Finansijska matematika 1

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2020-21

Drugi dio

Model

- t - vrijeme
  - Model sa jednim periodom: $t = 0$ ili $t = 1$
  - $t = 0$ – "danas"
  - $t = 1$ – "sjutra"

- Ω – konačni prostor elementarnih ishoda
  - $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$, $K < \infty$
  - ω_k – elementarni ishod, "stanje svijeta"
  - Interpretacija:
    "Stanje svijeta" je nepoznato u trenutku $t = 0$, a poznato u trenutku $t = 1$

- P – vjerovatnosna mjera

- $P(\omega_k) > 0$, $k = 1, \dots, K$

Model

B – bankovni proces (bank account proces)

- $B = \{B_t \, : \, t = 0, 1\}$
- $B_0 \equiv 1$ – pretpostavka
- B_1 – u opštem slučaju slučajna veličina
- B_1 – je konstantno u jednostavnim modelima
- Bankovni proces definiše kamatnu stopu
- $r = B_1 - B_0$
- Pretpostavka: $r \geq 0$

Model

S – cjenovni process (price process)

- $S_1, S_2, \ldots S_N$ – cijene akcija N različitih kompanija, $N < \infty$
  - Najčešće se uzima $N < K$

- $S_n(0)$ – cijena n-te akcije $(n = 1, \ldots, N)$ u trenutku $t = 0$: poznata konstanta

- $S_n(1)$ – cijena n-te akcije $(n = 1, \ldots, N)$ u trenutku $t = 0$: nenegativna slučajna veličina [cijene ne mogu biti negativne]

- $S_n(1)(\omega_k)$ – cijena n-te akcije $(n = 1, \ldots, N)$ u k-tom stanju svijeta$(k = 1, \ldots, K)$

- Ako je $N = 1$ koristićemo oznaku $S_1 = S$

Model

H – strategija trgovanja (trading strategy)

- $H = (H_0, H_1, \ldots, H_N) \in R^{N+1}$
- H_0 – količina novca (broj Eura) u banci
- H_n – broj akcija n-te kompanije
- $H_n \in \mathbb{R}$
  - $H_n < 0$ – pozajmica
  - Moguće je pozajmljivati novac – pozajmica u banci
  - Moguće je pozamljivati akcije – going short
- Strategija trgovanja definiše portfolio
  - U modelima sa više perioda strategija trgovanja je (slučajan i predvidiv) proces koji definiše portfolio u svakom trenutku

Model

V – Vrijednost portfolija

$$V_t = H_0 B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t) \tag{1}$$

- V_t – vrijednost portfolija u trenutku t
- $V_t = V_t(H)$ – zavisi od strategije trgovanja H
- V_t je linearno po H
- V_0 je poznata konstanta
- V_1 je slučajna veličina

Model

G - prinos

$$G = V_1 - V_0$$

- $G = G(H)$ – prinos odredjen strategijom trgovanja H

$$G = H_0 r + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n$$

- $\Delta S_n = S_n(1) - S_n(0)$
- $r = B_1 - 1 = B_1 - B_0$

Model

S^* – diskontovani cjenovni proces

$$S_n^*(t) = \frac{S_n(t)}{B_t}$$

- Normalizacija cijena
- Bankovni proces – *numèraire*
- "Bankovni proces je postao konstantan"
- Diskontovane (sadašnje) vrijednosti cijena
- Korisno za poredjenje kretanja cijena jedne u odnosu na drugu

Model

- V_t^* – diskontovana vrijednost portfolija
- $V_t^* = H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(t)$
- $V_t^* = \dfrac{V_t}{B_t}$
- $G^* = V_1^* - V_0^*$– diskontovani prinos
- $G^* = \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*$

Dominantne strategije trovanja

Definicija

$\hat{H}$ je dominantna strategija trgovanja ako postoji (bar jedna) strategija trgovanja $\tilde{H}$ tako da važi:

1. $\hat{V}_0 = \tilde{V}_0$
2. $\hat{V}_1 > \tilde{V}_1$

- $\hat{V} = V(\hat{H})$, $\hat{V} = V(\tilde{H})$ – oznake
- Nejednakost 2. je nejednakost između s.v.:

$$\hat{V}_1(\omega) > \tilde{V}_1(\omega) \text{ važi za svako } \omega \in \Omega$$

Dominantne strategije trovanja

Tvrđenje 1.4

Postoji dominantna strategija trgovanja akko postoji strategija trgovanja H za koju važi:

1. $V_0 = 0$
2. $V_1 > 0 \qquad (V_1(\omega) > 0$ za svako $\omega \in \Omega)$

- Dokaz? – Sami!

- Interpretacija?

- Model dozvoljava dominantne strategije?

Dominantne strategije trgovanja

Tvrđenje 1.5

Postoji dominantna strategija trgovanja akko postoji strategija trgovanja H za koju važi:

1. $V_0 < 0$
2. $V_1 \geq 0 \qquad (V_1(\omega) \geq 0$ za svako $\omega \in \Omega)$

- Dokaz? – Sami!
- Interpretacija?
- Model ne bi trebalo da dozvoljava dominantne strategije!

Linearna cjenovna mjera

Linear pricing measure

Definicija

Vektor $\pi \in \mathbb{R}_+^K$ je *linearna cjenovna mjera* ako za svaku strategiju trgovanja H važi:

$$V_0^*(H) = \sum_{w \in \Omega} \pi(\omega) V_1^*(\omega)$$

- "V_0 kao cijena V_1"

Linearna cjenovna mjera

- Kako je $V_t^* = H_0 + \sum_{n=1}^N H_n S_n^*(t)$:

$$H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega) \left(H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(1)(\omega) \right)$$

- $\sum_\omega \pi(\omega) = 1$ – Zašto?
- $S_n^*(0) = \sum_\omega \pi(\omega) S_n^*(1)(\omega)$ – Zašto?

Linearna cjenovna mjera

Tvrdjenje 1.8

Vektor π je linearna cjenovna mjera ako i samo ako je vjerovatnosna mjera na Ω i važi:

$$S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega) S_n^*(1)(\omega)$$

Dokaz - sami.

Linearna cjenovna mjera i dominantne strategije

Tvrdjenje 1.9

Ne postoje dominantne strategije trgovanja ako i samo ako postoji linearna cjenovna mjera

Dokaz – linearno programiranje, Farkas lemma; projekat.

Zakon jedne cijene

Definicija

Kažemo da važi *zakon jedne cijene* ako ne postoje dvije strategije $\hat{H}$ i $\tilde{H}$ za koje važi $\hat{V}_1 \equiv \tilde{V}_1$ važi i $\hat{V}_0 > \tilde{V}_0$.

- $\hat{V}_1 \equiv \tilde{V}_1$ znači: $\hat{V}_1(\omega) = \tilde{V}_1(\omega)$ za svako ω
- $\hat{V}_0$, $\tilde{V}_0$ – konstante
- Interpretacija?
- Odnos sa postojanjem dominantnih strategija?

Zakon jedne cijene

Tvrđenje 1.12

Ako nema dominantnih strategija trgovanja onda važi zakon jedne cijene. Obrnuto tvrđenje ne važi.

Dokaz – sami.

Arbitraža

Arbitrage (opportunity)

Definicija

Arbitraža je strategija trgovanja H za koju važi:

1. $V_0 = V_0(H) = 0$
2. $V_1 = V_1(H) \geq 0$
3. $E[V_1] = E[V_1(H)] > 0$

- Interpretacija?
- Sličnosti i razlike sa dominantnim strategijama?

Arbitraža

Tvrđenje 1.13

Ako postoji dominantna strategija postoji arbitraža. Obrnuto nije tačno.

Dokaz – sami.

Arbitraža

Alternativna definicija

Strategija trgovanja H je arbitraža akko važi:

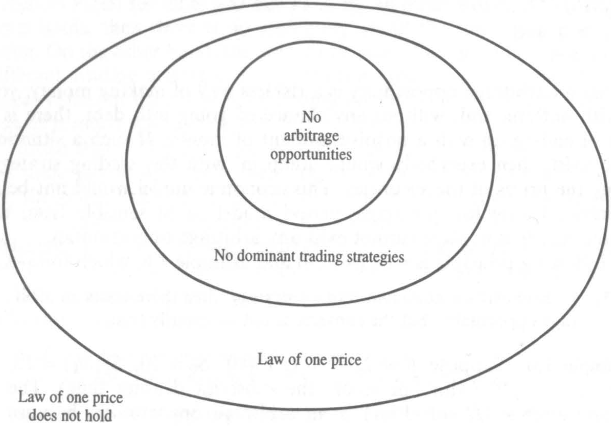
1. $V_0^* = 0$
2. $V_1^* \geq 0$
3. $E[V_1^*] > 0$

Tvrđenje 1.14

Strategija trgovanja H je arbitraža akko važi:

1. $G^* \geq 0$
2. $E[G^*] > 0$

Dokaz – sami.


No arbitrage opportunities
No dominant trading strategies
Law of one price
Law of one price does not hold

Rizik neutralna vjerovatnostna mjera

Risk neutral probability measure, martingale measure

Definicija

Vjerovatnosna mjera Q je *rizik neutralna vjerovatnosna mjera* ako važi:

1. $Q(\omega) > 0$ za svako $\omega \in \Omega$
2. $E_Q[\Delta S_n^*] = 0$ za $n = 1, \ldots, N$

- E_Q – očekivanje u odnosu na mjeru Q:

$$E_Q[\Delta S_n^*] = \sum_{\omega} Q(\omega)\Delta S_n^*(\omega)$$

- Q je *strogo pozitivna* linearna cjenovna mjera

Tvrđenje 1.16

Nema arbitraže akko postoji rizik neutralna vjerovatnosna mjera.

- The First Fundamental Theorem of Asset Pricing
- Važan rezultat
- Dokaz – na tabli

Rizik neutralna vjerovatnostna mjera

- Rizik neutralna mjera ne mora da postoji
- Rizik neutralna mjera ne mora biti jedinstvena

Tvrđenje 1.18

Za proizvoljnu rizik neutralnu mjeru Q i strategiju trgovanja H važi:

$$V_0^* = E_Q[V_1^*]$$

Dokaz - sami (direktno iz definicija)

Uslovno potraživanje

Contigent claim

Uslovno potraživanje je s.v. X.

Interpretacija

- "Ugovor o isplati"
- Prodavac prodaje ugovor/uslovno potraživanje/obećanje
- Prodavac se obavezuje da će u trenutku $t = 1$ isplatiti $X(\omega)$ ako se ispostavi da je stanje svijeta ω.

Kako odrediti cijenu uslovnog potraživanja X *u trenutku* $t = 0$?

Primjeri

Pretpostavimo $N = 1$.

Call opcija

Vlasnik *call opcije* ima pravo, ali ne i obavezu, da kupi akciju S u trenutku $t = 1$ po cijeni e.

- e – ugovorena cijena (excercise price)
- Opcija će se iskoristiti samo ako je $S > e$. Zašto?

$$X = (S - e)^+$$

Primjeri

Pretpostavimo $N = 1$.

Put opcija

Vlasnik *put opcije* ima pravo, ali ne i obavezu, da proda akciju S u trenutku $t = 1$ po cijeni e.

- e – ugovorena cijena (excercise price)
- Opcija će se iskoristiti samo ako je $S < e$. Zašto?

$$X = (e - S)^+$$

Uslovno potraživanje

Definicija

Uslovno potraživanje X je *marketabilno* ako postoji strategija trgovanja H, koju zovemo *replicirajuća strategija*, takva da je $V_1(H) = X$.

- Marketable, attainable contingent claim. Replicating strategy.
- Da li je svako uslovno potraživanje marketabilno?

Uslovno potraživanje

- p – cijena uslovnog potraživanja X
- Ako H replicira X i $p \neq V_0(H)$ onda postoji arbitraža. Zašto?
- Da li svaka replicirajuća strategija H ima istu vrijednost portfolija u trenutku $t = 0$?
  - Zakon jedne cijene!
- Da li postoji arbitraža ako je $p = V_0(H)$?

Uslovno potraživanje

Tvrđenje 1.19

Ako važi zakon jedne cijene onda je vrijednost p uslovnog potraživanja X: $p = V_0(H)$, gdje je H replicirajuća strategija za X.

Tvrđenje 1.20

Ako ne postoji arbitraža onda je vrijednost p uslovnog potraživanja X: $p = E_Q[X/B_1]$, gdje je Q proizvoljna rizik neutralna mjera.

- $p = E_Q[X/B_1] = E_Q[V_1(H)/B_1] = E_Q[V_1^*(H)] = V_0(H)$

Primjer

Put-call parity

Neka je:

- $N = 1$
- e – ugovorena cijena za date call i put opcije
- c – cijena call opcije
- p – cijena put opcije

Onda važi:

$$c - p = S(0) - \frac{e}{1 + r}$$

Dokaz - sami (iz definicija)

Kompletna tržišta

Pretpostavka: postoji rizik neutralna vjerovatnostna mjera.

Kada postoji strategija H koje replicira usl. potraživanje X?

- X – dato uslovno potraživanje
- $H = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ – tražena strategija trgovanja
- $V_1(H)$ je s.v.: vektor dužine K.
- A – matrica takva da je $V_1(H) = AH$:

$$A := \begin{bmatrix} B_0(\omega_1) & S_1(0)(\omega_1) & \ldots & S_n(0)(\omega_1) \\ B_0(\omega_2) & S_1(0)(\omega_2) & \ldots & S_n(0)(\omega_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_0(\omega_K) & S_1(0)(\omega_K) & \ldots & S_n(0)(\omega_K) \end{bmatrix}$$

- A je poznata matrica (ne zavisi od H).
- H replicira X akko $AH = X$ ima rješenje!

Kompletna tržista

Definicija

Kažemo da je tržiste *kompletno* ako za svako uslovno potraživanje X postoji strategije trgovanja H koja replicira X.

Tvrđenje 1.22

Ako postoji rizik neutralna vjerovatnostna mjera onda važi:

Tržiste je kompletno akko rang $A = K$.

Kompletna tržista

Neka je $\mathbb{M} \neq \emptyset$ skup svih vjerovatnosnih mjera.

Tvrđenje 1.23

Postoji strategija trgovanja H koja replicira uslovno potraživanje X akko je vrijednost $E_Q[X/B_1]$ jednaka za sve $Q \in \mathbb{M}$

Tvrđenje 1.24 (The Second Fundamental Theorem of Asset Pricing)

Model je kompletan akko $\mathbb{M}$ sadrži tačno jednu rizik neutralnu vjerovatnostnu mjeru.