\omega_K) & \ldots & S_n(0)(\omega_K) \end{bmatrix}$$

- A je poznata matrica (ne zavisi od H).
- H replicira X akko $AH = X$ ima rješenje!

Kompletna tržista

Definicija

Kažemo da je tržiste *kompletno* ako za svako uslovno potraživanje X postoji strategije trgovanja H koja replicira X.

Tvrđenje 1.22

Ako postoji rizik neutralna vjerovatnostna mjera onda važi:

Tržiste je kompletno akko rang $A = K$.

Kompletna tržista

Neka je $\mathbb{M} \neq \emptyset$ skup svih vjerovatnosnih mjera.

Tvrđenje 1.23

Postoji strategija trgovanja H koja replicira uslovno potraživanje X akko je vrijednost $E_Q[X/B_1]$ jednaka za sve $Q \in \mathbb{M}$

Tvrđenje 1.24 (The Second Fundamental Theorem of Asset Pricing)

Model je kompletan akko $\mathbb{M}$ sadrži tačno jednu rizik neutralnu vjerovatnostnu mjeru.