



Osnovi računarstva I

Minimizacija prekidačkih funkcija

- **Minimizacija** – Proces određivanja najjednostavnijeg mogućeg izraza koji odgovara nekoj Boole-ovoj funkciji
- Minimizaciju funkcije sa malim brojem (najviše 5 ili, u nekim slučajevima, i 6) promjenljivih pogodno je vršiti upotrebom **Karnough-ovih mapa (K mapa)**
- Elementarnoj površini (polju) u K mapi odgovara jedan **potpuni logički proizvod (minterm)**, odnosno **potpuni logički zbir (maksterm)**, tj. jedan indeks.
- Shodno tome, K mapa za funkciju sa n promjenljivih sastoji se od 2^n kvadratnih polja koja predstavljaju elementarne površine
- Za funkciju 4 promjenljive:
- Svaka promjenljiva u mapi ima svoj značaj (X_1 najveći, X_4 najmanji)

		X_3X_4			
		00	01	11	10
X_1X_2	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10



- Potrebno je sve jedinice (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku zbira logičkih proizvoda), odnosno nule (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku proizvoda logičkih zbirova), u mapi prekriti površinama (odnosno, karticama) koje obuhvataju tzv. sušedna polja
- Sušedna polja su ona čiji se mintermovi, odnosno makstermovi, razlikuju u jednom bitu
- Prilikom izbora površina kojima će se prekriti polja na kojima se nalaze jedinice (odnosno nule) mora se voditi računa o nekoliko prostih pravila:
 - prekrivaju se sušedna polja što je moguće većom površinom (karticom) pri čemu broj prekrivenih polja mora biti oblika 2^n , gdje je $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$;
 - broj površina (kartica) mora biti što je moguće manji;
 - preporučuje se da se prekrivanje **započne** od onih jedinica (odnosno nula) koje mogu da se prekriju samo na jedan način!

- Pretpostavimo da je K mapom sa slike zadata logička funkcija f:

		zp			
xy		00	01	11	10
		00	01	11	10
00		0	0	0	0
01		1	1	0	0
11		0	0	1	1
10		0	0	1	1

Diagram showing a Karnaugh map for function f. The map is a 4x4 grid with rows labeled xy (00, 01, 11, 10) and columns labeled zp (00, 01, 11, 10). The values in the cells are: (00,00)=0, (00,01)=0, (00,11)=0, (00,10)=0; (01,00)=1, (01,01)=1, (01,11)=0, (01,10)=0; (11,00)=0, (11,01)=0, (11,11)=1, (11,10)=1; (10,00)=0, (10,01)=0, (10,11)=1, (10,10)=1. Two groups are circled: Group 1 (circled 1) covers the cells (01,00), (01,01), (11,00), (11,01). Group 2 (circled 2) covers the cells (01,01), (01,11), (11,01), (11,11).

- U obliku zbira potpunih logičkih proizvoda:

$$f = \bar{x} y \bar{z} \bar{p} + \bar{x} y \bar{z} p + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p}$$

- Grupisanjem prva dva minterma:

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} y \bar{z} (\bar{p} + p) + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p} = \\ &= \bar{x} y \bar{z} + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p} \end{aligned}$$

- Grupisanjem posljednja četiri minterma:

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} y \bar{z} + x z (y p + y \bar{p} + \bar{y} p + \bar{y} \bar{p}) = \bar{x} y \bar{z} + x z (y(p + \bar{p}) + \bar{y}(p + \bar{p})) = \\ &= \bar{x} y \bar{z} + x z (y + \bar{y}) = \bar{x} y \bar{z} + x z \end{aligned}$$

- Pretpostavimo da je K mapom sa slike zadata logička funkcija f:

xy \ zp		zp			
		00	01	11	10
xy	00	1	0	0	0
	01	1	0	1	0
	11	1	0	1	0
	10	1	0	0	0

Diagram showing a Karnaugh map for function f. The map is a 4x4 grid with rows labeled xy (00, 01, 11, 10) and columns labeled zp (00, 01, 11, 10). The values in the cells are: (00,00)=1, (00,01)=0, (00,11)=0, (00,10)=0; (01,00)=1, (01,01)=0, (01,11)=1, (01,10)=0; (11,00)=1, (11,01)=0, (11,11)=1, (11,10)=0; (10,00)=1, (10,01)=0, (10,11)=0, (10,10)=0. A dashed box labeled 1 encloses the first column (zp=00). A dashed box labeled 2 encloses the cells (01,11), (11,11), and (10,11).

$$f = \bar{z} \cdot \bar{p} + y \cdot z \cdot p$$

- Pretpostavimo da je K mapom sa slike zadata logička funkcija f:

xy \ zp		zp			
		00	01	11	10
xy	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	1
	11	0	1	1	1
	10	0	1	1	0

Diagram showing a Karnaugh map for function f. The map is a 4x4 grid with rows labeled xy (00, 01, 11, 10) and columns labeled zp (00, 01, 11, 10). The values in the cells are: (00,00)=0, (00,01)=1, (00,11)=1, (00,10)=0; (01,00)=0, (01,01)=1, (01,11)=1, (01,10)=1; (11,00)=0, (11,01)=1, (11,11)=1, (11,10)=1; (10,00)=0, (10,01)=1, (10,11)=1, (10,10)=0. A dashed box labeled 1 encloses the first column (zp=00). A dashed box labeled 2 encloses the cells (01,01), (11,01), (10,01), (01,11), (11,11), and (10,11).

$$f = p + yz$$

K mape sa f-je sa dvije promjenljive

- Za Boole-ovu funkciju sa dvije promjenljive definišu se četiri minterma – K mapa se sastoji od četiri polja:

X \ Y	0	1
0	$\bar{X}\bar{Y}$	$\bar{X}Y$
1	$X\bar{Y}$	XY

m_0	m_1
m_2	m_3

Funkcija XY

X \ Y	0	1
0		
1		1

Funkcija $F(X, Y) = \sum m(1,2) = \bar{X}Y + X\bar{Y}$

X \ Y	0	1
0		1
1	1	

- *Primjer:* Odrediti minimalni oblik logičke funkcije zadate izrazom:

$$F(X, Y) = \sum m(1,2,3) = m_1 + m_2 + m_3$$

Rješenje: Minimalni oblik funkcije možemo odrediti na tri načina:

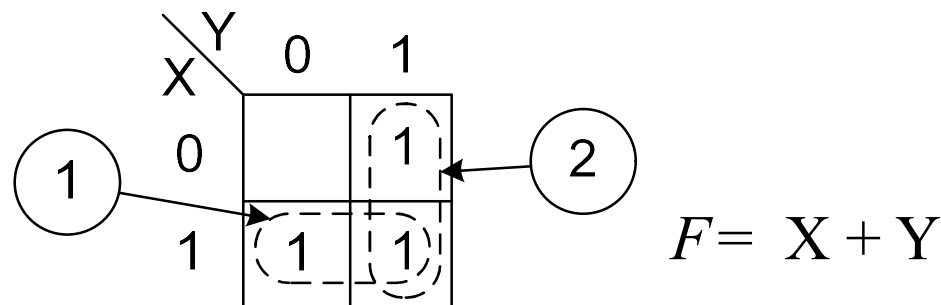
1. **Algebarski:**

$$\begin{aligned} F &= \bar{X} \cdot Y + X \cdot \bar{Y} + X \cdot Y = \bar{X} \cdot Y + X \cdot (\bar{Y} + Y) = \bar{X} \cdot Y + X = \\ &= \bar{X} \cdot Y + X \cdot (1 + Y) = \bar{X} \cdot Y + X + X \cdot Y = Y \cdot (\bar{X} + X) + X = X + Y \end{aligned}$$

2. **Proizvodom potpunih logičkih zbirova (makstermova):**

$$F = \prod M(0) = X + Y$$

3. **Upotrebom K mape:**



K mape za f-je sa tri promjenljive

- U slučaju logičke funkcije sa tri promjenljive postoji osam mintermova - osam polja

X \ YZ	YZ			
	00	01	11	10
0	m ₀	m ₁	m ₃	m ₂
1	m ₄	m ₅	m ₇	m ₆

- Posmatrajmo logički zbir četiri minterma koji se nalaze u sušednim poljima K mape:

$$\begin{aligned} m_1 + m_3 + m_5 + m_7 &= (\bar{X} \bar{Y} Z + \bar{X} Y Z) + (X \bar{Y} Z + X Y Z) = \\ &= \bar{X} Z(\bar{Y} + Y) + X Z(\bar{Y} + Y) = \bar{X} Z + X Z = Z \end{aligned}$$

K mape za f-je sa četiri promjenljive

■ Četiri promjenljive – šesnaest mintermova

■ *Primjer:* Odrediti minimalnu formu funkcije:

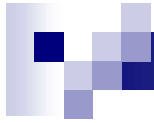
$$f(D, C, B, A) = CBA + D\bar{C}\bar{B} + CB\bar{A}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} f(D, C, B, A) &= (D + \bar{D})CBA + D\bar{C}\bar{B}(A + \bar{A}) + (D + \bar{D})CB\bar{A} = \\ &= m_{15} + m_7 + m_9 + m_8 + m_{14} + m_6 = \sum m(6,7,8,9,14,15) \end{aligned}$$

DC \ BA		BA			
		00	01	11	10
00	00	0	1	3	2
01	01	4	5	7 (1)	6 (1)
11	11	12	13	15 (1)	14 (1)
10	10	8 (1)	9 (1)	11	10

Diagram illustrating the Karnaugh map for the function $f(D, C, B, A)$. The map is a 4x4 grid with rows labeled DC and columns labeled BA. The cells are numbered 0 to 15. The function is represented by 1s in the following cells: 6, 7, 8, 9, 14, and 15. The map shows two groups of 1s circled: Group 1 (labeled 1) covers cells 8, 9, 12, and 13; Group 2 (labeled 2) covers cells 6, 7, 14, and 15.



		BA			
		00	01	11	10
DC	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

Diagram illustrating a 4x4 Karnaugh map for variables D, C, B, and A. The map shows the following values in the cells:

- Row 00: 0, 1, 3, 2
- Row 01: 4, 5, 7, 6
- Row 11: 12, 13, 15, 14
- Row 10: 8, 9, 11, 10

Groupings are indicated by dashed lines and circles:

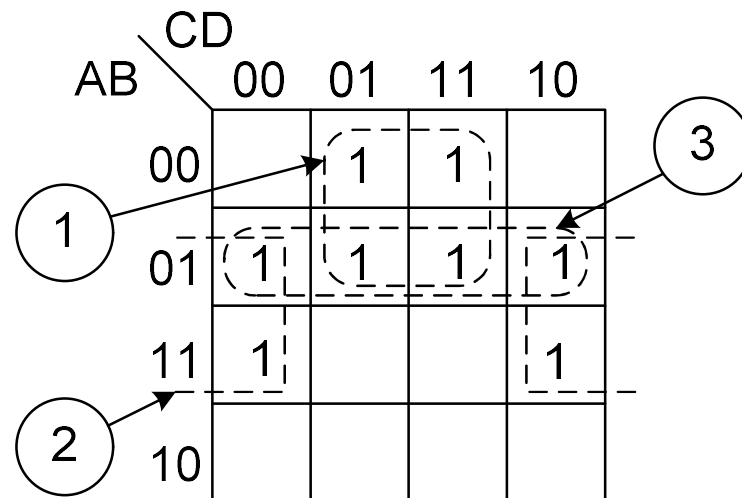
- Group 1 (Circle 1): A group of four cells (8, 9, 11, 10) in the bottom row (DC=10), marked with a dashed line and a circle labeled 1.
- Group 2 (Circle 2): A group of four cells (6, 7, 14, 15) in the rightmost column (BA=10), marked with a dashed line and a circle labeled 2.

$$m_{8,9} = D\bar{C}\bar{B}\bar{A} + D\bar{C}\bar{B}A = D\bar{C}\bar{B}(\bar{A} + A) = D\bar{C}\bar{B}$$

$$\begin{aligned} m_{6,7,14,15} &= \bar{D}C\bar{B}\bar{A} + \bar{D}CBA + DC\bar{B}\bar{A} + DCBA = \bar{D}CB(\bar{A} + A) + DCB(\bar{A} + A) = \\ &= \bar{D}CB + DCB = CB(\bar{D} + D) = CB \end{aligned}$$

$$f(D, C, B, A) = D\bar{C}\bar{B} + CB$$

Primjer:



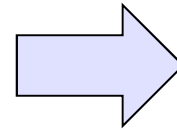
$$F = \bar{A}D + B\bar{D}$$

Napomena: Skupovi 1 i 2 su **bitni**, jer se mintermovi m_1 i m_3 obuhvataju samo skupom 1 zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $\bar{A}D$, odnosno mintermovi m_{12} i m_{14} obuhvataju se samo skupom 2 zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $B\bar{D}$

Skup 3 je **nebitan** (svi njegovi mintermovi obuhvaćeni su skupovima 1 i 2)

■ *Primjer.*

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	1			
01		1		
11	1	1	1	
10			1	1



AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	1			
01		1		
11	1	1	1	
10			1	1

bitni skupovi

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	1			
01		1		
11	1	1	1	
10			1	1

nebitni skupovi

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{B}\bar{C}D + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \begin{cases} ACD \\ ili \\ ABD \end{cases}$$

- *Primjer:* Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D) = \sum m(0,1,2,5,8,9,10)$$

i zapisati je u obliku **proizvoda logičkih zbirova**.

Rješenje:

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
00	1	1	0	1	2
01	0	1	0	0	
11	0	0	0	0	1
10	1	1	0	1	3

$$F = (\bar{A} + \bar{B}) \cdot (\bar{C} + \bar{D}) \cdot (\bar{B} + D)$$

I način:

1. Pronalaženjem minimalne forme oblika zbira logičkih proizvoda, ali za funkciju **com(F)**,
2. Primjenom De Morganove T, nakon čega direktno slijedi zahtijevana minimalna forma funkcije F oblika proizvoda logičkih zbirova.

II način:

Direktnim prekrivanjem logičkih 0-a u K mapi (u ekvivalentnim izrazima oblika logičkog zbira, promjenljive koje ne mijenjaju vrijednost 0 uzimaju originalnu vrijednost, a one koje ne mijenjaju vrijednost 1 – komplementiranu).

- *Primjer:* Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D) = (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (B + C + D) \cdot (B + \bar{C} + D)$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} F &= (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (B + C + D) \cdot (B + \bar{C} + D) = (\bar{A} + \bar{B} + C + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D}) \cdot \\ &\cdot (A + B + C + D) \cdot (\bar{A} + B + C + D) \cdot (A + B + \bar{C} + D) \cdot (\bar{A} + B + \bar{C} + D) = \\ &= \prod M(0, 2, 8, 10, 12, 13). \end{aligned}$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0			0
	01				
	11	0	0		
	10	0			0

Diagram showing a 4x4 Karnaugh map for variables A, B, C, D. The map is labeled with AB on the vertical axis and CD on the horizontal axis. The cells are labeled with 0 or 1. The cells containing 0 are (00,00), (00,10), (11,00), (11,01), (10,00), and (10,10). The cells containing 1 are (11,01) and (11,11). A circle labeled '2' is drawn around the cells (11,00) and (11,01). A circle labeled '1' is drawn around the cells (11,01) and (11,11).

$$F(A, B, C, D) = (B + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C)$$

- *Primjer:* Pronađi minimalnu formu **nekompletno definisane** funkcije F, sa tri "bilo što" uslova:

$$F(A, B, C, D) = \sum m(1, 3, 7, 11, 15) + \times (0, 2, 5).$$

Rješenje:

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	(X)	1	(1)	(X)
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	(1)	0

Diagram showing Karnaugh map for function F. The map is a 4x4 grid with rows labeled AB (00, 01, 11, 10) and columns labeled CD (00, 01, 11, 10). The values are: (00,00)=X, (00,01)=1, (00,11)=1, (00,10)=X, (01,00)=0, (01,01)=X, (01,11)=1, (01,10)=0, (11,00)=0, (11,01)=0, (11,11)=1, (11,10)=0, (10,00)=0, (10,01)=0, (10,11)=1, (10,10)=0. Dashed boxes group (00,00), (00,01), (00,11), (00,10) and (00,01), (01,01), (11,01), (10,01). Arrows point from circles 1 and 2 to these groups.

$$F = \bar{A}\bar{B} + CD$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	(1)	(1)	X
	01	0	X	(1)	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	(1)	0

Diagram showing Karnaugh map for function F. The map is a 4x4 grid with rows labeled AB (00, 01, 11, 10) and columns labeled CD (00, 01, 11, 10). The values are: (00,00)=X, (00,01)=1, (00,11)=1, (00,10)=X, (01,00)=0, (01,01)=X, (01,11)=1, (01,10)=0, (11,00)=0, (11,01)=0, (11,11)=1, (11,10)=0, (10,00)=0, (10,01)=0, (10,11)=1, (10,10)=0. Dashed boxes group (00,01), (00,11), (01,11), (10,11) and (00,01), (01,01), (11,01), (10,01). Arrows point from circles 1 and 2 to these groups.

$$F = \bar{A}D + CD$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	(X)	1	1	(X)
	01	0	X	1	0
	11	(0)	(0)	1	0
	10	(0)	(0)	1	(0)

Diagram showing Karnaugh map for function F. The map is a 4x4 grid with rows labeled AB (00, 01, 11, 10) and columns labeled CD (00, 01, 11, 10). The values are: (00,00)=X, (00,01)=1, (00,11)=1, (00,10)=X, (01,00)=0, (01,01)=X, (01,11)=1, (01,10)=0, (11,00)=0, (11,01)=0, (11,11)=1, (11,10)=0, (10,00)=0, (10,01)=0, (10,11)=1, (10,10)=0. Dashed boxes group (00,00), (00,01), (00,11), (00,10) and (00,01), (01,01), (11,01), (10,01). Arrows point from circles 1 and 2 to these groups.

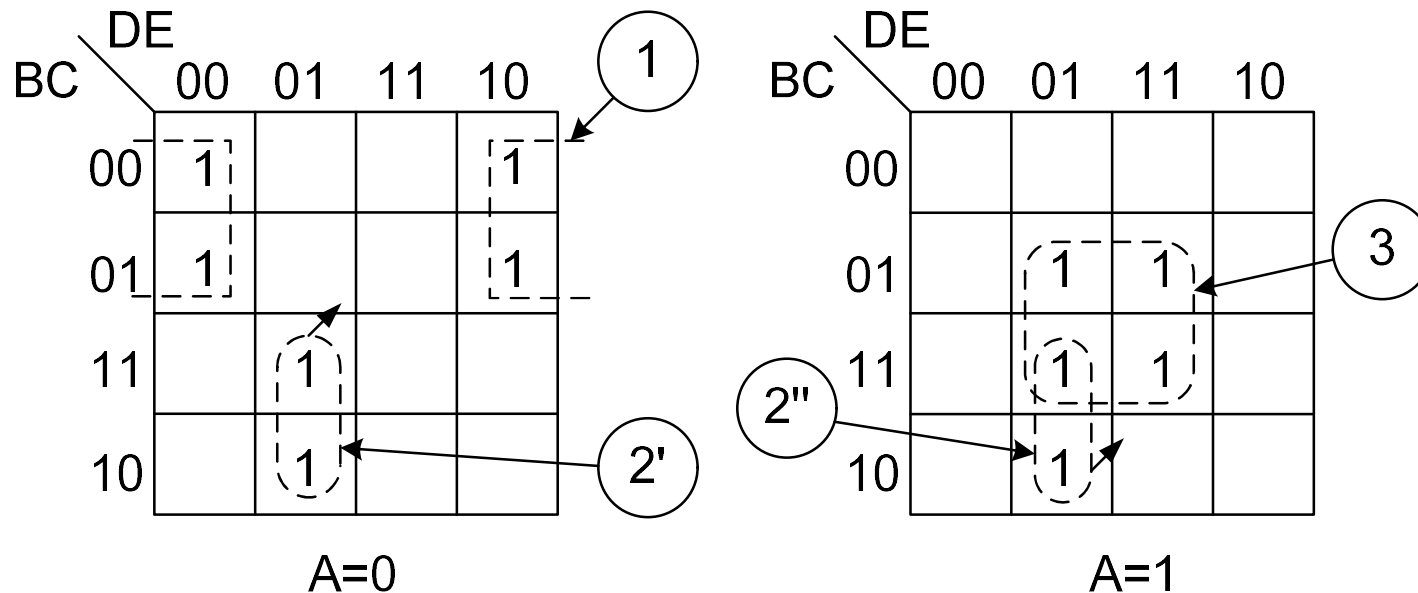
$$F = D \cdot (\bar{A} + C)$$

K mape za f-je sa pet promjenljivih

- *Primjer:* Pronaći uprošćeni oblik funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D, E) = \sum m(0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31)$$

Rješenje:



$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{E} + B\bar{D}\bar{E} + ACE$$



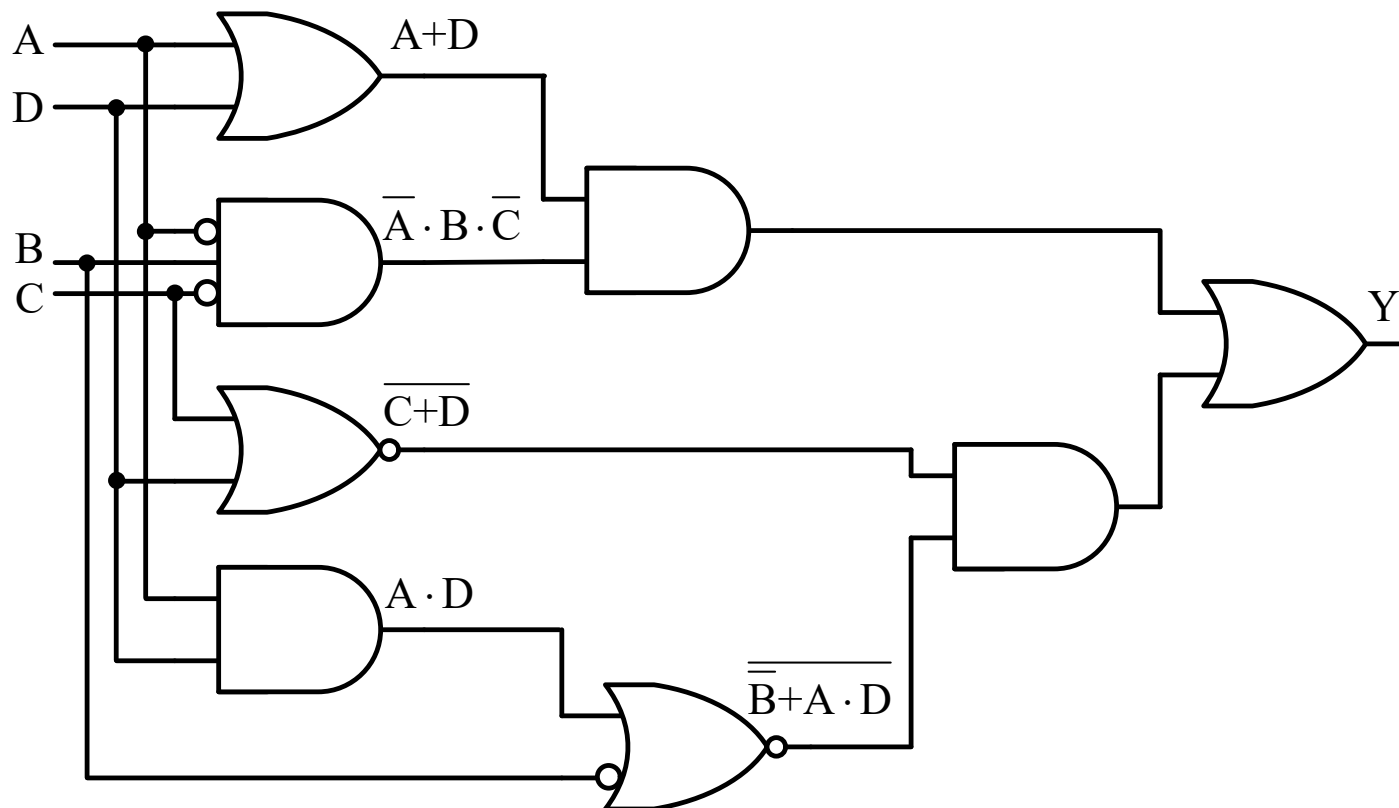
Osnovi računarstva I

Prekidačke mreže

- Posmatrajmo složenu prekidačku f-ju:

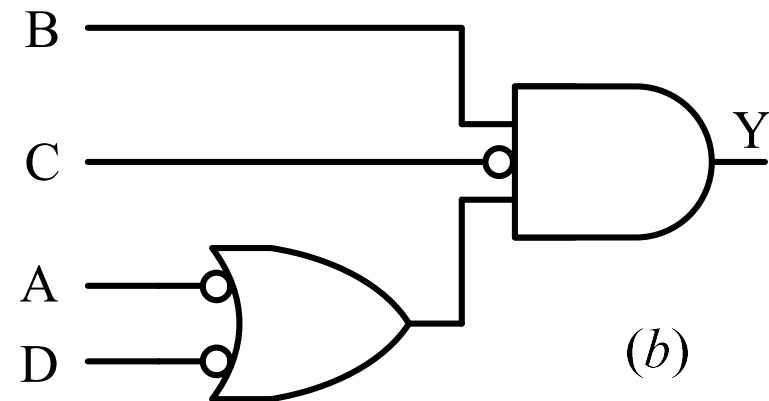
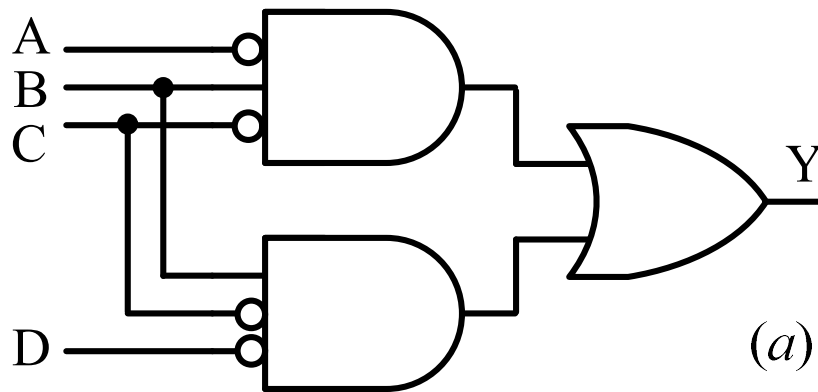
$$Y = (A + D) \cdot \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \overline{C + D} \cdot \bar{B} + A \cdot D$$

- Logička šema prekidačke mreže može se dobiti **direktnim preslikavanjem** posmatrane f-je u odgovarajući dijagram elementarnih logičkih kola:



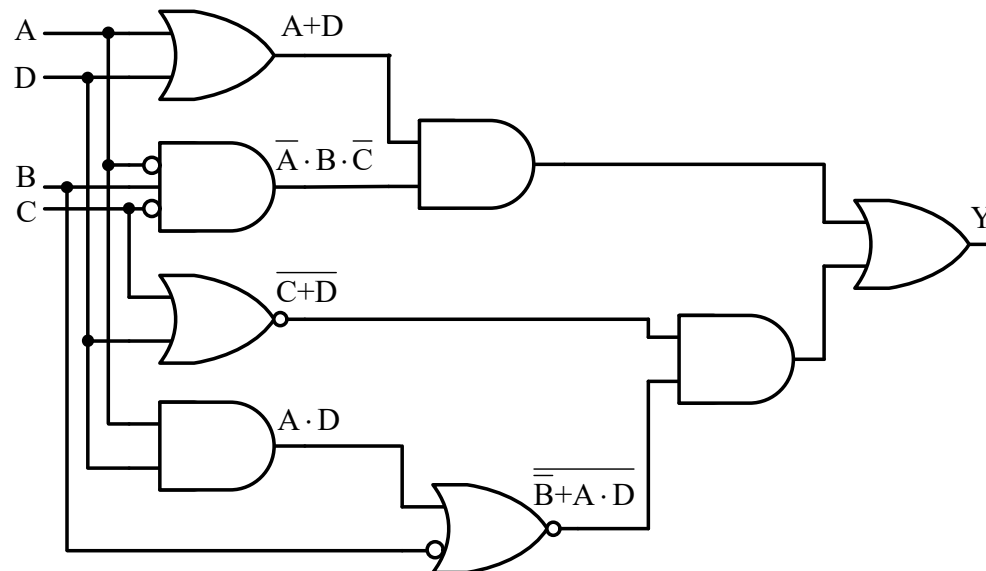
- Veoma često, izlaz Y iste logičke vrijednosti može se realizovati pomoću jednostavnije mreže logičkih kola (realizacijom ekvivalentne prekidačke f-je dobijene minimizacijom, algebarski ili pomoću K mapa):

$$Y = \bar{A}B\bar{C} + B\bar{C}\bar{D} = B\bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{D})$$

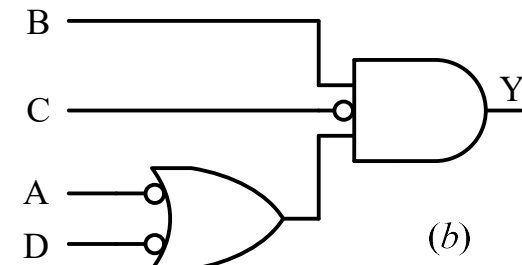
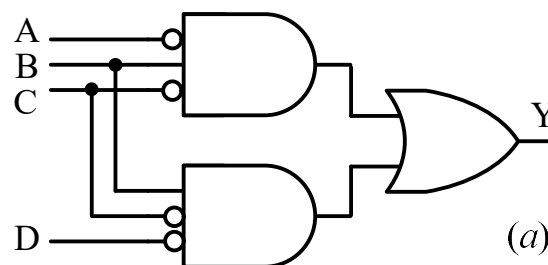


- Prekidačke mreže za implementaciju funkcije ne razlikuju se samo u pogledu broja i tipa upotrijebljenih logičkih elemenata, već i po broju nivoa (stepeni) u strukturi mreže
- Stepen prekidačke mreže određen je najvećim br. redno vezanih log. kola kroz koja neki od ulaznih signala treba da prođe do izlaza mreže

- 4–stepena mreža:



- 2–stepene mreže:





REALIZACIJA NORMALNIH FORMI PREKIDAČKIH FUNKCIJA UPOTREBOM LOGIČKIH NI I NILI KOLA

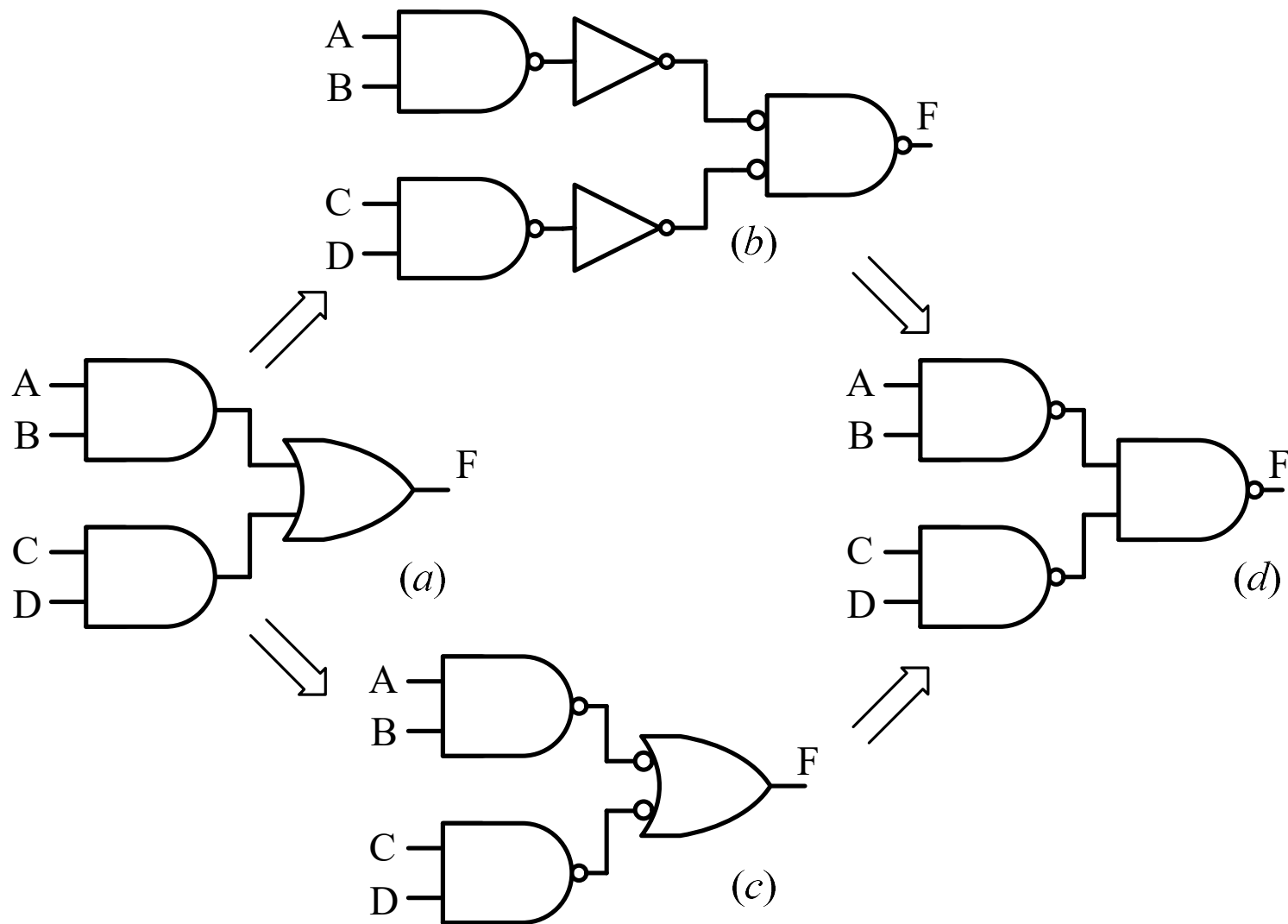
- U slučaju logičke funkcije oblika zbira logičkih proizvoda, implementacija **dvostepene** prekidačke mreže može se izvršiti **upotrebom isključivo logičkih NI kola**:

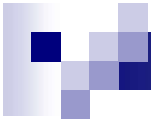
$$F = A \cdot B + C \cdot D = \overline{\overline{A \cdot B}} + \overline{\overline{C \cdot D}} = \overline{\overline{A \cdot B} \cdot \overline{\overline{C \cdot D}}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}}$$

- Analogno tome, funkcije oblika proizvoda logičkih zbirova mogu se implementirati **dvostepenom** prekidačkom mrežom, **koristeći isključivo logička NILI kola**:

$$F = (A + B) \cdot (C + D) = \overline{\overline{A + B}} \cdot \overline{\overline{C + D}} = \overline{\overline{A + B} + \overline{\overline{C + D}}} = \overline{\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}}$$

$$F = A \cdot B + C \cdot D$$





$$F = (A + B) \cdot (C + D)$$

