Finansijska matematika 1

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2020-21

Prvi dio

- Kamatni račun, novčani tokovi, vraćanje zajma...
- Garrett, Stephen. *An introduction to the mathematics of finance: a deterministic approach.* (2013)

Neki osnovni pojmovi

Kapital / Glavnica / Uložena suma

Pozajmljeni ili uložani novac.

Investitor / Kreditor / Povjerilac

Osoba ili pravno lice koje pozajmljuje ili ulaže novac.

Kamata / Interes

Trošak pozajmljivanja novca.
Nagrada za ulaganja novca.

Premija rizika

Povećanje kamate/dodatna kamata zbog prisustva rizika ne vraćanja novca.

Prosti interesni račun

Kamata se obračunava samo na glavnicu (a ne na zbir glavnice i kamate).

- C - kapital
- $i \geq 0$ - godišnja kamatna stopa (u procentima)
- $A_0 = C$, $A_1 = C + iC = C(1+i)$, $A_2 = A_1 + iC$, ...
- $A_n = A_{n-1} + iC = C(1+in)$, $n \in \mathbb{N}$
- S obzirom da se kamata obračunava na kraju obračunskog perioda (u ovom slučaju godine) kažemo da se kamata obračunava *dekurzivno*.

$$C(1+ni)$$

U opštem slučaju je $n \in \mathbb{R}^+$, npr. poslije m mjeseci je $C(1+\frac{m}{12}i)$

Prosti interesni račun

- U praksi, prost obračun kamate vodi do anomalija na tržištu (primjer kasnije).
- U praksi se koristi za kratkoročne zajmove (manje od godinu, $t \leq 1$).
- U praksi se prosti interes često računa *anticipativno*:
  - Investititor ulaže $X(1 - td)$
  - Po isteku perioda t bude mu isplaćeno X
  - $d \geq 0$ - (godišnja) diskontna stopa
- Koja je veza između i i d?

Primjer: uvod

Hartija od vrijednosti

Dokument kojim se obećava isplata novca (pod određenim uslovima).
Izdaju ga države, banke, kompanije...

Blagajnički zapis / Treasury Bill / T-Bill

Diskontna, *kratkoročna* hartija od vrijednosti koju izdaje (centralna) banka obavezujući se da će vlasniku zapisa u po isteku *roka dospijeća* isplatiti *nominalnu vrijednost*.

- Nominalna vrijednost: vrijednost naznačena na blagajničkom zapisu
- Diskontna hartija od vrijednosti: prodaje se po cijeni koja manja od nominalne vrijednosti
- Kratkoročna hartija od vrijednosti: $t \leq 1$
- Rok dospijeća: naznačeno vrijeme kada se vrši isplata

Primjer: nastavak

Cijena blagajničkog zapisa

$$P = X(1 - dt)$$

- X je nominalna vrijednost
- d je diskontna stopa
- t je rok dospijeća

Primjer

Price of a 30-day £2,000 treasury bill issued by the government at a simple rate of discount of 5% per annum:

$$2000 \cdot \left(1 - \frac{30}{365} \cdot 0.05\right) = 1991.78$$

Složeni interesni račun

Kamata se obračunava na zbir glavnice i kamate.

- $i \geq 0$ - godišnja kamatna stopa (u procentima)
- $A_0 = C$
- $A_1 = A_0 + iA_0 = C(1+i)$,
- $A_2 = A_1 + iA_1 = C(1+i)^2$, ...
- $A_n = A_{n-1} + iA_{n-1} = C(1+i)^n$, $n \in \mathbb{N}$
- S obzirom da se kamata obračunava na kraju obračunskog perioda (u ovom slučaju godine) kažemo da se kamata obračunava *dekurzivno*.

$$C(1+i)^n$$

Složeni interesni račun

U opštem slučaju je $t \in \mathbb{R}^+$.

$$C(1+i)^t$$

Investitor koji ima pristup dvama računima sa istom kamatnom stopom i koja se obračunava složenim interesnim računom ne zarađuje premještanjem novca između računa:

$$\left(C(1+i)^{t_1}\right)(1+i)^{t_2} = C(1+i)^{t_1+t_2}$$

Tejlorova aproksimacija

Prosta kamata se može interpretirati kao Tejlorova aproksimacija složene kamate.

$$
\begin{aligned}
f(i) &= (1+i)^t, \quad f(0) = 1 \\
f'(i) &= t(1+i)^{t-1}, \quad f'(0) = 0 \\
f(i) &= f(0) + \frac{if'(0)}{1!} + o(i^2) \\
(1+i)^t &= 1 + it + o(i^2)
\end{aligned}
$$

Arbitraža u finansijama

Arbitraža u praksi

Mogućnost zarade iskorištavanjem različitih cijena iste robe na različitim tržistima (kupovinom po nižoj, a prodajom po višoj cijeni).

Arbitraža u teoriji matematike finansija

Mogućnost zarade bez rizika.

- Važan koncept.
- Više verzija i preciznih definicija.
- Često se pretpostavlja da arbitraža ne postoji.
- Biše o arbitraži u drugom dijelu kursa.

Primjer: Arbitraža sa prostim kamaćenjem?

Investitor koji ima C novca ima priliku da ulaže i podiže novac po kamatnoj stopi i koja se obračunava prostim interesnim računom.

Ulaganje na godinu dana

Stanje na računu nakon godinu dana: $C(1+i)$

Uzastopna ulaganja na pola godine

$C \longrightarrow C(1+\frac{i}{2}) \longrightarrow \Big(C(1+\frac{i}{2})\Big)(1+\frac{i}{2})$

Stanje na računu nakon godinu dana:

$C(1+\frac{i}{2})^2 = C(1+i+\frac{i^2}{4}) > C(1+i)$.

Primjer: Arbitraža sa prostim kamaćenjem?

Nastavak

Uzastopna mjesečna ulaganja

$C \longrightarrow C(1+\frac{i}{12}) \longrightarrow \Big(C(1+\frac{i}{12})\Big)(1+\frac{i}{12}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Big(C(1+\frac{i}{12})^{11}\Big)(1+\frac{i}{12})$

Stanje na računu nakon godinu dana:
$C(1+\frac{i}{12})^{12} > C(1+\frac{i}{2})^2 > C(1+i)$.

Uzastopnih n ulaganja na svakih $\frac{1}{n}$ godine

Stanje na računu nakon godinu dana: $C(1+\frac{i}{n})^n$
Kad $n \to \infty$ stanje na računu:

$$Ce^i > C(1+\frac{i}{n})^n.$$

Prost interesni račun vodi arbitraži?

O pretpostavkama

- Konstantna kamata?
- Kamata koja ne zavisi od glavnice C?
- Nema neizvjesnosti: sve je determinističko?

Promjenljiva kamatna stopa

- Kamatna stopa (godišnja) koja zavisi od trenutka t
- Sa $i(t)$ je (efektivna) kamatna stopa za period od t do $t+1$
- Pretpostavljamo da $i(t)$ ne zavisi od veličine kapitala
- Kapital C se u periodu od t do $t+1$ akumulira na $C(1+i(t))$
- Kapital C se u periodu od t do $t+n$ akumulira na:

$$C(1+i(t))(1+i(t+1))(1+i(t+2))\dots(1+i(t+n-1))$$

- Libor, euribor

Nominalna kamatna stopa

Definicija

Ako je efektivna kamatna stopa za period od t do $t+h$, $h>0$, jednaka $hi_h(t)$ onda $i_h(t)$ nazivamo *nominalnom (godišnjom) kamatnom stopom*.

- Kapital C uložen u trenutku t po nominalnoj kapatnoj stopi $i_h(t)$ nakon perioda dužine h se akumulira na $C(1+hi_h(t))$
- Ako je $h=1$ onda se nominalna i efektiva godišnja kamatna stopa poklapaju: $i_1(t)=i(t)$
- Ako nominalna kamatna stopa ne zavisi od trenutka pišemo $i_h(t)=i_h$
- Ako je $h=\frac{1}{p}$ koristimo oznaku $i_{\frac{1}{p}}(t)=i^{(p)}(t)$
- Primjer?

Akumulacioni faktori

Neka je $t_1 \leq t_2$

$A(t_1, t_2)$

Ako je u trenutku t_1 ulozena vrijednost 1 $A(t_1, t_2)$ je akumuliarana vrijednost u trenutku t_2.

- C u trenutku $t_1 \longrightarrow CA(t_1, t_2)$ u trenutku t_2
- Definišemo $A(t, t) = 1$ za svako $t \in \mathbb{R}$
- Po definiciji i_h, A: $A(t, t+h) = 1 + hi_h(t)$

$$i_h(t) = \frac{A(t, t+h) - 1}{h}$$

Princip konzistencije
Consistency principle

Princip konzistencije

Za proizvoljna tri trenutka $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ važi:

$$A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1)A(t_1, t_2)$$

- No arbitrage?
- Teorijski važan princip
- Ne važi (u potpunosti) u praksi

Primjer

Ako je $A(t_1, t_2) = e^{\delta(t_1 - t_2)}$, $\delta \in \mathbb{R}$, zadovoljen je princip konzistencije.

Intenzitet kamate

Force of interest

Definicija

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0+} i_h(t)$$

”Trenutna nominalna kamatna stopa”

Na osnovu veze između i_h i A imamo:

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0+} \frac{A(t, t+h) - A(t,t)}{h} = \left(A(t_1, t_2)\right)'_2 \Big|_{(t_1,t_2)=(t,t)}$$

Reprezentacija akumulacionog faktora

Teorema

Ako su $\delta(t)$ i $A(t_0, t)$ neprekidne funkcije po t i važi princip kozistencije onda je:

$$A(t_1, t_2) = \exp\left(\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt\right)$$

Dokaz na tabli.

Posljedica

Ako je poznat intenzitet kamate $\delta(t)$ onda je:

$$i_h(t) = \frac{\exp\left(\int_t^{t+h} \delta(t)\, dt\right) - 1}{h}$$

- A i i_h se mogu definisati preko δ!
- Relaksiranje uslova: neprekidnost $\rightarrow$ neprekidnost dio po dio.

Konstantan intenzitet kamate

Neka je $\delta(t) = \delta$ konstantno.

- $A(t_1, t_2) = e^{\delta(t_2 - t_1)}$ (kao u primjeru!)
- Za proizvoljno t, n je $A(t, t+n) = e^{\delta n}$.
- Kamatna stopa je konstantna: $i = i_1 = e^{\delta} - 1$ (zbog posljedice s prethodnog slajda)
- Obračun kamate u *proizvoljnom trenutku* $n \in \mathbb{R}^+$:

$$A(t_0, t_0 + n) = (1 + i)^n$$

Primjer

$\delta(t) = a + bt$ i $\delta(t) = a \cdot b^t$
Sami.

Intenzitet kamate kao logaritamski izvod

Fiksiramo trenutak t_0

- Definišemo $F(t) = A(t_0, t)$
- Na osnovu teoreme o reprezentaciji akumulacionog faktora:

$$\ln F(t) = \int_{t_0}^{t} \delta(s)\, ds$$

- Nakon "diferenciranja jednakosti":

$$\delta(t) = \frac{F'(t)}{F(t)}$$

Sadašnje vrijednosti

Uvod

- $t_1 \leq t_2$
- $C_2 = C_1 A(t_1, t_2)$
- $C_1 = C_2 / A(t_1, t_2) = C_2 \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt\right)$

Definicija

Diskontovana vrijednost u trenutku t_1 kapitala C sa rokom dospijeća t_2 je:

$$C \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt\right)$$

Ako je $t_1 = 0$ diskontovanu vrijednost nazivamo *sadašnja vrijednost*.

$$C \exp\left(-\int_{0}^{t} \delta(s)\, ds\right)$$

Funkcija sadašnje vrijednosti

Definišemo:

$$v(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta(s)\, ds\right)$$

- Ako je $t \geq 0$ onda je $v(t)$ sadašnja vrijednost kapitala vrijednosti 1 sa rokom dospijeća t
- Ako je $t < 0$ onda je $v(t)$ akumulacija kapitala vrijednost 1 od trenutka t do trenutka 0.
- Sadašnja vrijednost kaptala C sa rokom dospijeća $t > 0$ je $Cv(t)$
- Ako je $\delta(t) = \delta$ konstantno onda je $v(t)v^t$ gdje je $v = v(1) = e^{-\delta}$

Sadašnja vrijednost diskretnog novčanog toka

Sadašnja vrijednost kapitala C sa rokom dospijeća t je: $Cv(t)$

Diskretni novčani tok

- Rokovi dospijeća t_1, t_2, ..., t_n
- c_{t_j} – kapital sa rokom dospijeća t_j, $j = 1, ..., n$
- Sada'v snja vrijednost novčanog toka:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{t_j} v(t_j)$$

Neprekidni novčani tok

- $T > 0$ fiksirani trenutak u budućnosti
- Od 0 do T novac se uplaćuje neprikidno
- $M(t)$ – ukupna uplata do trenutka t

Intenzitet uplate $\rho(t)$

$$\rho(t) := M'(t), \qquad M(t) = \int_0^t \rho(s)\, ds.$$

Ako je $0 \leq \alpha < \beta \leq T$ onda je

$$M(\beta) - M(\alpha) = \int_\alpha^\beta \rho(t)\, dt$$

ukupna uplata od trenutka α do trenutka β.

Sadašnja vrijednost neprekidnog novčanog toka

Ukupna uplata od trenutka t do trenutka $t + \Delta t$:

$$M(t + \Delta t) - M(t) = \int_t^{t+\Delta t} \rho(s)\, ds \approx \rho(t)\Delta t$$

Sadašnja vrijednost kapitala $M(t + \Delta t) - M(t)$ je (približno):

$$v(t)\rho(t)\Delta t$$

Sadašnja vrijednost neprekidnog novčanog toka:

$$\int_0^T v(t)\rho(t)\, dt$$

Sadašnja vrijednost novčanog toka

Neto sadašnja vrijednost

$$\sum_{c_t \neq 0} c_t v(t) + \int_0^T v(t)\rho(t)\,dt$$

- Ako je $c_t < 0$ – trošak, rashod.
- Interpretacija?
- Razmatra se i $T = \infty$! Konvergencija?

Diskontovana i sadašnja vrijednost

Neka je $t_1 \leq t_2$.

Diskontovana vrijednost

Diskontovana vrijednost u trenutku t_1 kapitala C sa rokom dospijeća t_2:

$$C \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\,dt\right)$$

Diskontovana vrijednost koristeći sadašnju vrijednost

$$\begin{aligned} C \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\,dt\right) &= C \exp\left(-\int_0^{t_2} \delta(t)\,dt + \int_0^{t_1} \delta(t)\,dt\right) \\ &= C \frac{\exp\left(-\int_0^{t_2} \delta(t)\,dt\right)}{\exp\left(-\int_0^{t_1} \delta(t)\,dt\right)} = C \frac{v(t_2)}{v(t_1)} \end{aligned}$$

Akumulacija i funkcija sadašnje vrijednosti

Neka je $t_1 > t_2$.

Akumulacija

Akumulirana vrijednost u trenutku t_1 kapitala C uloženog u trenutku t_2:

$$C \exp\left(\int_{t_2}^{t_1} \delta(t)\, dt\right) = C \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt\right)$$

Akumulacija koristeći sadašnju vrijednost

$$C \frac{v(t_2)}{v(t_1)}$$

Isto kao u prethodnom slučaju!

Vrednovanje kapitala

Za *proizvoljne* trenutke t_1 i t_2

Ako vrijednost kapitala u trenutku t_1 iznosi C, onda je vrijednost tog kapitala u trenutku t_2:

$$C\frac{v(t_2)}{v(t_1)}$$

Vrednovanje novčanih tokova u proizvoljnom trenutku

- t_0 – proizvoljni trenutak
- c_t – diskretni novčani tok
- $\rho(t)$ – intenzitet plaćanja

Vrijednost novčanog toka u trenutku t_0

$$\sum_{c_t \neq 0} c_t \frac{v(t)}{v(t_0)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(t)}{v(t_0)} \rho(t)\, dt$$

Sadasnja Vrijednost novčanog toka u trenutku $(t_0 = 0)$

$v(0) = e^0 = 1$

$$\sum_{c_t \neq 0} c_t v(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\rho(t)\, dt$$

Interpretacija?

Vrednovanje novčanih tokova

Za *proizvoljne* trenutke t_1 i t_2

$$[\text{V.N.T. u trenutku } t_1] \cdot v(t_1) = [\text{V.N.T. u trenutku } t_2] \cdot v(t_2)$$

V.N.T. – vrijednost novčanog toka

EXAMPLE 2.7.2

The force of interest at any time t, measured in years, is given by

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.04 + 0.005t & \text{for } 0 \le t < 6 \\ 0.16 - 0.015t & \text{for } 6 \le t < 8 \\ 0.04 & \text{for } t \ge 8 \end{cases}$$

(a) Calculate the value at time 0 of £100 due at time $t = 8$.
(b) Calculate the accumulated value at time $t = 10$ of a payment stream of rate $\rho(t) = 16 - 1.5t$ paid continuously between times $t = 6$ and $t = 8$.

Solution

(a) We need the present value of £100 at time 8, i.e., $100/A(0,8)$ with the accumulation factor

$$\begin{aligned} A(0,8) &= A(0,6) \times A(6,8) \\ &= \exp\left(\int_0^6 0.04 + 0.005t\, dt\right) \\ &\quad \times \exp\left(\int_6^8 0.16 - 0.015t\, dt\right) \\ &= \exp(0.44) \end{aligned}$$

leading to the present value of $£100/e^{0.44} = £64.40$

(b) The accumulated value is given by the accumulation of each payment element $\rho(t)\mathrm{d}t$ from time t to 10

$$\int_6^8 A(t,10).\rho(t)\mathrm{d}t$$

Using the principle of consistency, we can express the accumulation factor as easily found quantities, $A(0,10)$ and $A(0,t)$ as

$$A(t,10) = \frac{A(0,10)}{A(0,t)} = e^{0.88-0.16t+0.0075t^2}$$

for $6 \le t \le 8$. The required present value is then obtained via integration by parts as £12.60.

Prihod od kamata

Interest income

- C – uloženi kapital
- $i(t)$ kamata za period od t do $t+1$

Cilj: prihod od kamata na kapital (a ne akumulacija kapitala)

Jednostavni slučaj: isplata $Ci(t)$ na kraju svake godine

Slučaj sa n plaćanja

- Period od t_0 do $t > t_0$
- n plaćanja
- Razmak između isplata $h = \frac{t - t_0}{n}$
- Isplate u trenucima $t_0 + h$, $t_0 + 2h$, ..., $t_0 + nh$
- Po definiciji $i_h(t)$ isplata u trenutku $t + jh$, $j = 1 \ldots n$:

$$Chi_h(t_0 + jh)$$

Ukupan prihod

$$\sum_{j=0}^{n-1} Chi_h(t_0 + jh)$$

Neprekidni slučaj

Interest income

Broj plaćanja između t i t_0 teži beskonačnosti: $n \to \infty$

$$\sum_{j=0}^{n-1} Chi_h(t_0 + jh) \quad \to C \int_{t_0}^{t} \delta(t)\, dt$$

Zašto?

Ukupan prihod od kamate (Total interest received)

$$I(t) := C \int_{t_0}^{t} \delta(t)\, dt$$

Intenzitet prihoda od kamate (Rate of payment of interest income)

$$I'(t) = C\delta(t)$$

Prihod od kamate kao neprekidni novčani tok

Posmatramo interval $[0, T]$

Neprekidni novčani tok

Intenzitet plaćanja ρ,

$$M(t) = \int_0^T \rho(t)\, dt.$$

Neprekidni prihod od kamate

Intenzitet prihoda od kamate $C\delta$

$$I(t) = \int_0^T C\delta(t)\, dt = C \int_0^T \delta(t)\, dt$$

Sadašnja vrijednost prihoda od kamate

Sadašnja vrijednost neprekidnog novčanog toka

Intenzitet plaćanja ρ,

$$\int_0^T v(t)\rho(t)\,dt.$$

Sadašnja vrijednost neprekidnog prihoda od kamate

Intenzitet prihoda od kamate $C\delta$

$$\int_0^T Cv(t)\delta(t)\,dt = C\int_0^T v(t)\delta(t)\,dt$$

Tehnički komentar

Primijetimo:

$$\int_0^T v(t)\delta(t)\,dt = 1 - v(T)$$

Zašto?

Tehnički komentar

Primijetimo:

$$\int_0^T v(t)\delta(t)\,dt = 1 - v(T)$$

Zašto?

- Smjena $u = \int_0^t \delta(s)\,ds$
- $du = \delta(t)dt!$
- Po definiciji $v = e^{-u}$

Prihod od kamata i dekompozicija kapitala

Dekompozicija

$$C = C\int_0^T v(t)\delta(t)\,dt + Cv(T)$$

Interpretacija?

Slučaj $T = +\infty$

$$C = C\int_0^{+\infty} v(t)\delta(t)\,dt$$

Interpretacija?

Konstantni intenzitet kamate

PRETPOSTAVKA: $\delta(t) = \delta = const.$

- Početak poglavlja 3
- Pretpostavka važi do kraja poglavlja 4

Veličine v i δ

Sadašnja vrijednost:

- $v(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta(s)\,ds\right) = e^{-\delta t}$
- $v := v(0) = e^{-\delta t}$ – diskontni faktor
- $v(t) = v^t$

Sadašnja vrijednost zavisi samo od dužine perioda

Vrijednost u trenutku s kapitala C sa rokom dospijeća $s + t$ je:

$$C\frac{v(s+t)}{v(s)} = Cv^t$$

Akumulacija kapitala

$$F(t) = \exp\left(\int_0^t \delta(s)\, ds\right) = e^{\delta t}$$

- $i = e^{\delta} - 1$ (konstantna) efektivna kamatna stopa
- $1 + i = e^{\delta}$
- $F(t) = (1 + i)^t$

Diskontna stopa

Konstantna diskontna stopa

$$d = 1 - v = 1 - e^{-\delta t}$$

Interpretacija:

Kapital $1 - d$ uložen po kamatnoj stopi i se nakon godinu dana akumulira na 1:

$$(1-d)(1+i) = \left(1 - \frac{1}{1+i}\right)(1+i) = 1$$

Dakle, $1 - d = v$ je sadašnja vrijednost kapitala vrijednosti 1.

Diskontna stopa

Jednakost $d = iv$

- $d = 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = iv$
- Interpretacija?

Diskontna stopa

Jednakost $d = iv$

- $d = 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = iv$
- Interpretacija?

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow 1 + i \\ 1 - d &\longrightarrow 1 \end{aligned}$$

Sadašnja vrijednost kamate i je d

Diskontna stopa i neprekidno kamaćenje

Jednakost $d = \delta F(1)$

$$\int_0^1 e^{-\delta t}\, dt = \frac{1 - e^{-\delta}}{\delta} = \frac{d}{\delta}$$

Interpretacija?

Diskontna stopa i neprekidno kamaćenje

Jednakost $d = \delta F(1)$

$$\int_0^1 e^{-\delta t}\,dt = \frac{1 - e^{-\delta}}{\delta} = \frac{d}{\delta}$$

Interpretacija?

$d = \delta F(1) = iv!$

Veličine δ , i, v i d

Value Of	$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{d}$
In Terms Of				
δ		$e^{\delta} - 1$	$e^{-\delta}$	$1 - e^{-\delta}$
i	$\ln\ (1+i)$		$(1+i)^{-1}$	$i\,(1+i)^{-1}$
v	$-\ln\ v$	$v^{-1} - 1$		$1 - v$
d	$-\ln\ (1-d)$	$(1-d)^{-1} - 1$	$1 - d$	

Anuiteti krajem roka

Immediate annuity-certain

Dekurzivni anuiteti (anuiteti krajem roka)

- Niz od n (godišnjih) uplata, vrijednost svake uplate je 1
- Uplate se vrše krajem perioda: k-ta uplata u trenutku $t+k$

Sadašnja vrijednost (u trenutku t)

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k = \frac{v(1-v^n)}{1-v} = \frac{1-v^n}{v^{-1}-1} = \frac{1-v^n}{i}$$

Ukupna vrijednost (u trenutku $t+n$)

$$s_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k} = (1+i)^n a_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Anuiteti početkom roka

Annuity-due

Anticipativni anuiteti (anuiteti početkom roka)

- Niz od n (godišnjih) uplata, vrijednost svake uplate je 1
- Uplate početkom perioda: k-ta uplata u trenutku $t + k - 1$

Sadašnja vrijednost (u trenutku t)

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^{k-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d}$$

Ukupna vrijednost (u trenutku $t + n$)

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (1 + i)^{n-k} = (1 + i)^n \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{(1 + i)^n - 1}{d}$$

Veza između $a_{\overline{n}|}$ i $\ddot{a}_{\overline{n}|}$

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{n}|} &= (1+i)a_{\overline{n}|} \\
\ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1 + a_{\overline{n-1}|} \\
1 &= i\,a_{\overline{n}|} + v^n = d\,\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n
\end{aligned}
$$

Veza između $s_{\overline{n}|}$ i $\ddot{s}_{\overline{n}|}$

$$
\begin{aligned}
\ddot{s}_{\overline{n}|} &= (1+i)s_{\overline{n}|} \\
\ddot{s}_{\overline{n}|} &= s_{\overline{n+1}|} - 1 \\
(1+i)^n &= i\,s_{\overline{n}|} + 1 = d\,\ddot{s}_{\overline{n}|} + 1
\end{aligned}
$$

Anuiteti

Neke jednakosti

Veza između $a_{\overline{n}|}$ i $s_{\overline{n}|}$

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^n a_{\overline{n}|}$$

Veza između $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ i $\ddot{s}_{\overline{n}|}$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

Perpetuiteti

Dekurzivni perpetuitet (immediate perpetuity)

- Godišnje uplate vrijednosti 1, k-ta uplata u trenutku $t+k$
- Sadašnja vrijednost:

$$a_{\overline{\infty}|} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|} = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}$$

Anticipativni perpetuitet (perpetuity due)

- Godišnje uplate vrijednosti 1, k-ta uplata u trenutku $t+k-1$
- Sadašnja vrijednost:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}$$

Odloženi anuiteti

- $t = 0$, prvih $m \in \mathbb{N}$ godina nema uplata
- Niz od n (godišnjih) uplata, vrijednost svake uplate je 1

Odloženi dekurzivni anuiteti (krajem roka)

- Uplate se vrše krajem perioda: k-ta uplata u trenutku $m + k$
- Sadašnja vrijednost (u trenutku $t = 0$):

$$_{m|}a_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^{m+k} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{n}|} = v^m a_{\overline{n}|}$$

Odloženi anticipativni anuiteti (početkom roka)

- Uplate početkom perioda: k-ta uplata u trenutku $m + k - 1$
- Sadašnja vrijednost (u trenutku $t = 0$):

$$_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^{m+k-1} = \ddot{a}_{\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

Neprekidni anuiteti

- Konstantno neprekidno plaćanje u vrijednosti 1 godišnje
- Konstantan intenzitet plaćanja: $\rho(t) \equiv 1$ [Vidi 3. nedjelju]
- $n \in \mathbb{R}^+$ – trajanje plaćanja

Neprekidni anuitet

Sadašnja vrijednost u trenutku $t = 0$:

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\, dt = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} = \frac{1 - v^n}{\delta}, \quad (\delta \neq 0)$$

Veza sa diskretnim anuitetima

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} \frac{1 - v^n}{i} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|}$$

Odloženi neprekidni anuitet

- Konstantno neprekidno plaćanje u vrijednosti 1 godišnje
- Konstantan intenzitet plaćanja: $\rho(t) \equiv 1$
- $n \in \mathbb{R}^+$ – trajanje plaćanja
- Plaćanje počinje u trenutku $m \in \mathbb{R}^+$;

Odloženi neprekidni anuitet

Sadašnja vrijednost u trenutku $t = 0$:

$$_{m|}\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_m^{m+n} e^{-\delta t}\, dt = \bar{a}_{\overline{m+n}|} - \bar{a}_{\overline{n}|} = v^m \bar{a}_{\overline{n}|}$$

Varijabilni anuiteti

- Niz od n uplata
- k-ta uplata u trenutku t_k
- X_k – Vrijednost k-te uplate
- Sadašnja vrijednost: $\sum_{k=1}^{n} v^{t_k} X_k$

Specijalni slučajevi

- Rastući anuitet: $X_k = t_k = k$
- Opadajući anuitet: $t_k = k$, $X_k = n - k$
- X_k formira geometrijsku progresiju

- Niz od n uplata vrijednosti: 1, 2, ..., n
- k-ta uplata u trenutku k
- k – Vrijednost k-te uplate
- Sadašnja vrijednost: $(Ia)_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} kv^k = \dfrac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i}$

Sadašnja vrijednost - izvodjenje:

$$i(Ia)_{\overline{n}|} = (Ia)_{\overline{n}|} - \frac{1}{v}(Ia)_{\overline{n}|} = -nv^n + \sum_{k=1}^{n} v^{k-1} = \ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n$$

Interpretacija jednakosti: $\ddot{a}_{\overline{n}|} = i(Ia)_{\overline{n}|} + nv^n$?

- Niz od n uplata vrijednosti: 1, 2, ..., n
- k-ta uplata u trenutku $k-1$
- k – Vrijednost k-te uplate
- Sadašnja vrijednost:

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} k v^{k-1} = (1+i)(Ia)_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|} + (Ia)_{\overline{n-1}|}$$

Ima li smisla definisati $(Ia)_{\overline{\infty}|}$ $(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|}$?

Rastući anuiteti

Anticipativni rastući anuiteti

- Niz od n uplata vrijednosti: 1, 2, ..., n
- k-ta uplata u trenutku $k-1$
- k – Vrijednost k-te uplate
- Sadašnja vrijednost:

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} kv^{k-1} = (1+i)(Ia)_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|} + (Ia)_{\overline{n-1}|}$$

Ima li smisla definisati $(Ia)_{\overline{\infty}|}$ $(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|}$?

$$(Ia)_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2}; \qquad (I\ddot{a})_{\overline{\infty}|} = (1+i)(Ia)_{\overline{\infty}|}$$

Konstantan intenzitet plaćanja u toku godine

Intenzitet plaćanja je r u periodu od $r-1$ do r; sadašnja vrijednost:

$$(I\bar{a})_{\overline{n}|} = \sum_{r=1}^{n} \int_{r-1}^{r} r v^t \, dt = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - n v^n}{\delta} \tag{1}$$

Rastući intenzitet plaćanja

Intenzitet plaćanja je t u trenutku t; sadašnja vrijednost:

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = \int_{0}^{n} t v^t \, dt = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|} - n v^n}{\delta} \tag{2}$$

Rastući anuiteti

Prirodno se definišu ukupna vrijednost rastućih anuiteta i odloženi rastući anuiteti:

- $(Is)_{\overline{n}|} = (1+i)^n (Ia)_{\overline{n}|}$
- $(I\ddot{s})_{\overline{n}|} = (1+i)^n (I\ddot{a})_{\overline{n}|}$
- $(I\bar{s})_{\overline{n}|} = (1+i)^n (I\bar{a})_{\overline{n}|}$
- $(\bar{I}\bar{s})_{\overline{n}|} = (1+i)^n (\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}$

- ${}_{m|}(Ia)_{\overline{n}|} = v^m (Ia)_{\overline{n}|}$
- ${}_{m|}(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = v^m (I\ddot{a})_{\overline{n}|}$
- ${}_{m|}(I\bar{a})_{\overline{n}|} = v^m (I\bar{a})_{\overline{n}|}$
- ${}_{m|}(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = v^m (\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}$

Rastući anuiteti

Svaki anuitet čija plaćanja formiraju aritmetički niz se može predstaviti preko standardnih rastućih anuiteta!

Opadajući anuiteti

Dekurzivni opadajući anuiteti

- Niz od n uplata vrijednosti: n, $n-1$, ..., 1
- k-ta uplata u trenutku k
- $n-k$ – Vrijednost k-te uplate
- Sadašnja vrijednost: $(Da)_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n}(n-k)v^k = \dfrac{n - a_{\overline{n}|}}{i}$

Sadašnja vrijednost - izvodjenje:

$$(Ia)_{\overline{n}|} + (Da)_{\overline{n}|} = (n+1)a_{\overline{n}|}$$

Zašto?

Definicije i oznake analogne rastućim anuitetima

- Anticipativni opadajući anuiteti
- Neprekidni opadajući anuiteti
- Ukupna vrijednost opadajućih anuiteta
- Odloženi opadajući anuiteti

Kamata koja se obračunava p puta godišnje

Nominalna i efektivna kamatna stopa

i i $i^{(p)}$ – (konstantna) efektivna i nominalna kamatna stopa

$$1+i = \left(1+\frac{i^{(p)}}{p}\right)^p$$

$$(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 = \frac{i^{(p)}}{p}$$

$$i = \frac{i^{(p)}}{p} \cdot \frac{(1+i)-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}$$

$$i = \sum_{t=1}^{p} \frac{i^{(p)}}{p}(1+i)^{\frac{p-t}{p}}$$

Interpretacija posljednje jednakosti?

	0	1/p	2/p	3/p	...	(p-1)/p	1
(1)	d						
(2)	$d^{(p)}/p$	$d^{(p)}/p$	$d^{(p)}/p$	$d^{(p)}/p$	...	$d^{(p)}/p$	
(3)		$i^{(p)}/p$	$i^{(p)}/p$	$i^{(p)}/p$	...	$i^{(p)}/p$	$i^{(p)}/p$
(4)							i
(5)	$\longleftarrow$				δ		$\longrightarrow$

FIGURE 4.1.1
Equivalent payments

Kamata koja se obračunava p puta godišnje

Nominalna i efektivna diskontna stopa

d i $d^{(p)}$ – (konstantna) efektivna i nominalna diskontna stopa

$$1 - d = \left(1 - \frac{d^{(p)}}{p}\right)^{p}$$

$$1 - (1 - d)^{\frac{1}{p}} = \frac{d^{(p)}}{p}$$

$$d = \frac{d^{(p)}}{p} \cdot \frac{1 - (1 - d)}{(1 - d)^{\frac{1}{p}} - 1}$$

$$d = \sum_{t=1}^{p} \frac{d^{(p)}}{p} (1 - d)^{\frac{t-1}{p}}$$

Kamata koja se obračunava p puta godišnje

Efektivna kamatna i diskontna stopa i δ

$$i^{(p)} = p(e^{\frac{\delta}{p}} - 1) \qquad d^{(p)} = p(1 - e^{-\frac{\delta}{p}})$$

Monotonost efektivne kamatne i diskontne stope

$$\lim_{p\to\infty} i^{(p)} = \lim_{p\to\infty} d^{(p)} = \delta$$

$$i > i^{(2)} > i^{(3)} > \ldots > \delta$$

$$d < d^{(2)} < d^{(3)} < \ldots < \delta$$

Zašto?

Anuiteti sa p godišnjih plaćanja

Dekurzivni anuiteti (anuiteti krajem roka)

- Niz od $n \cdot p$ uplata: n godina, p uplata godišnje,
- Vrijednost svake uplate je 1/p
- Uplate se vrše u trenucima 1/p, 2/p, 3/p...

Sadašnja vrijednost

$$a_{\overline{n|}}^{(p)} = \sum_{t=1}^{np} \frac{1}{p} v^{t/p} = \ldots = \frac{1 - v^n}{i^{(p)}} = \frac{i}{i^{(p)}} a_{\overline{n|}}$$

Anuiteti sa p godišnjih plaćanja

Alternativna interpretacija

- p godišnjih jednakih uplata u trenucima 1/p, ..., 1
- Kamata na uplate vrijednosti $\frac{i^{(p)}}{p}$ je i
- Kamata na uplate vrijednosti $\frac{1}{p}$ je onda $\frac{i}{i^{(p)}}$
- Sadašnja vrijednost p uplata vrijednosti $\frac{1}{p}$:
  - Tekuće (nulte) godine je $v\frac{i}{i^{(p)}}$
  - Ako su uplate k-te godine: $\frac{1}{p}$ je $v^k\frac{i}{i^{(p)}}$
- Sadašnja vrijednost k jednakih uplata vrijednosti $\frac{i}{i^{(p)}}$ je $\frac{i}{i^{(p)}}a_{\overline{n|}}$!

Zaključak

Sadašnja vrijednost po p uplata vrijednosti $\frac{1}{p}$ kroz n godina je onda isto:

$$\frac{i}{i^{(p)}}a_{\overline{n|}}$$

Anuiteti sa p godišnjih plaćanja

Računski detalji o prethodnoj interpretaciji

$$i = \sum_{t=1}^{p} \frac{i^{(p)}}{p}(1+i)^{\frac{p-t}{p}}$$

$$\frac{i}{i^{(p)}} = \sum_{t=1}^{p} \frac{1}{p}(1+i)^{\frac{p-t}{p}}$$

$$v\frac{i}{i^{(p)}} = \sum_{t=1}^{p} \frac{1}{p}v^{\frac{t}{p}}$$

$$v^{k+1}\frac{i}{i^{(p)}} = \sum_{t=1}^{p} \frac{1}{p}v^{\frac{kp+t}{p}}$$

$$\frac{i}{i^{(p)}}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{t=1}^{p} \frac{1}{p}v^{\frac{kp+t}{p}} = \sum_{t=1}^{np} \frac{1}{p}v^{t/p}$$

Definicije i oznake analogne (godišnjim) anuitetima

- Anticipativni anuiteti sa p godišnjih plaćanja
- Odloženi anuiteti sa p godišnjih plaćanja
- Neograničeni anuiteti ($n = \infty$)
- Oznake za sadašnje vrijednosti i ukupne vrijednosti:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}, \quad {}_{m|}a^{(p)}_{\overline{n}|}, \quad {}_{m|}\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}, \quad a^{(p)}_{\overline{\infty}|}, \quad \ddot{a}^{(p)}_{\overline{\infty}|}, \quad s^{(p)}_{\overline{n}|}, \quad \ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|}$$

Anuiteti sa p godišnjih plaćanja

Neke jednakosti

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{d^{(p)}}\, a_{\overline{n}|}$$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = v^{1/p}\, \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$$

$$s^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(p)}}\, s_{\overline{n}|}$$

$$\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{d^{(p)}}\, \ddot{s}_{\overline{n}|}$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \lim_{p\to\infty} a^{(p)}_{\overline{n}|} = \lim_{p\to\infty} \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$$

$$i\, a_{\overline{n}|} = i^{(p)}\, a^{(p)}_{\overline{n}|} = d^{(p)}\, \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = d\, \ddot{a}_{\overline{n}|} = \delta\, \bar{a}_{\overline{n}|}$$

$$a^{(p)}_{\overline{\infty}|} = 1/i^{(p)}, \qquad \ddot{a}^{(p)}_{\overline{\infty}|} = 1/d^{(p)}$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{\infty}|} = a^{(p)}_{\overline{\infty}|} + 1/p$$

- L – ukupan dug, glavnica; vraća se godišnjim otplatama
- n – broj (godišnjih) otplata
- x_t – t-ta godišnja otplata, $t = 1, \ldots, n$
- i_t – kamatna stopa za t-tu godinu

Ukupan dug je suma sadašnjih vrijednosti svih otplata

$$L = \sum_{t=1}^{n} x_t \prod_{s=1}^{t} (1 + i_s)^{-1}$$

Otplata duga

- F_t – preostali dug u trenutku t
- $F_0 = L$ – preostali dug na početku (ukupan dug)
- $F_1 = (1 + i_1)F_0 - x_1$ – preostali dug nakon prve otplate
- $F_t = (1 + i_t)F_{t-1} - x_t$ – preostali dug nakon t-te otplate
- $F_n = 0$

Otplata duga

Retrospektivni pristup

$$
\begin{aligned}
F_t = &(1+i_1)(1+i_2)\dots(1+i_t)L \\
&-(1+i_2)(1+i_3)\dots(1+i_t)x_1 \\
&-(1+i_3)\dots(1+i_t)x_2 \\
&-(1+i_t)x_{t-1} \\
&-x_t
\end{aligned}
$$

Preostali dug je razlika akumulacije ukupnog duga i svih dosadašnjih otplata.

Otplata duga

Prospektivni pristup

$$
\begin{aligned}
F_t = &(1+i_{t+1})^{-1}x_{t+1} \\
&+ (1+i_{t+1})^{-1}(1+i_{t+2})^{-1}x_{t+2} \\
&+ ... \\
&+ (1+i_{t+1})^{-1}(1+i_{t+2})^{-1}\dots(1+i_n)^{-1}x_n
\end{aligned}
$$

Preostali dug je zbir sadašnjih vrijednosti svih preostali otplata.

Otplata duga

Preostali dug i kamata

$$F_t = (1 + i_t)F_{t-1} - x_t = F_{t-1} - (x_t - i_t F_{t-1})$$

- f_t – količina duga otplaćenog u trenutku t (rata?)
- $f_t := F_{t-1} - F_t$
- $i_t = i = const.$: $f_{t+1} = (1 + i)f_t + x_{t+1} - x_t$

Terminologija: rata, anuitet, otplata?

Otplata duga jednakim anuitetima

- $i_t = i = const.$
- $x_t = x = const.$
- $L = x \cdot a_{\overline{n}|}$
- Otplate u trenucima 1, 2, ..., n
- $F_t = a_{\overline{n-t}|}$
- $f_t = v^{n-t+1}$

Payment	Interest Content of Payment	Capital Repaid	Loan Outstanding after Payment
1	$ia_{\overline{n}\|} = 1 - v^n$	v^n	$a_{\overline{n}\|} - v^n = a_{\overline{n-1}\|}$
2	$ia_{\overline{n-1}\|} = 1 - v^{n-1}$	v^{n-1}	$a_{\overline{n-1}\|} - v^{n-1} = a_{\overline{n-2}\|}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	$ia_{\overline{n-t+1}\|} = 1 - v^{n-t+1}$	v^{n-1+1}	$a_{\overline{n-t+1}\|} - v^{n-t+1} = a_{\overline{n-t}\|}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$ia_{\overline{2}\|} = 1 - v^2$	v^2	$a_{\overline{2}\|} - v^2 = a_{\overline{1}\|}$
n	$ia_{\overline{1}\|} = 1 - v$	v	$a_{\overline{1}\|} - v = 0$

Otplate p puta godišnje

Analogno...

NPV

- $i_t = i = const.$
- $NPV(i) = \sum c_t v^t + \int_0^T \rho(t) v^t \, dt$
- $NPV(i) = 0$ – jednačina vrijednosti

Dva projekta A i B

- $NPV_A(i) = 0 : \quad i_A$
- $NPV_B(i) = 0 : \quad i_B$
- $i_A > i_B$? $NPV_A(i_0) > NPV_b(i_0)$?