3. Stablo

Definicija:

Ciklus je zatvorena staza. Graf bez ciklusa je acikličan graf ili šuma.

Definicija:

Stablo je povezan acikličan graf.

Lema

U svakom netrivijalnom stablu postoji čvor stepena 1

Dokaz.

U suprotnom .... $\square$

Teorema

Neka je G graf sa n čvorova. Sljedeća tvrđenja su ekvivalenta:

(1) G je povezan bez kontura

(2) G je bez kontura i ima $n-1$ granu

(3) G je povezan i ima $n-1$ granu

(4) G je bez kontura ali gubi to svojstvo dodavanjem grane između ma koja dva nesusjedna čvora

(5) G je povezan ali gubi to svojstvo udaljavanjem ma koje grane

(6) Svaka dva čvora u G su povezana jedinstvenim putem

Dokaz.

Dokazujemo da

$(1) \to (2) \to (3) \to (1)$ i $(1) \to (4) \to (5) \to (6) \to (1)$

$\underline{(1) \to (2)}$: Indukcijom po broju čvorova, korišćenjem prethodne Leme

$\underline{(2) \to (3)}$:

- $H_1, H_2, \ldots H_k$ komponente povezanosti grafa G

$\square$

Dokaz.

Dokazujemo da

$(1) \to (2) \to (3) \to (1)$ i $(1) \to (4) \to (5) \to (6) \to (1)$

$\underline{(1) \to (2)}$: Indukcijom po broju čvorova, korišćenjem prethodne Leme

$\underline{(2) \to (3)}$:

- $H_1, H_2, \ldots H_k$ komponente povezanosti grafa G
- $m_i = n_i - 1, \ i = 1, \ldots, k$

$\square$

Dokaz.

Dokazujemo da

$(1) \to (2) \to (3) \to (1)$ i $(1) \to (4) \to (5) \to (6) \to (1)$

$\underline{(1) \to (2)}$: Indukcijom po broju čvorova, korišćenjem prethodne Leme

$\underline{(2) \to (3)}$:

- $H_1, H_2, \dots H_k$ komponente povezanosti grafa G
- $m_i = n_i - 1,\ i = 1, \dots, k$
- $\sum_{i=1}^{k} m_i = n - k$

$\square$

Dokaz.

Dokazujemo da

$(1) \to (2) \to (3) \to (1)$ i $(1) \to (4) \to (5) \to (6) \to (1)$

$\underline{(1) \to (2)}$: Indukcijom po broju čvorova, korišćenjem prethodne Leme

$\underline{(2) \to (3)}$:

- $H_1, H_2, \ldots H_k$ komponente povezanosti grafa G
- $m_i = n_i - 1,\ i = 1, \ldots, k$
- $\sum_{i=1}^{k} m_i = n - k$
- $n - 1 = n - k \to k = 1$

$\square$

Dokaz.

$\underline{(3) \to (1)}$: Dokazujemo da G nema konturu. U suprotnom:

- skidaju se grane sa kontura dok god postoje.

$\underline{(1) \to (4)}$: trivijalno
$\underline{(4) \to (5)}$: Pokazujemo prvo da je G povezan ...
$\underline{(5) \to (6)}$, $\underline{(6) \to (1)}$: trivijalno $\square$

Definicija:

H je razapinjuće stablo grafa G ako je H stablo i H je razapinjući podgraf grafa G.

Lema

U svakom povezanom multigrafu postoji razapinjuće stablo.

Dokaz.

$\underline{(3) \to (1)}$: Dokazujemo da G nema konturu. U suprotnom:

- skidaju se grane sa kontura dok god postoje.
- Dobijamo povezan graf H bez kontura

$\underline{(1) \to (4)}$: trivijalno
$\underline{(4) \to (5)}$: Pokazujemo prvo da je G povezan ...
$\underline{(5) \to (6)}$, $\underline{(6) \to (1)}$: trivijalno □

Definicija:

H je razapinjuće stablo grafa G ako je H stablo i H je razapinjući podgraf grafa G.

Lema

U svakom povezanom multigrafu postoji razapinjuće stablo.

Dokaz.

$\underline{(3) \to (1)}$: Dokazujemo da G nema konturu. U suprotnom:

- skidaju se grane sa kontura dok god postoje.
- Dobijamo povezan graf H bez kontura
- H ima $n-1$ granu

$\underline{(1) \to (4)}$: trivijalno

$\underline{(4) \to (5)}$: Pokazujemo prvo da je G povezan ...

$\underline{(5) \to (6)}$, $\underline{(6) \to (1)}$: trivijalno □

Definicija:

H je razapinjuće stablo grafa G ako je H stablo i H je razapinjući podgraf grafa G.

Lema

U svakom povezanom multigrafu postoji razapinjuće stablo.

Broj razapinjućih stabala obilježenog grafa

- $\tau(G)$ - Broj razapinjućih stabala obilježenog grafa G

Lema

Neka je e grana multigrafa G koja nije petlja. Tada važi:

$$\tau(G) = \tau(G - e) - \tau(G \cdot e)$$

Broj razapinjućih stabala obilježenog grafa

- $\tau(G)$ - Broj razapinjućih stabala obilježenog grafa G
- Grafovi G_1 i G_2 sa istim skupom čvorova $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ su različiti ako postoji grana (v_i, v_j) koja pripada samo jednom od ovih grafova.

Lema

Neka je e grana multigrafa G koja nije petlja. Tada važi:

$$\tau(G) = \tau(G - e) - \tau(G \cdot e)$$

Broj razapinjućih stabala obilježenog grafa

- $\tau(G)$ - Broj razapinjućih stabala obilježenog grafa G
- Grafovi G_1 i G_2 sa istim skupom čvorova $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ su različiti ako postoji grana (v_i, v_j) koja pripada samo jednom od ovih grafova.
- Karika je grana multigrafa koja nije petlja

Lema

Neka je e grana multigrafa G koja nije petlja. Tada važi:

$$\tau(G) = \tau(G - e) - \tau(G \cdot e)$$