

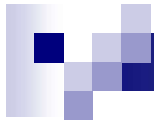


Osnovi računarstva I

Minimizacija prekidačkih funkcija

- Određivanje najjednostavnijeg mogućeg izraza koji odgovara nekoj Bulovoj funkciji naziva se *minimizacijom*
- Minimizaciju funkcije sa malim brojem (ne više od 5) promjenljivih pogodno je vršiti upotrebom **Karnoovih mapa (K mapa)**
- Elementarnoj površini (polju) u Karnoovoj mapi odgovara jedan **potpuni logički proizvod (minterm)**, odnosno **potpuni logički zbir (maksterm)**, tj. jedan indeks.
- Shodno tome, Karnoova mapa za funkciju sa n promjenljivih sastoji se od 2^n kvadratnih polja koja predstavljaju elementarne površine
- Za funkciju 4 promjenljive:
 - Svaka promjenljiva u mapi ima svoj značaj (X_1 najveći, X_4 najmanji)

		X_3X_4			
		00	01	11	10
X_1X_2	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10



- Potrebno je sve jedinice (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku zbira logičkih proizvoda), odnosno nule (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku proizvoda logičkih zbirova), u mapi pokriti površinama (odnosno, karticama) koje obuhvataju tzv. susjedna polja
- Susjedna polja su ona čiji se mintermovi, odnosno makstermovi, razlikuju u jednom bitu
- Prilikom izbora površina kojima će se pokriti polja na kojima se nalaze jedinice (odnosno nule) mora se voditi računa o nekoliko prostih pravila:
 - zaokružuju se susjedna polja što je moguće većom površinom (karticom) pri čemu broj pokrivenih polja mora biti jednak 2^n , gdje je $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$;
 - broj površina (kartica) mora biti što je moguće manji;
 - preporučuje se da se zaokruživanje **započne** od onih jedinica (odnosno nula) koje mogu da se zaokruže samo na jedan način!

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f:

		zp			
		00	01	11	10
xy	00	0	0	0	0
	01	1	1	0	0
	11	0	0	1	1
	10	0	0	1	1

Diagram showing groupings in the Karnaugh map: Group 1 (circled 1) points to the cell (01, 00) and (01, 01). Group 2 (circled 2) points to the cells (11, 11) and (10, 11).

- U obliku zbira potpunih proizvoda:

$$f = \bar{x} y \bar{z} \bar{p} + \bar{x} y \bar{z} p + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p}$$

- Grupisanjem prva dva minterma:

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} y \bar{z} (\bar{p} + p) + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p} = \\ &= \bar{x} y \bar{z} + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p} \end{aligned}$$

- Grupisanjem poslednja četiri minterma:

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} y \bar{z} + x z (y p + y \bar{p} + \bar{y} p + \bar{y} \bar{p}) = \bar{x} y \bar{z} + x z (y(p + \bar{p}) + \bar{y}(p + \bar{p})) = \\ &= \bar{x} y \bar{z} + x z (y + \bar{y}) = \bar{x} y \bar{z} + x z \end{aligned}$$

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f:

xy \ zp		zp			
		00	01	11	10
xy	00	1	0	0	0
	01	1	0	1	0
	11	1	0	1	0
	10	1	0	0	0

Diagram showing a Karnaugh map for function f. The map is a 4x4 grid with rows labeled xy (00, 01, 11, 10) and columns labeled zp (00, 01, 11, 10). The values in the cells are: (00,00)=1, (00,01)=0, (00,11)=0, (00,10)=0; (01,00)=1, (01,01)=0, (01,11)=1, (01,10)=0; (11,00)=1, (11,01)=0, (11,11)=1, (11,10)=0; (10,00)=1, (10,01)=0, (10,11)=0, (10,10)=0. Two groups are identified: Group 1 (circled 1) covers the first column (zp=00) and Group 2 (circled 2) covers the third column (zp=11).

$$f = \bar{z} \cdot \bar{p} + y \cdot z \cdot p$$

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f:

xy \ zp		zp			
		00	01	11	10
xy	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	1
	11	0	1	1	1
	10	0	1	1	0

Diagram showing a Karnaugh map for function f. The map is a 4x4 grid with rows labeled xy (00, 01, 11, 10) and columns labeled zp (00, 01, 11, 10). The values in the cells are: (00,00)=0, (00,01)=1, (00,11)=1, (00,10)=0; (01,00)=0, (01,01)=1, (01,11)=1, (01,10)=1; (11,00)=0, (11,01)=1, (11,11)=1, (11,10)=1; (10,00)=0, (10,01)=1, (10,11)=1, (10,10)=0. Two groups are identified: Group 1 (circled 1) covers the second column (zp=01) and Group 2 (circled 2) covers the third and fourth columns (zp=11 and zp=10).

$$f = p + yz$$

Karnoove mape sa f-je sa dvije promjenljive

- Za Bulovu funkciju sa dvije promjenljive definišu se četiri minterma - mapa se sastoji od četiri polja:

X \ Y	0	1
0	$\bar{X}\bar{Y}$	$\bar{X}Y$
1	$X\bar{Y}$	XY

m_0	m_1
m_2	m_3

Funkcija XY

X \ Y	0	1
0		
1		1

Funkcija $F(X, Y) = \sum m(1,2) = \bar{X}Y + X\bar{Y}$

X \ Y	0	1
0		1
1	1	

- *Primjer:* Odrediti minimalni oblik logičke funkcije zadate izrazom:

$$F(X, Y) = \sum m(1,2,3) = m_1 + m_2 + m_3$$

- *Rješenje:* Minimalni oblik funkcije možemo odrediti na tri načina:

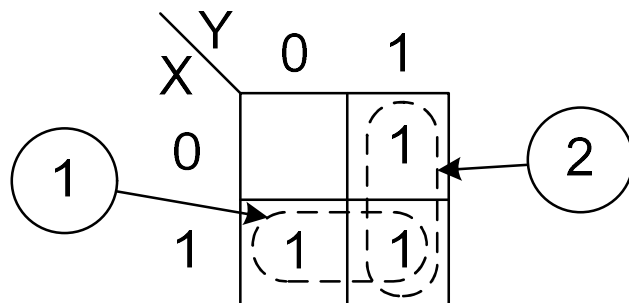
1. **Algebarski:**

$$\begin{aligned} F &= \bar{X} \cdot Y + X \cdot \bar{Y} + X \cdot Y = \bar{X} \cdot Y + X \cdot (\bar{Y} + Y) = \bar{X} \cdot Y + X = \\ &= \bar{X} \cdot Y + X \cdot (1 + Y) = \bar{X} \cdot Y + X + X \cdot Y = Y \cdot (\bar{X} + X) + X = X + Y \end{aligned}$$

2. **Proizvodom potpunih logičkih zbirova (makstermova):**

$$F = \prod M(0) = X + Y.$$

3. **Upotrebom Karnoove mape:**



$$F = X + Y$$

Karnoove mape za f-je sa tri promjenljive

- U slučaju logičke funkcije sa tri promjenljive postoji osam mintermova - osam polja

		YZ			
		00	01	11	10
X	0	m ₀	m ₁	m ₃	m ₂
	1	m ₄	m ₅	m ₇	m ₆

- Posmatrajmo logički zbir četiri minterma koji se nalaze u susjednim poljima Karnoove mape:

$$\begin{aligned} m_1 + m_3 + m_5 + m_7 &= (\bar{X} \bar{Y} Z + \bar{X} Y Z) + (X \bar{Y} Z + X Y Z) = \\ &= \bar{X} Z(\bar{Y} + Y) + X Z(\bar{Y} + Y) = \bar{X} Z + X Z = Z \end{aligned}$$

Karnoove mape za f-je sa četiri promjenljive

- Četiri promjenljive - šesnaest mintermova

- *Primjer*: Odrediti minimalnu formu funkcije:

$$f(D, C, B, A) = CBA + D\bar{C}\bar{B} + CB\bar{A}$$

- *Rješenje*:

$$\begin{aligned} f(D, C, B, A) &= (D + \bar{D})CBA + D\bar{C}\bar{B}(A + \bar{A}) + (D + \bar{D})CB\bar{A} = \\ &= m_{15} + m_7 + m_9 + m_8 + m_{14} + m_6 = \sum m(6,7,8,9,14,15) \end{aligned}$$

A 4x4 Karnaugh map for variables D, C, B, A. The columns are labeled BA (00, 01, 11, 10) and the rows are labeled DC (00, 01, 11, 10). The cells contain the following values: (00,00)=0, (01,00)=1, (11,00)=3, (10,00)=2; (00,01)=4, (01,01)=5, (11,01)=7, (10,01)=6; (00,11)=12, (01,11)=13, (11,11)=15, (10,11)=14; (00,10)=8, (01,10)=9, (11,10)=11, (10,10)=10. Group 1 (circled 1) is a 2x2 square covering cells (11,01), (11,11), (10,01), and (10,11). Group 2 (circled 2) is a 2x2 square covering cells (11,01), (11,11), (10,01), and (10,11). Dashed lines indicate the groupings.

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

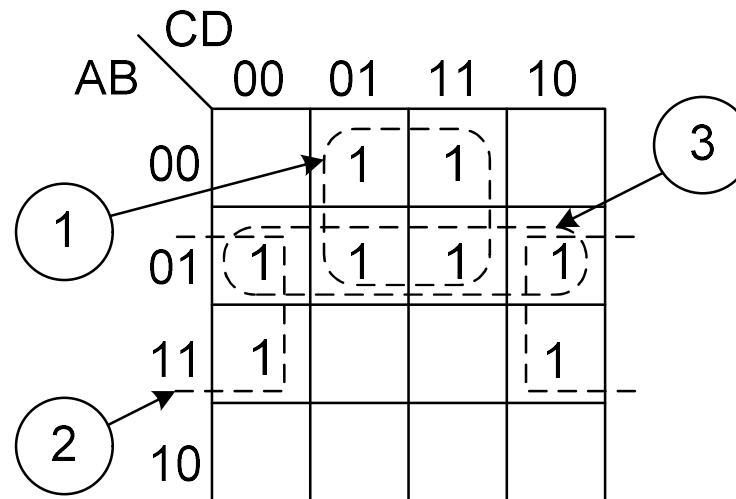
	DC \ BA	00	01	11	10
00		0	1	3	2
01		4	5	7	6
11		12	13	15	14
10		8	9	11	10

$$m_{8,9} = D\bar{C}\bar{B}\bar{A} + D\bar{C}\bar{B}A = D\bar{C}\bar{B}(\bar{A} + A) = D\bar{C}\bar{B}$$

$$\begin{aligned} m_{6,7,14,15} &= \bar{D}C\bar{B}\bar{A} + \bar{D}CBA + DC\bar{B}\bar{A} + DCBA = \bar{D}CB(\bar{A} + A) + DCB(\bar{A} + A) = \\ &= \bar{D}CB + DCB = CB(\bar{D} + D) = CB \end{aligned}$$

$$f(D, C, B, A) = D\bar{C}\bar{B} + CB$$

Primjer:



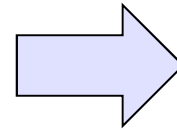
$$F = \bar{A}D + B\bar{D}$$

Napomena: Skupovi 1 i 2 su **bitni**, jer se mintermovi m_1 i m_3 obuhvataju samo skupom 1 zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $\bar{A}D$, odnosno mintermovi m_{12} i m_{14} se obuhvataju samo skupom 2 zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $B\bar{D}$

Skup 3 je **nebitan** (svi njegovi mintermovi obuhvaćeni su skupovima 1 i 2)

■ *Primjer:*

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	1			
01		1		
11	1	1	1	
10			1	1



AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	1			
01		1		
11	1	1	1	
10			1	1

bitni skupovi

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	1			
01		1		
11	1	1	1	
10			1	1

nebitni skupovi

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + B\bar{C}D + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \begin{cases} ACD \\ ili \\ ABD \end{cases}$$

- *Primjer:* Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D) = \sum m(0,1,2,5,8,9,10)$$

i zapisati je u obliku **proizvoda logičkih zbirova**.

- *Rješenje:*

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	1
	01	0	1	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	1	0	1

Diagram showing the Karnaugh map for the function $F(A, B, C, D) = \sum m(0,1,2,5,8,9,10)$. The map is a 4x4 grid with rows labeled AB (00, 01, 11, 10) and columns labeled CD (00, 01, 11, 10). The values in the cells are: (00,00)=1, (00,01)=1, (00,11)=0, (00,10)=1; (01,00)=0, (01,01)=1, (01,11)=0, (01,10)=0; (11,00)=0, (11,01)=0, (11,11)=0, (11,10)=0; (10,00)=1, (10,01)=1, (10,11)=0, (10,10)=1. Three groups are identified and circled: Group 2 (top row, columns 00, 01, 10), Group 1 (middle row, columns 01, 10), and Group 3 (bottom row, columns 00, 01, 10). Arrows point from the group numbers to their respective groups.

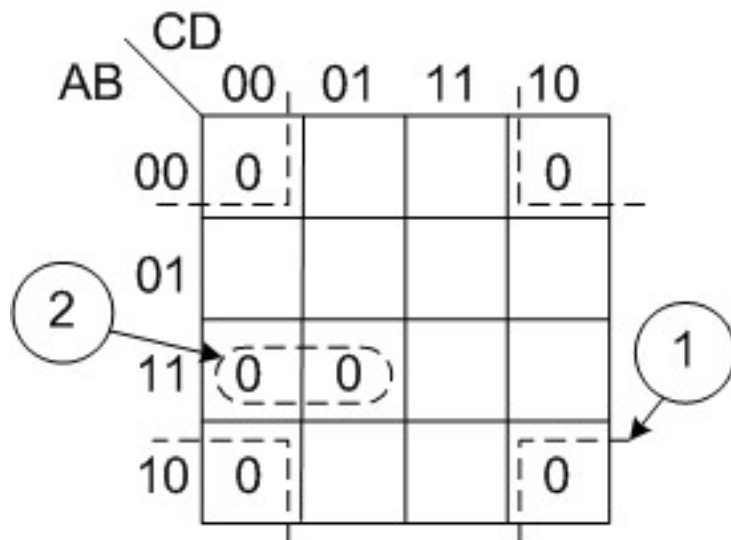
$$F = (\bar{A} + \bar{B}) \cdot (\bar{C} + \bar{D}) \cdot (\bar{B} + D)$$

- *Primjer:* Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D) = (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (B + C + D) \cdot (B + \bar{C} + D)$$

- *Rješenje:*

$$\begin{aligned} F &= (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (B + C + D) \cdot (B + \bar{C} + D) = (\bar{A} + \bar{B} + C + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D}) \cdot \\ &\cdot (A + B + C + D) \cdot (\bar{A} + B + C + D) \cdot (A + B + \bar{C} + D) \cdot (\bar{A} + B + \bar{C} + D) = \\ &= \prod M(0, 2, 8, 10, 12, 13). \end{aligned}$$



$$F(A, B, C, D) = (B + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C)$$

- *Primjer.* Pronaći minimalnu formu **nekompletno definisane** funkcije F, sa tri "bilo što" uslova:

$$F(A, B, C, D) = \sum m(1, 3, 7, 11, 15) + \times (0, 2, 5).$$

- *Rješenje:*

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing Karnaugh map for F(A, B, C, D). The map is a 4x4 grid with rows labeled AB (00, 01, 11, 10) and columns labeled CD (00, 01, 11, 10). The values are: (00,00)=X, (00,01)=1, (00,11)=1, (00,10)=X, (01,00)=0, (01,01)=X, (01,11)=1, (01,10)=0, (11,00)=0, (11,01)=0, (11,11)=1, (11,10)=0, (10,00)=0, (10,01)=0, (10,11)=1, (10,10)=0. Dashed boxes group (00,00), (00,01), (00,11), (00,10) and (00,01), (01,01), (11,01), (10,01). Arrows point from circles 1 and 2 to these groups.

$$F = \bar{A}\bar{B} + CD$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing Karnaugh map for F(A, B, C, D). The map is a 4x4 grid with rows labeled AB (00, 01, 11, 10) and columns labeled CD (00, 01, 11, 10). The values are: (00,00)=X, (00,01)=1, (00,11)=1, (00,10)=X, (01,00)=0, (01,01)=X, (01,11)=1, (01,10)=0, (11,00)=0, (11,01)=0, (11,11)=1, (11,10)=0, (10,00)=0, (10,01)=0, (10,11)=1, (10,10)=0. Dashed boxes group (00,01), (01,01), (11,01), (10,01) and (00,11), (01,11), (11,11), (10,11). Arrows point from circles 1 and 2 to these groups.

$$F = \bar{A}D + CD$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing Karnaugh map for F(A, B, C, D). The map is a 4x4 grid with rows labeled AB (00, 01, 11, 10) and columns labeled CD (00, 01, 11, 10). The values are: (00,00)=X, (00,01)=1, (00,11)=1, (00,10)=X, (01,00)=0, (01,01)=X, (01,11)=1, (01,10)=0, (11,00)=0, (11,01)=0, (11,11)=1, (11,10)=0, (10,00)=0, (10,01)=0, (10,11)=1, (10,10)=0. Dashed boxes group (00,00), (00,01), (00,11), (00,10) and (00,01), (01,01), (11,01), (10,01). Arrows point from circles 1 and 2 to these groups.

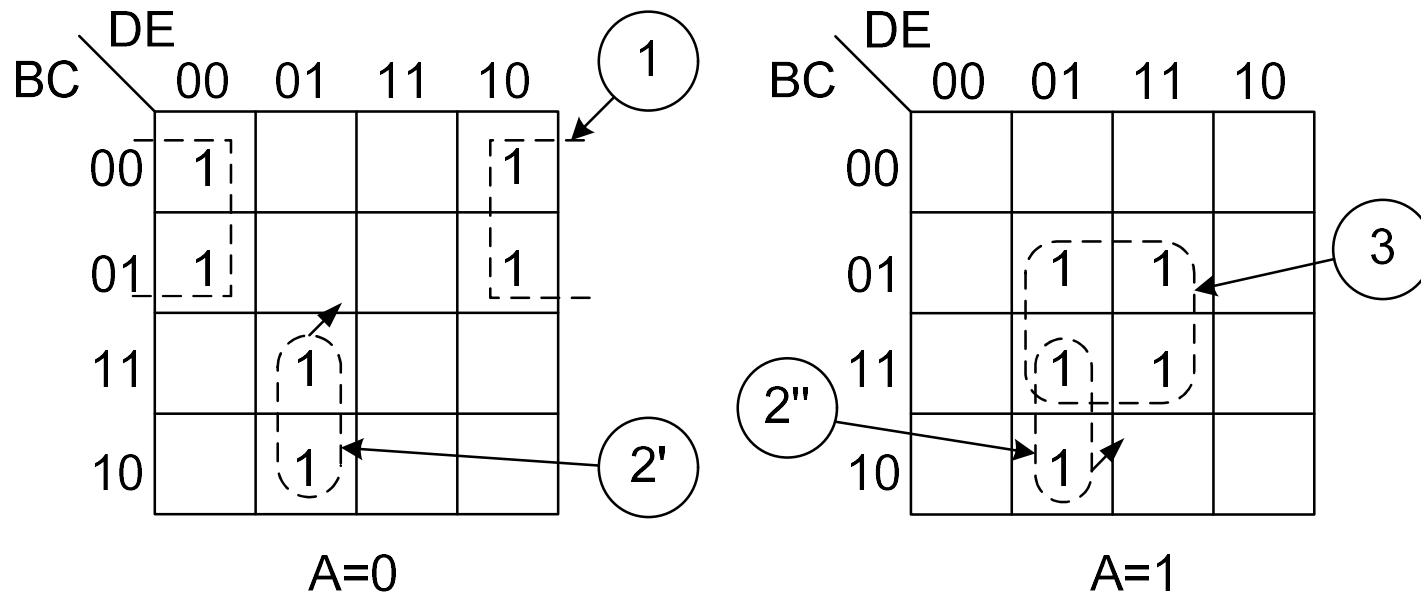
$$F = D \cdot (\bar{A} + C)$$

Karnoove mape za f-je sa pet promjenljivih

- *Primjer.* Pronaći uprošćeni oblik funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D, E) = \sum m(0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31)$$

- *Rješenje:*



$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{E} + B\bar{D}E + ACE$$



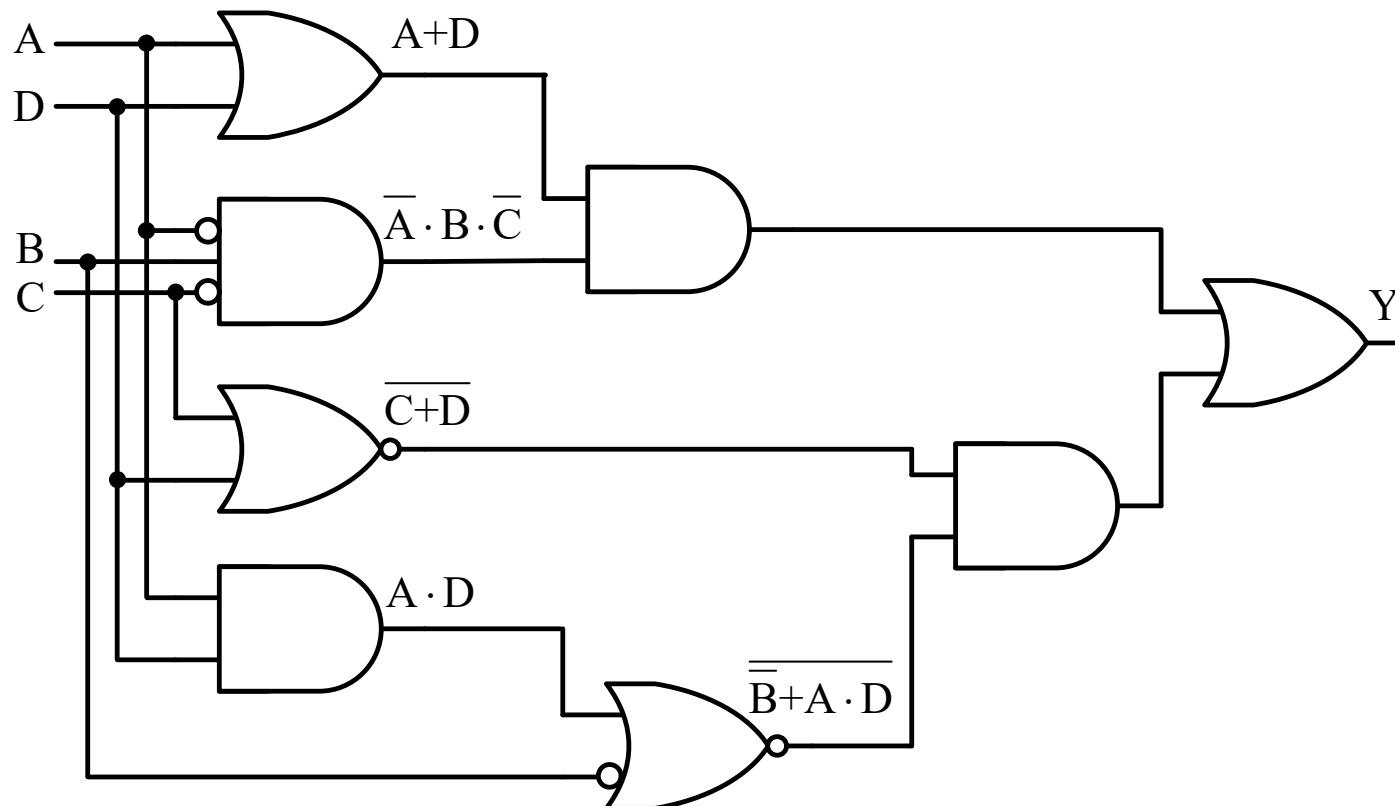
Osnovi računarstva I

Prekidačke mreže

- Posmatrajmo složenu prekidačku funkciju:

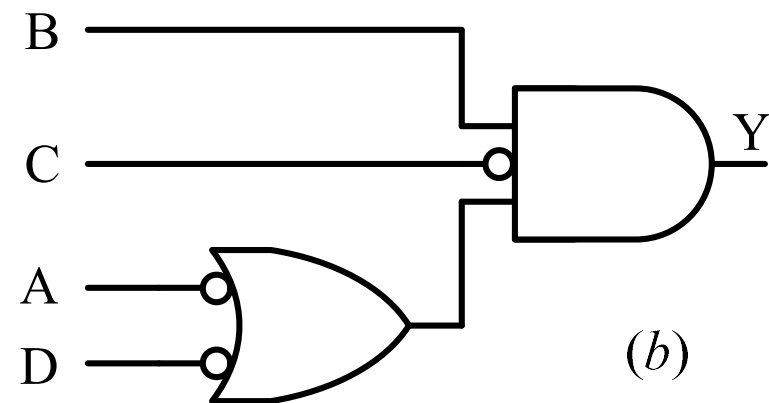
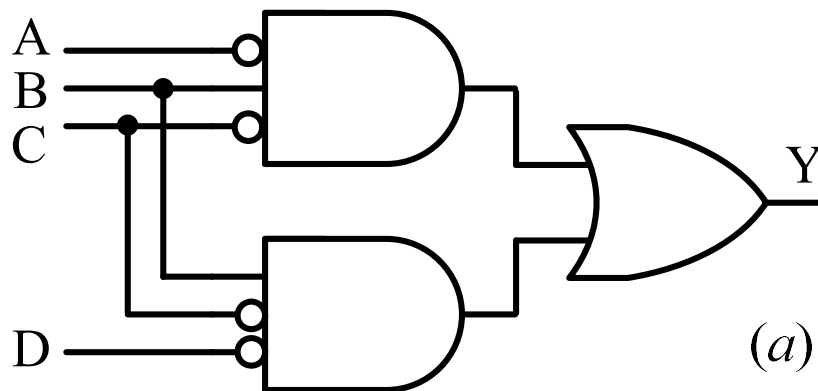
$$Y = (A + D) \cdot \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \overline{C + D} \cdot \bar{\bar{B}} + A \cdot D$$

- Logička šema prekidačke mreže može se dobiti **direktnim preslikavanjem** posmatrane prekidačke f-je u odgovarajući dijagram elementarnih logičkih kola:



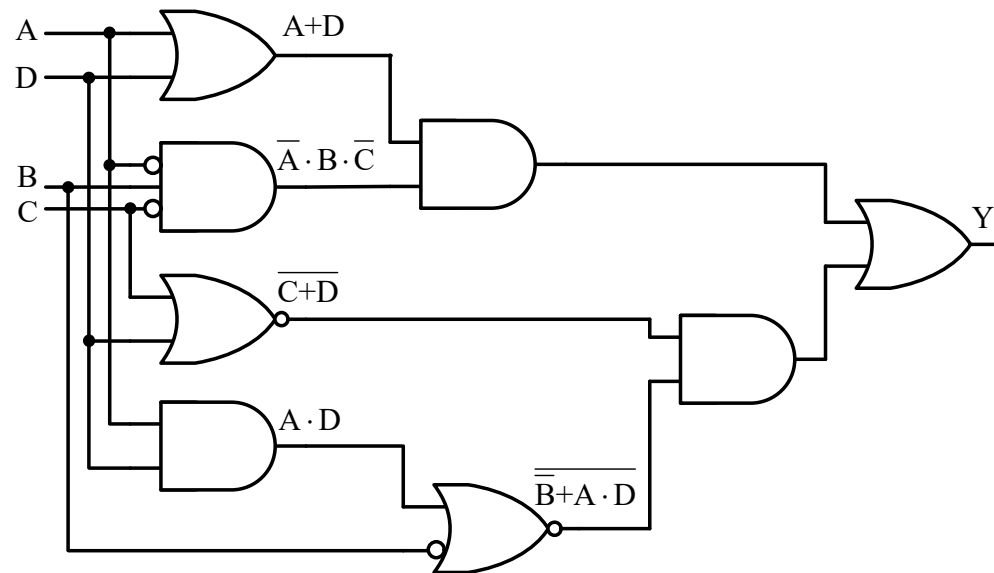
- Izlaz Y iste logičke vrijednosti veoma često se može realizovati pomoću jednostavnije mreže logičkih kola (realizacijom ekvivalentne prekidačke f-je dobijene algebarskom ili minimizacijom pomoću Karnoovih mapa):

$$Y = \bar{A}B\bar{C} + B\bar{C}\bar{D} = B\bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{D})$$

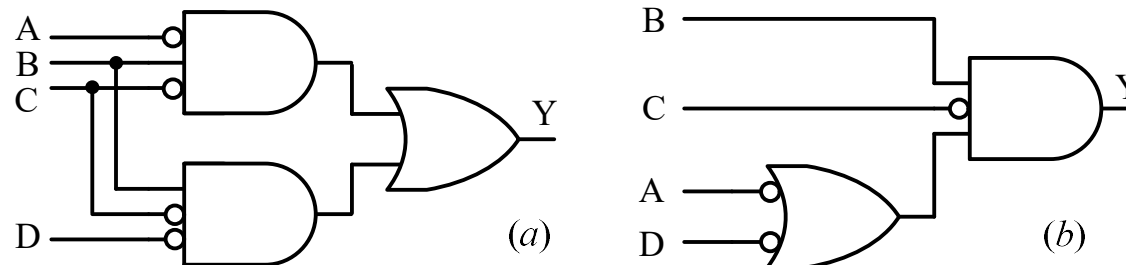


- Prekidačke mreže za implementaciju funkcije ne razlikuju se samo u pogledu broja i tipa upotrijebljenih logičkih elemenata, već i po broju nivoa (stepeni) u strukturi mreže
- Stepen prekidačke mreže određen je najvećim br. redno vezanih log. kola kroz koja neki od ulaznih signala treba da prođe do izlaza mreže

- Četvorostepena:



- Dvostepene:





REALIZACIJA NORMALNIH FORMI PREKIDAČKIH FUNKCIJA UPOTREBOM LOGIČKIH NI I NILI KOLA

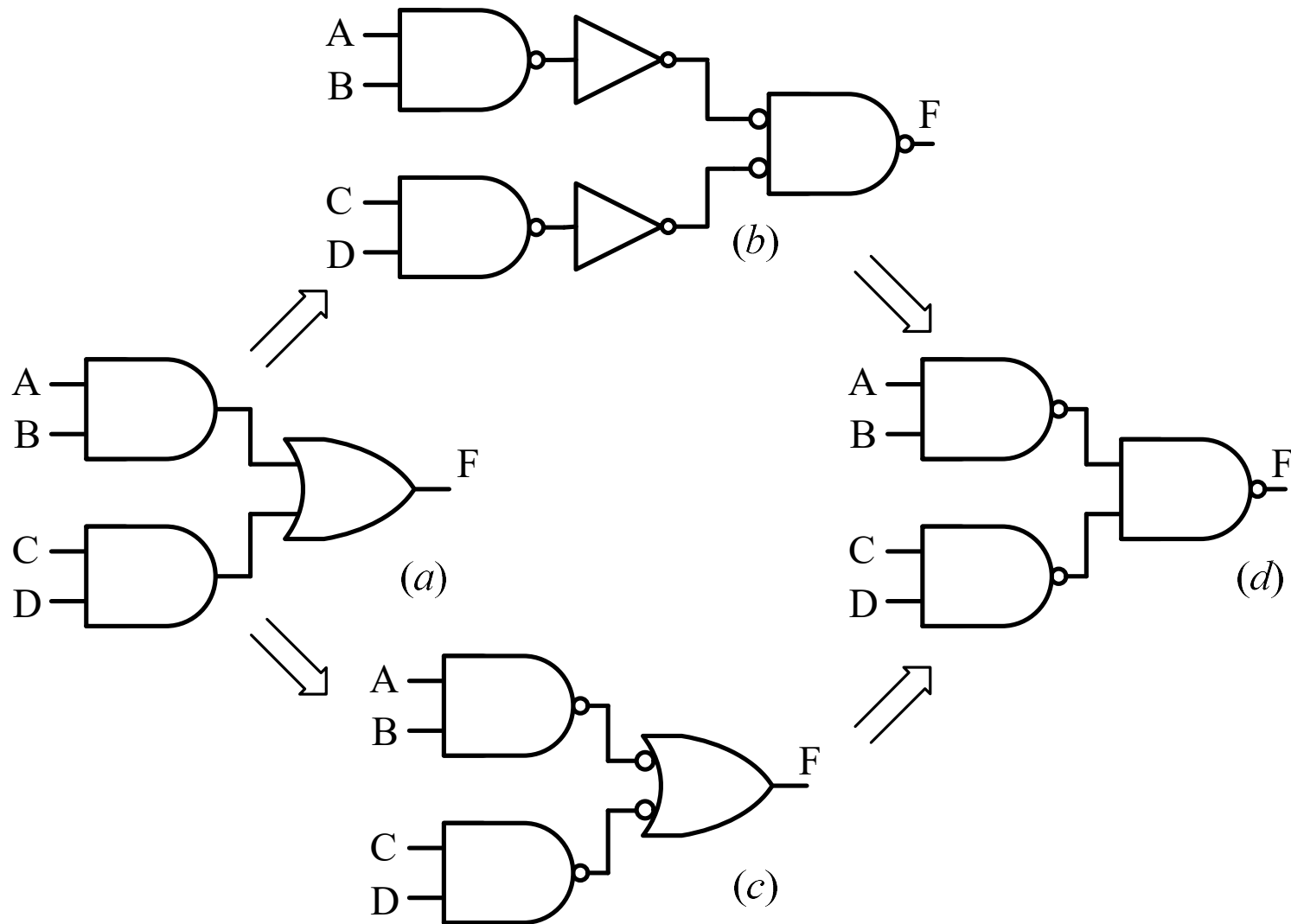
- U slučaju logičke funkcije oblika zbira logičkih proizvoda, implementacija **dvostepene** prekidačke mreže može se izvršiti **upotrebom isključivo logičkih NI kola**:

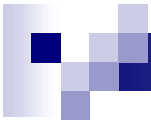
$$F = A \cdot B + C \cdot D = \overline{\overline{A \cdot B}} + \overline{\overline{C \cdot D}} = \overline{\overline{A \cdot B} \cdot \overline{\overline{C \cdot D}}}$$

- Analogno tome, funkcije oblika proizvoda logičkih zbirova mogu se implementirati **dvostepenom** prekidačkom mrežom, **koristeći isključivo logička NILI kola**.

$$F = (A + B) \cdot (C + D) = \overline{\overline{A + B}} \cdot \overline{\overline{C + D}} = \overline{\overline{A + B} + \overline{\overline{C + D}}}$$

$$F = A \cdot B + C \cdot D$$





$$F = (A + B) \cdot (C + D)$$

