

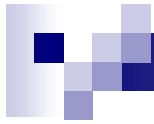


Osnovi računarstva I

Minimizacija prekidačkih funkcija

- Određivanje najjednostavnijeg mogućeg izraza koji odgovara nekoj Bulovoj funkciji naziva se *minimizacijom*
- Minimizaciju funkcije sa malim brojem promjenljivih pogodno je izvršiti preko **Karnoovih mapa**
- Karnoova mapa za funkciju sa n promjenljivih sastoji se od 2^n kvadratnih polja koja predstavljaju elementarne površine
- Svako elementarnoj površini (polju) odgovara jedan **potpuni logički proizvod** (minterm), odnosno **potpuni logički zbir** (maksterm), tj. jedan indeks
- Za funkciju 4 promjenljive:
 - Svaka promjenljiva ima svoj značaj
 - X_1 najveći, X_4 najmanji

		X_3X_4			
		00	01	11	10
X_1X_2	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10



- Potrebno je sve jedinice (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku proizvoda zbirova), odnosno nule (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku proizvoda zbirova), u mapi pokriti površinama koje obuhvataju tzv. susjedna polja
- Susjedna polja su ona polja čiji se mintermovi, odnosno makstermovi, razlikuju u jednom bitu
- Prilikom izbora površina kojima će se pokriti polja na kojima se nalaze jedinice (odnosno nule) mora se voditi računa o nekoliko prostih pravila:
 - zaokružuju se susjedna polja što je moguće većom površinom pri čemu broj pokrivenih polja mora biti jednak 2^n , gdje $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$;
 - broj površina mora biti što je moguće manji;
 - preporučuje se da se zaokruživanje **započne** od onih jedinica (odnosno nula) koje mogu da se zaokruže samo na jedan način!

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f:

		zp			
		00	01	11	10
xy	00	0	0	0	0
	01	1	1	0	0
	11	0	0	1	1
	10	0	0	1	1

Diagram showing groupings in the Karnaugh map: Group 1 (circled 1) points to the cell (01, 00) and (01, 01). Group 2 (circled 2) points to the cells (11, 11) and (10, 11).

- U obliku zbira potpunih proizvoda:

$$f = \bar{x} y \bar{z} \bar{p} + \bar{x} y \bar{z} p + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p}$$

- Grupisanjem prva dva minterma:

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} y \bar{z} (\bar{p} + p) + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p} = \\ &= \bar{x} y \bar{z} + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p} \end{aligned}$$

- Grupisanjem poslednja četiri minterma:

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} y \bar{z} + x z (y p + y \bar{p} + \bar{y} p + \bar{y} \bar{p}) = \bar{x} y \bar{z} + x z (y(p + \bar{p}) + \bar{y}(p + \bar{p})) = \\ &= \bar{x} y \bar{z} + x z (y + \bar{y}) = \bar{x} y \bar{z} + x z \end{aligned}$$

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f:

xy \ zp		zp			
		00	01	11	10
xy	00	1	0	0	0
	01	1	0	1	0
	11	1	0	1	0
	10	1	0	0	0

Diagram showing a Karnaugh map for function f. The map is a 4x4 grid with rows labeled xy (00, 01, 11, 10) and columns labeled zp (00, 01, 11, 10). The values in the cells are: (00,00)=1, (00,01)=0, (00,11)=0, (00,10)=0; (01,00)=1, (01,01)=0, (01,11)=1, (01,10)=0; (11,00)=1, (11,01)=0, (11,11)=1, (11,10)=0; (10,00)=1, (10,01)=0, (10,11)=0, (10,10)=0. Two groups are identified: Group 1 (circled 1) covers the first column (zp=00) and Group 2 (circled 2) covers the third column (zp=11).

$$f = \bar{z} \cdot \bar{p} + y \cdot z \cdot p$$

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f:

xy \ zp		zp			
		00	01	11	10
xy	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	1
	11	0	1	1	1
	10	0	1	1	0

Diagram showing a Karnaugh map for function f. The map is a 4x4 grid with rows labeled xy (00, 01, 11, 10) and columns labeled zp (00, 01, 11, 10). The values in the cells are: (00,00)=0, (00,01)=1, (00,11)=1, (00,10)=0; (01,00)=0, (01,01)=1, (01,11)=1, (01,10)=1; (11,00)=0, (11,01)=1, (11,11)=1, (11,10)=1; (10,00)=0, (10,01)=1, (10,11)=1, (10,10)=0. Two groups are identified: Group 1 (circled 1) covers the second column (zp=01) and Group 2 (circled 2) covers the third and fourth columns (zp=11 and zp=10).

$$f = p + yz$$

■ Karnoove mape sa dvije promjenljive

- Za Bulovu funkciju sa dvije promjenljive definišu se četiri minterma - mapa se sastoji od četiri polja:

X \ Y	0	1
0	$\bar{X}\bar{Y}$	$\bar{X}Y$
1	$X\bar{Y}$	XY

m_0	m_1
m_2	m_3

Funkcija XY

X \ Y	0	1
0		
1		1

Funkcija $F(X, Y) = \sum m(1,2) = \bar{X}Y + X\bar{Y}$

X \ Y	0	1
0		1
1	1	

- *Primjer:* Odrediti minimalni oblik logičke funkcije zadate izrazom:

$$F(X, Y) = \sum m(1,2,3) = m_1 + m_2 + m_3$$

- *Rješenje:* Minimalni oblik funkcije možemo odrediti na tri načina:

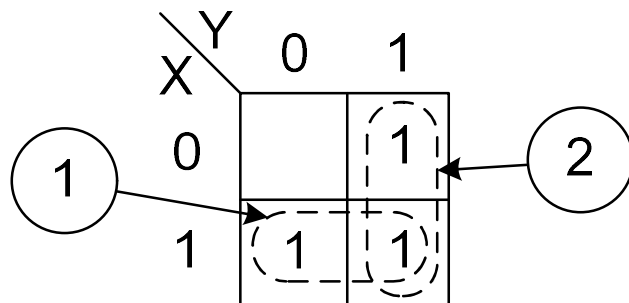
1. **Algebarski:**

$$\begin{aligned} F &= \bar{X} \cdot Y + X \cdot \bar{Y} + X \cdot Y = \bar{X} \cdot Y + X \cdot (\bar{Y} + Y) = \bar{X} \cdot Y + X = \\ &= \bar{X} \cdot Y + X \cdot (1 + Y) = \bar{X} \cdot Y + X + X \cdot Y = Y \cdot (\bar{X} + X) + X = X + Y. \end{aligned}$$

2. **Proizvodom potpunih logičkih zbirova** (makstermova):

$$F = \prod M(0) = X + Y.$$

3. **Upotrebom Karnoove mape:**



$$F = X + Y$$

■ Karnoove mape sa tri promjenljive

- U slučaju logičke funkcije sa tri promjenljive postoji osam mintermova - osam polja

		YZ			
		00	01	11	10
X	0	m ₀	m ₁	m ₃	m ₂
	1	m ₄	m ₅	m ₇	m ₆

- Posmatrajmo logički zbir četiri minterma koji se nalaze u susjednim poljima Karnoove mape:

$$\begin{aligned} m_1 + m_3 + m_5 + m_7 &= (\bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}YZ) + (X\bar{Y}Z + XYZ) = \\ &= \bar{X}Z(\bar{Y} + Y) + XZ(\bar{Y} + Y) = \bar{X}Z + XZ = Z \end{aligned}$$

■ Karnoove mape sa četiri promjenljive

■ Četiri promjenljive - šesnaest mintermova

■ *Primjer*: Odrediti minimalnu formu funkcije:

$$f(D, C, B, A) = CBA + D\bar{C}\bar{B} + CB\bar{A}.$$

■ *Rješenje*:

$$\begin{aligned} f(D, C, B, A) &= (D + \bar{D})CBA + D\bar{C}\bar{B}(A + \bar{A}) + (D + \bar{D})CB\bar{A} = \\ &= m_{15} + m_7 + m_9 + m_8 + m_{14} + m_6 = \sum m(6, 7, 8, 9, 14, 15). \end{aligned}$$

		BA			
		00	01	11	10
DC	00	0	1	3	2
	01	4	5	7 (1)	6 (1)
	11	12	13	15 (1)	14 (1)
	10	8 (1)	9 (1)	11	10

Diagram showing a 4x4 Karnaugh map for variables D, C, B, A. The map is labeled with DC on the vertical axis and BA on the horizontal axis. The cells are numbered 0 to 15. The function f(D, C, B, A) is represented by the sum of minterms m(6, 7, 8, 9, 14, 15). The map shows the following groupings:

- Group 1 (circled 1): A 2x2 square covering cells 8, 9, 12, and 13.
- Group 2 (circled 2): A 2x2 square covering cells 6, 7, 14, and 15.

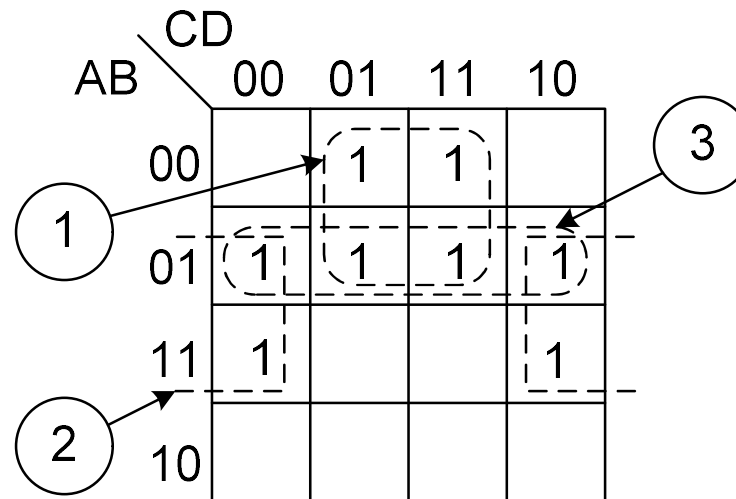
	DC \ BA	00	01	11	10
00		0	1	3	2
01		4	5	7	6
11		12	13	15	14
10		8	9	11	10

$$m_{8,9} = D\bar{C}\bar{B}\bar{A} + D\bar{C}\bar{B}A = D\bar{C}\bar{B}(\bar{A} + A) = D\bar{C}\bar{B}$$

$$\begin{aligned} m_{6,7,14,15} &= \bar{D}CB\bar{A} + \bar{D}CBA + DCB\bar{A} + DCBA = \bar{D}CB(\bar{A} + A) + DCB(\bar{A} + A) = \\ &= \bar{D}CB + DCB = CB(\bar{D} + D) = CB \end{aligned}$$

$$f(D, C, B, A) = D\bar{C}\bar{B} + CB.$$

Primjer:



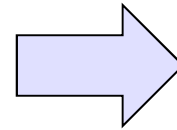
$$F = \bar{A}D + B\bar{D}$$

Skupovi 1 i 2 su **bitni**, jer se mintermovi m_1 i m_3 obuhvataju samo sa skupom zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $\bar{A}D$, odnosno mintermovi m_{12} i m_{14} se obuhvataju samo sa skupom zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $B\bar{D}$

Skup 3 je **nebitan** jer su svi njegovi mintermovi obuhvaćeni sa prva dva skupa

■ *Primjer:*

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1			
	01		1		
	11	1	1	1	
	10			1	1



		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1			
	01		1		
	11	1	1	1	
	10			1	1

bitni skupovi

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1			
	01		1		
	11	1	1	1	
	10			1	1

nebitni skupovi

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + B\bar{C}D + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \begin{cases} ACD \\ ili \\ ABD \end{cases}$$

- *Primjer:* Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D) = \sum m(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$$

u obliku **proizvoda logičkih zbirova**

- *Rješenje:*

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	1
	01	0	1	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	1	0	1

Diagram illustrating the Karnaugh map for the function $F(A, B, C, D) = \sum m(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$. The map shows the values of the function for all combinations of A, B, C, and D. The variables A and B are labeled on the vertical axis, and C and D are labeled on the horizontal axis. The map is divided into four groups of cells, each labeled with a circled number (1, 2, 3, and 4) and an arrow pointing to the group. Group 1 (circled 1) is the bottom row (AB=11). Group 2 (circled 2) is the top row (AB=00). Group 3 (circled 3) is the bottom row (AB=10). Group 4 (circled 4) is the rightmost column (CD=10).

$$F = (\bar{A} + \bar{B}) \cdot (\bar{C} + \bar{D}) \cdot (\bar{B} + D).$$

- *Primjer:* Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D) = (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (B + C + D) \cdot (B + \bar{C} + D)$$

- *Rješenje:*

$$\begin{aligned} F &= (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (B + C + D) \cdot (B + \bar{C} + D) = (\bar{A} + \bar{B} + C + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D}) \cdot \\ &\quad \cdot (\bar{A} + B + C + D) \cdot (A + B + C + D) \cdot (\bar{A} + B + \bar{C} + D) \cdot (A + B + \bar{C} + D) = \\ &= \prod M(0, 2, 8, 10, 12, 13). \end{aligned}$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0			0
	01				
	11	0	0		
	10	0			0

$$F(A, B, C, D) = (B + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C)$$

- *Primjer.* Pronaći minimalnu formu nekompletno definisane funkcije F, sa tri "bilo što" uslova:

$$F(A, B, C, D) = \sum m(1, 3, 7, 11, 15) + \times (0, 2, 5).$$

- *Rješenje:*

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing two groupings: Group 1 (circled 1) covers cells (00,00), (01,00), (11,00), and (10,00). Group 2 (circled 2) covers cells (01,00), (11,00), (01,01), (11,01), (01,11), (11,11), (01,10), and (11,10).

$$F = \bar{A}\bar{B} + CD$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing two groupings: Group 1 (circled 1) covers cells (00,00), (01,00), (11,00), and (10,00). Group 2 (circled 2) covers cells (01,00), (11,00), (01,01), (11,01), (01,11), (11,11), (01,10), and (11,10).

$$F = \bar{A}D + CD$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing two groupings: Group 1 (circled 1) covers cells (00,00), (01,00), (11,00), and (10,00). Group 2 (circled 2) covers cells (01,00), (11,00), (01,01), (11,01), (01,11), (11,11), (01,10), and (11,10).

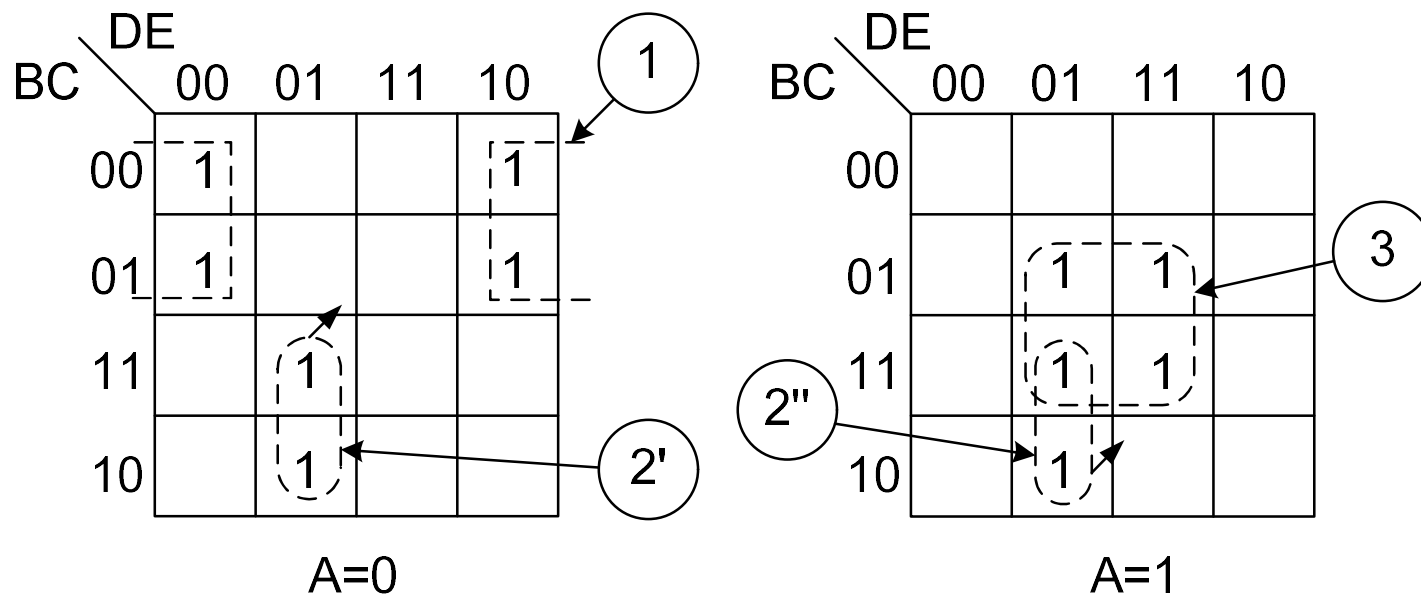
$$F = D \cdot (\bar{A} + C)$$

■ Karnoove mape sa pet promjenljivih

- *Primjer.* Pronaći uprošćeni oblik funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D, E) = \sum m(0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31).$$

- *Rješenje:*



$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{E} + B\bar{D}E + ACE$$



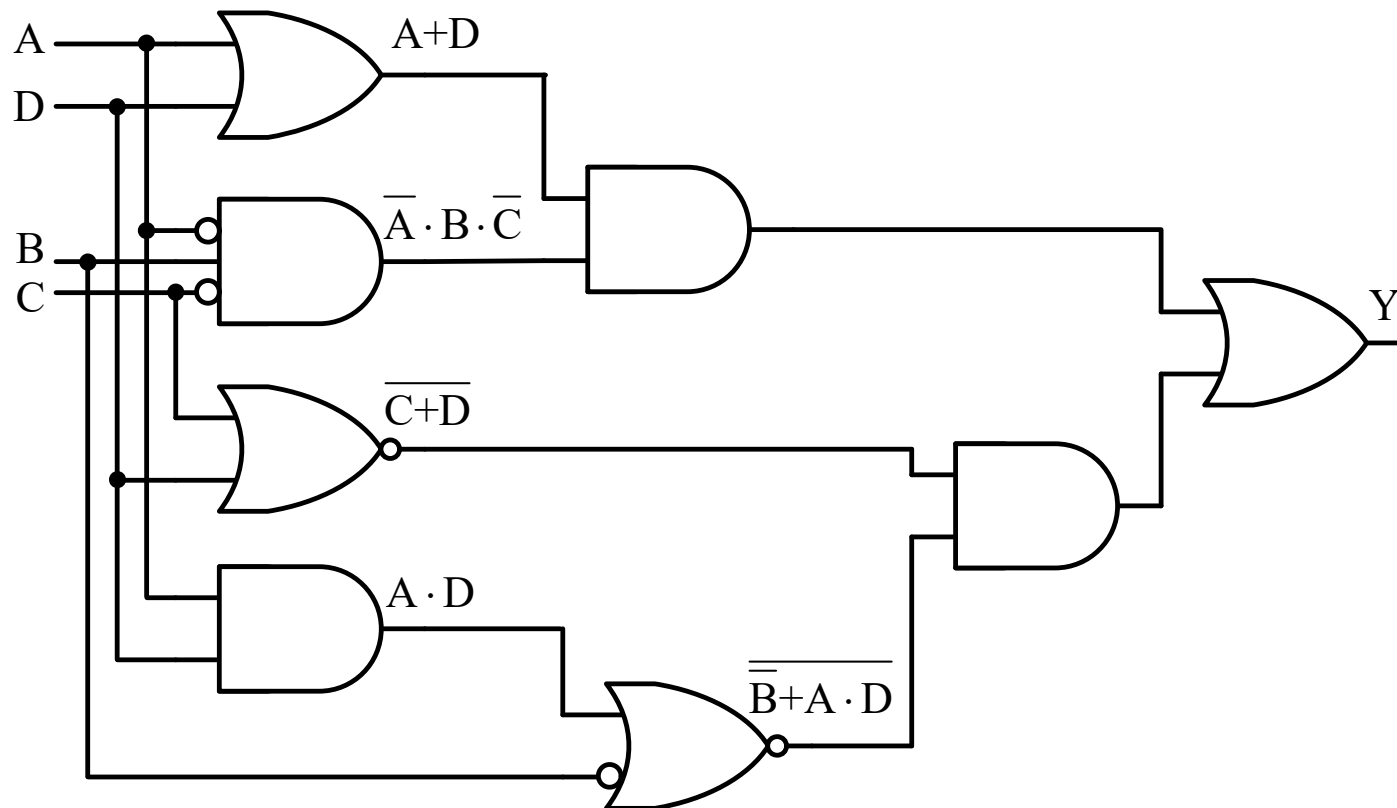
Osnovi računarstva I

Prekidačke mreže

- Posmatrajmo sljedeću složenu prekidačku funkciju:

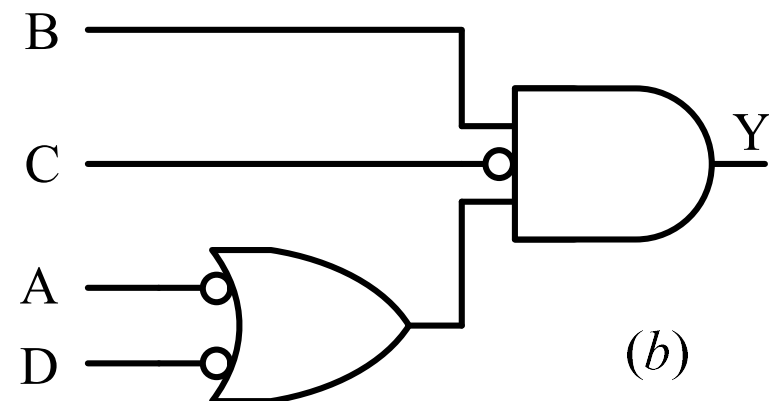
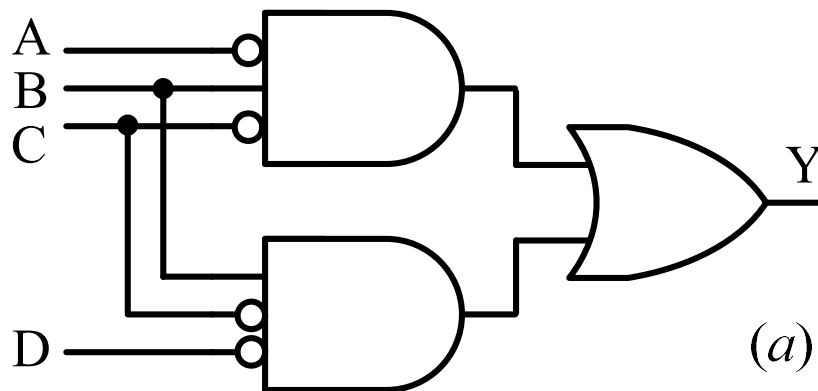
$$Y = (A + D) \cdot \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \overline{C + D} \cdot \bar{\bar{B}} + A \cdot D$$

- Logička šema prekidačke mreže može se dobiti **direktnim preslikavanjem** prekidačke funkcije u odgovarajući dijagram elementarnih logičkih kola:



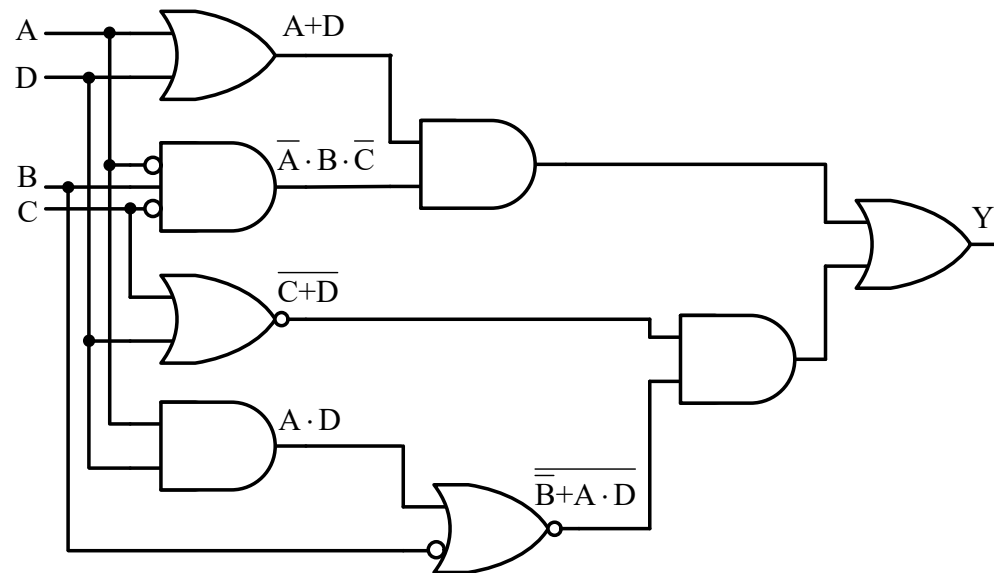
- Izlaz Y iste logičke vrijednosti veoma često se može realizovati pomoću jednostavnije mreže logičkih kola (minimizacija algebarski ili pomoću Karnoovih mapa):

$$Y = \bar{A}B\bar{C} + B\bar{C}\bar{D} = B\bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{D}).$$

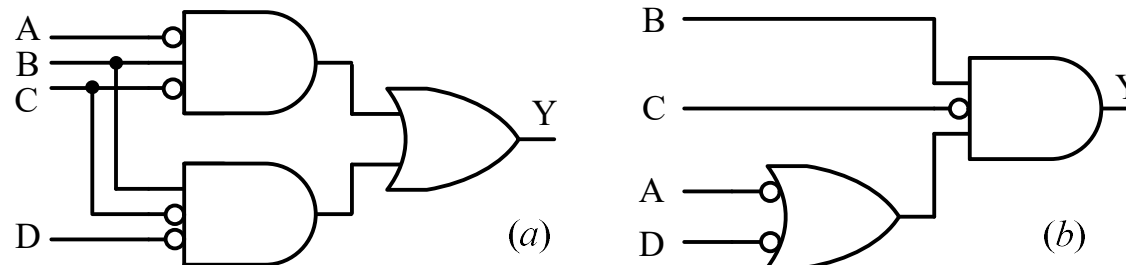


- Prekidačke mreže za implementaciju funkcije ne razlikuju se samo u pogledu broja i tipa upotrijebljenih logičkih elemenata, već i po broju nivoa (**stepeni**) u strukturi mreže
- Stepen prekidačke mreže određen je najvećim brojem redno vezanih logičkih kola kroz koja neki od ulaznih signala treba da prođe do izlaza mreže

- Četvorostepena:



- Dvostepene:



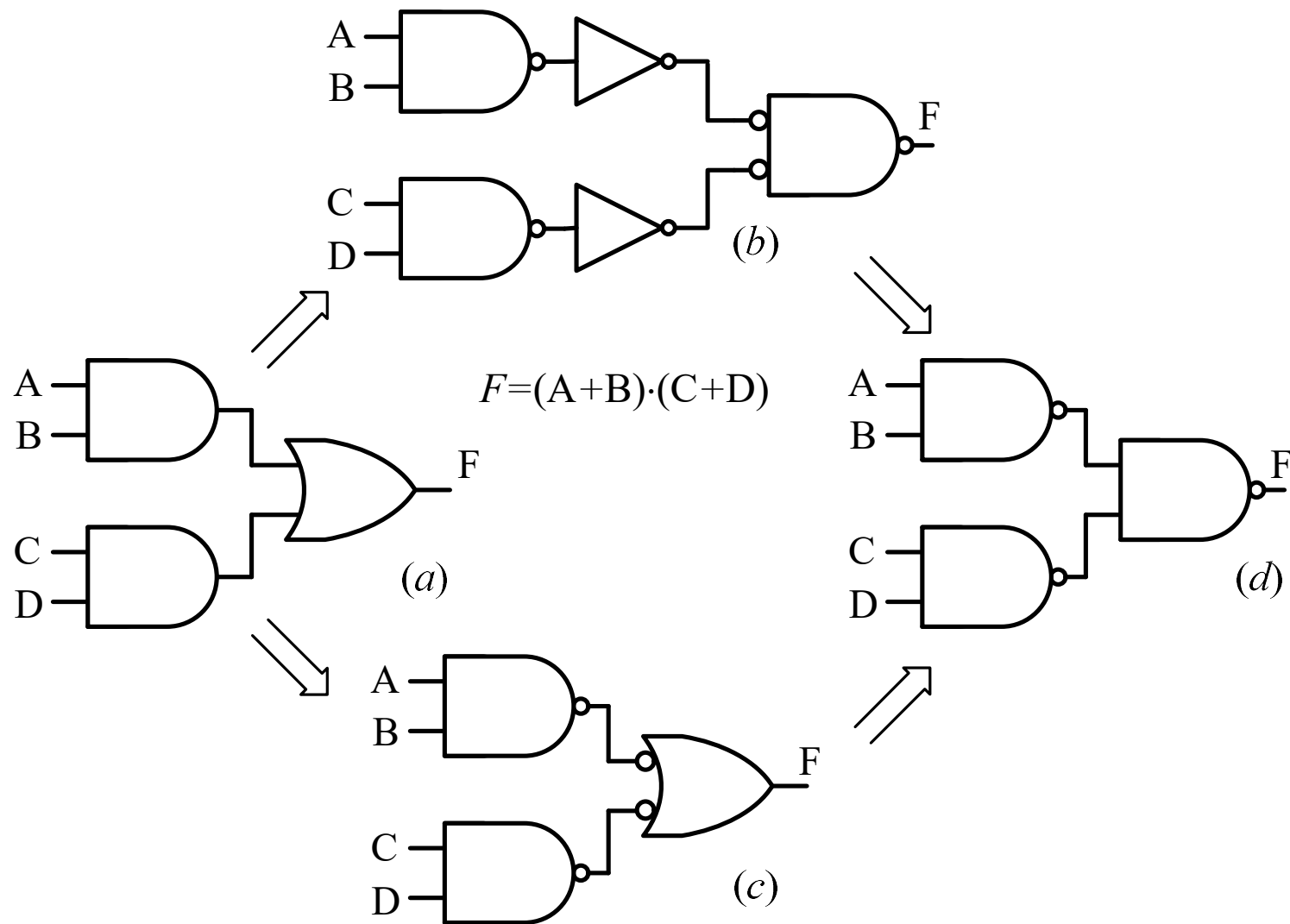
- REALIZACIJA NORMALNIH FORMI PREKIDAČKIH FUNKCIJA UPOTREBOM LOGIČKIH **NI** I **NILI** KOLA

- U slučaju logičke funkcije oblika zbira logičkih proizvoda, implementacija **dvostepene** prekidačke mreže može se izvršiti **upotrebom isključivo logičkih NI kola**:

$$F = A \cdot B + C \cdot D = \overline{\overline{A \cdot B}} + \overline{\overline{C \cdot D}} = \overline{\overline{A \cdot B} \cdot \overline{C \cdot D}}$$

- Analogno tome, funkcije oblika proizvoda logičkih zbirova mogu se implementirati **dvostepenom** prekidačkom mrežom, **koristeći isključivo logička NILI kola**.

$$F = A \cdot B + C \cdot D$$




$$F=(A+B)\cdot(C+D)$$

