Osnovi računarstva I

Minimizacija prekidačkih funkcija

- Određivanje najjednostavnijeg mogućeg izraza koji odgovara nekoj Bulovoj funkciji naziva se *minimizacijom*
- Minimizaciju funkcije sa malim brojem promjenljivih pogodno je izvršiti preko Karnoovih mapa
- Karnoova mapa za funkciju sa n promjenljivih sastoji se od 2^n kvadratnih polja koja predstavljaju elementarne površine
- Svakoj elementarnoj površini (polju) odgovara jedan potpuni logički proizvod (minterm), odnosno potpuni logički zbir (maksterm), tj. jedan indeks
- Za funkciju 4 promjenljive:
- Svaka promjenljiva ima svoj značaj
- X_1 najveći, X_4 najmanji

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	*0*	*1*	*3*	*2*
01	*4*	*5*	*7*	*6*
11	*12*	*13*	*15*	*14*
10	*8*	*9*	*11*	*10*

- Potrebno je sve jedinice (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku proizvoda zbirova), odnosno nule (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku proizvoda zbirova), u mapi pokriti površinama koje obuhvataju tzv. susjedna polja
- Susjedna polja su ona polja čiji se mintermovi, odnosno makstermovi, razlikuju u jednom bitu
- Prilikom izbora površina kojima će se pokriti polja na kojima se nalaze jedinice (odnosno nule) mora se voditi računa o nekoliko prostih pravila:
  - zaokružuju se susjedna polja što je moguće većom površinom pri čemu broj pokrivenih polja mora biti jednak 2^n, gdje $n \in \{0,1,2,\ldots\}$;
  - broj površina mora biti što je moguće manji;
  - preporučuje se da se zaokruživanje **započne** od onih jedinica (odnosno nula) koje mogu da se zaokruže samo na jedan način!

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f:

$xy \backslash zp$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

- U obliku zbira potpunih proizvoda:

$$f = \overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{p} + \overline{x}\,y\,\overline{z}\,p + x\,y\,z\,p + x\,y\,z\,\overline{p} + x\,\overline{y}\,z\,p + x\,\overline{y}\,z\,\overline{p}$$

- Grupisanjem prva dva minterma:

$$f = \overline{x}\,y\,\overline{z}(\overline{p} + p) + x\,y\,z\,p + x\,y\,z\,\overline{p} + x\,\overline{y}\,z\,p + x\,\overline{y}\,z\,\overline{p} =$$
$$= \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,y\,z\,p + x\,y\,z\,\overline{p} + x\,\overline{y}\,z\,p + x\,\overline{y}\,z\,\overline{p}$$

- Grupisanjem poslednja četiri minterma:

$$f = \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,z(y\,p + y\,\overline{p} + \overline{y}\,p + \overline{y}\,\overline{p}) = \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,z(y(p + \overline{p}) + \overline{y}(p + \overline{p})) =$$
$$= \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,z(y + \overline{y}) = \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,z$$

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f:

xy \ zp	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	1	0
11	1	0	1	0
10	1	0	0	0

$$f = \overline{z} \cdot \overline{p} + y \cdot z \cdot p$$

- Pretpostavimo da je Karnoovom mapom sa slike zadata logička funkcija f:

xy \ zp	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	0

$$f = p + yz$$

Karnoove mape sa dvije promjenljive

- Za Bulovu funkciju sa dvije promjenljive definišu se četiri minterma - mapa se sastoji od četiri polja:

X \ Y	0	1
0	$\bar{X}\,\bar{Y}$	$\bar{X}\,Y$
1	$X\,\bar{Y}$	$X\,Y$

m_0	m_1
m_2	m_3

Funkcija XY

X \ Y	0	1
0		
1		1

Funkcija $F(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \sum \mathrm{m}(1,2) = \bar{\mathrm{X}}\mathrm{Y} + \mathrm{X}\bar{\mathrm{Y}}$

X \ Y	0	1
0		1
1	1	

- *Primjer*: Odrediti minimalni oblik logičke funkcije zadate izrazom:

$$F\left(\mathrm{X},\,\mathrm{Y}\right)=\sum \mathrm{m}(1,2,3)=\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2+\mathrm{m}_3$$

- *Rješenje*: Minimalni oblik funkcije možemo odrediti na tri načina:

1. Algebarski:

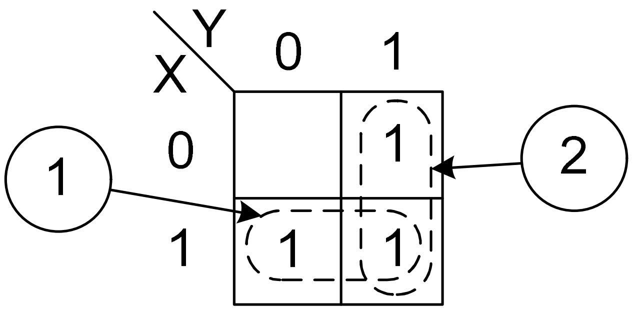
$$F=\overline{\mathrm{X}}\cdot\mathrm{Y}+\mathrm{X}\cdot\overline{\mathrm{Y}}+\mathrm{X}\cdot\mathrm{Y}=\overline{\mathrm{X}}\cdot\mathrm{Y}+\mathrm{X}\cdot\left(\overline{\mathrm{Y}}+\mathrm{Y}\right)=\overline{\mathrm{X}}\cdot\mathrm{Y}+\mathrm{X}=$$

$$=\overline{\mathrm{X}}\cdot\mathrm{Y}+\mathrm{X}\cdot(1+\mathrm{Y})=\overline{\mathrm{X}}\cdot\mathrm{Y}+\mathrm{X}+\mathrm{X}\cdot\mathrm{Y}=\mathrm{Y}\cdot\left(\overline{\mathrm{X}}+\mathrm{X}\right)+\mathrm{X}=\mathrm{X}+\mathrm{Y}.$$

2. Proizvodom potpunih logičkih zbirova (makstermova):

$$F=\prod \mathrm{M}(0)=\mathrm{X}+\mathrm{Y}.$$

3. Upotrebom Karnoove mape:



$$F=\mathrm{X}+\mathrm{Y}$$

Karnoove mape sa tri promjenljive

- U slučaju logičke funkcije sa tri promjenljive postoji osam mintermova - osam polja

X \ YZ	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

- Posmatrajmo logički zbir četiri minterma koji se nalaze u susjednim poljima Karnoove mape:

$$m_1 + m_3 + m_5 + m_7 = \left(\bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}YZ\right) + \left(X\bar{Y}Z + XYZ\right) =$$

$$= \bar{X}Z\left(\bar{Y} + Y\right) + XZ\left(\bar{Y} + Y\right) = \bar{X}Z + XZ = Z$$

■ Karnoove mape sa četiri promjenljive

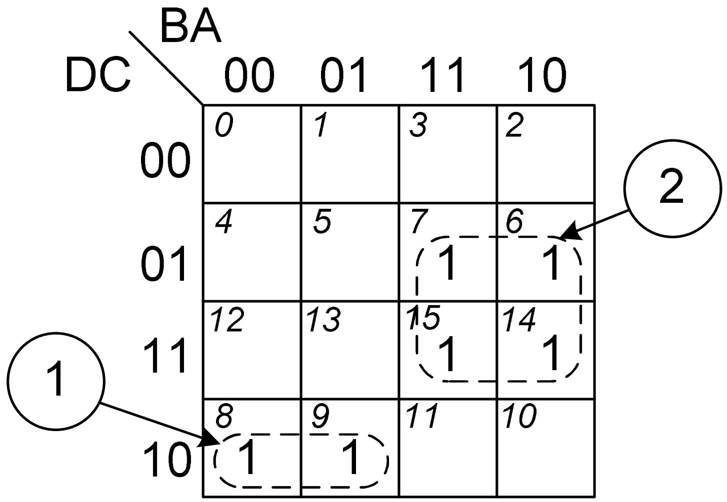
- Četiri promjenljive - šesnaest mintermova
- *Primjer*: Odrediti minimalnu formu funkcije:

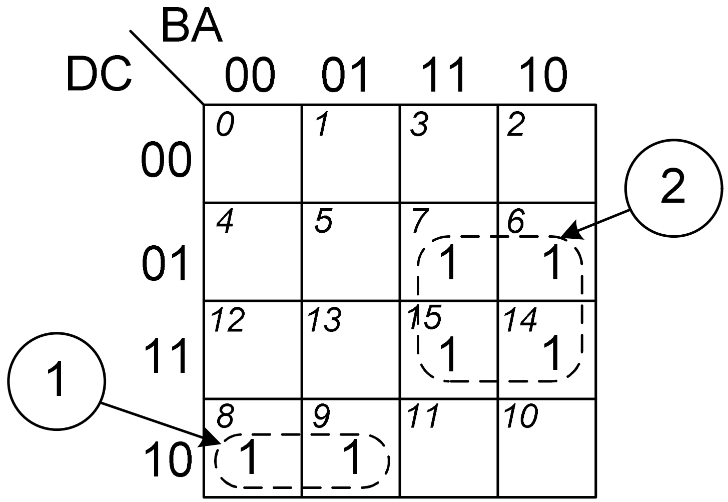
$$f(\mathrm{D},\mathrm{C},\mathrm{B},\mathrm{A}) = \mathrm{C}\,\mathrm{B}\,\mathrm{A} + \mathrm{D}\,\overline{\mathrm{C}}\,\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{C}\,\mathrm{B}\,\overline{\mathrm{A}}.$$

- *Rješenje*:

$$f(\mathrm{D},\mathrm{C},\mathrm{B},\mathrm{A}) = \left(\mathrm{D}+\overline{\mathrm{D}}\right)\mathrm{C}\,\mathrm{B}\,\mathrm{A} + \mathrm{D}\,\overline{\mathrm{C}}\,\overline{\mathrm{B}}\left(\mathrm{A}+\overline{\mathrm{A}}\right) + \left(\mathrm{D}+\overline{\mathrm{D}}\right)\mathrm{C}\,\mathrm{B}\,\overline{\mathrm{A}} =$$

$$= \mathrm{m}_{15} + \mathrm{m}_{7} + \mathrm{m}_{9} + \mathrm{m}_{8} + \mathrm{m}_{14} + \mathrm{m}_{6} = \sum \mathrm{m}(6,7,8,9,14,15).$$





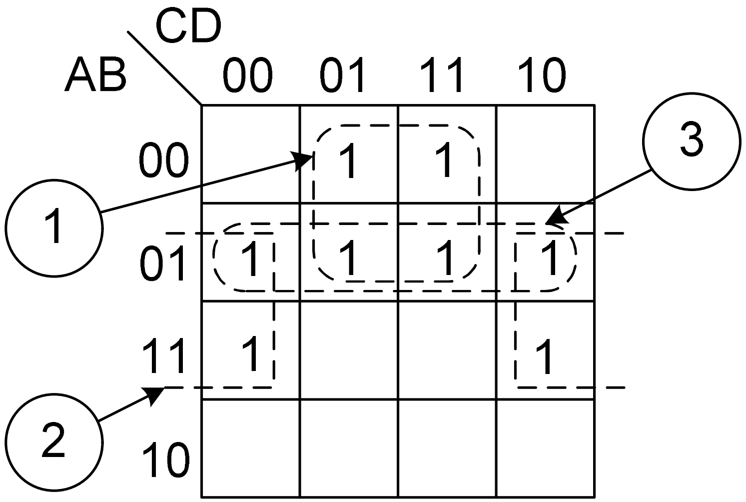
$$m_{8,9} = D\bar{C}\bar{B}\bar{A} + D\bar{C}\bar{B}A = D\bar{C}\bar{B}(\bar{A} + A) = D\bar{C}\bar{B}$$

$$m_{6,7,14,15} = \bar{D}CB\bar{A} + \bar{D}CBA + DCB\bar{A} + DCBA = \bar{D}CB\left(\bar{A} + A\right) + DCB\left(\bar{A} + A\right) =$$

$$= \bar{D}CB + DCB = CB(\bar{D} + D) = CB$$

$$f\left(D, C, B, A\right) = D\bar{C}\bar{B} + CB.$$

Primjer:

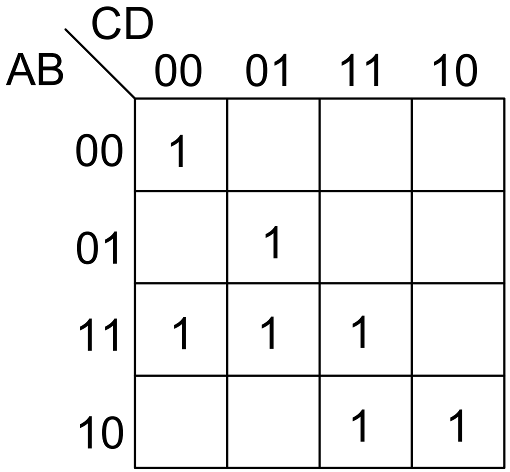


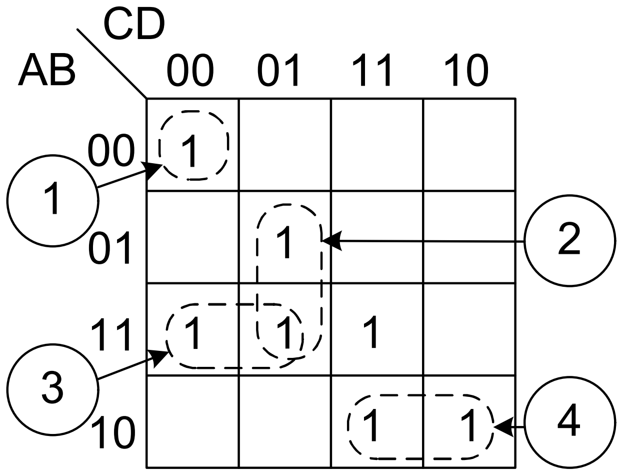
$$F = \overline{A}D + B\overline{D}$$

Skupovi 1 i 2 su bitni, jer se mintermovi m_1 i m_3 obuhvataju samo sa skupom zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $\overline{A}D$, odnosno mintermovi m_{12} i m_{14} se obuhvataju samo sa skupom zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $B\overline{D}$

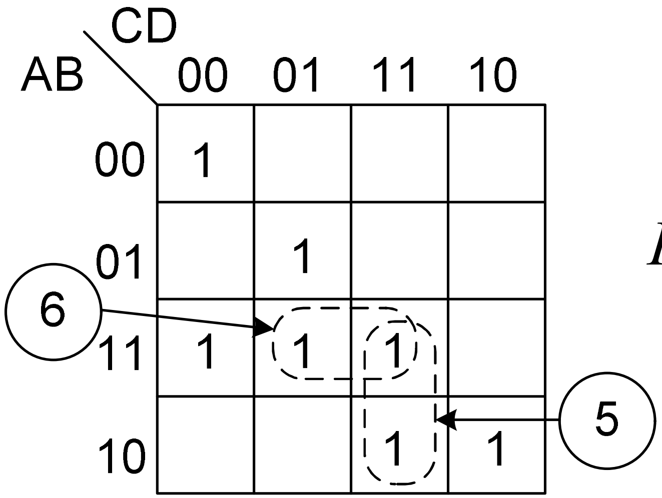
Skup 3 je nebitan jer su svi njegovi mintermovi obuhvaćeni sa prva dva skupa

- *Primjer*:





bitni skupovi



nebitni skupovi

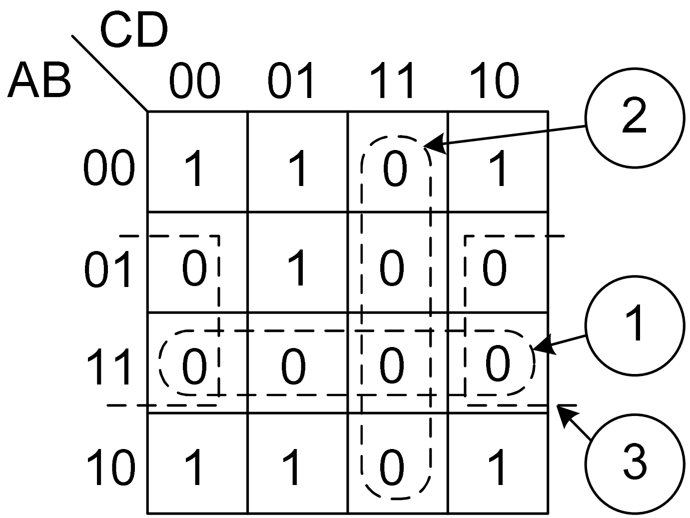
$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + B\overline{C}D + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \left\{ \begin{array}{c} ACD \\ ili \\ ABD \end{array} \right.$$

- *Primjer*: Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(\mathrm{A, B, C, D}) = \sum \mathrm{m}(0,1,2,5,8,9,10)$$

u obliku proizvoda logičkih zbirova

- *Rješenje*:



$$F = \left(\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}}\right) \cdot \left(\overline{\mathrm{C}} + \overline{\mathrm{D}}\right) \cdot \left(\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{D}\right).$$

- *Primjer*: Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

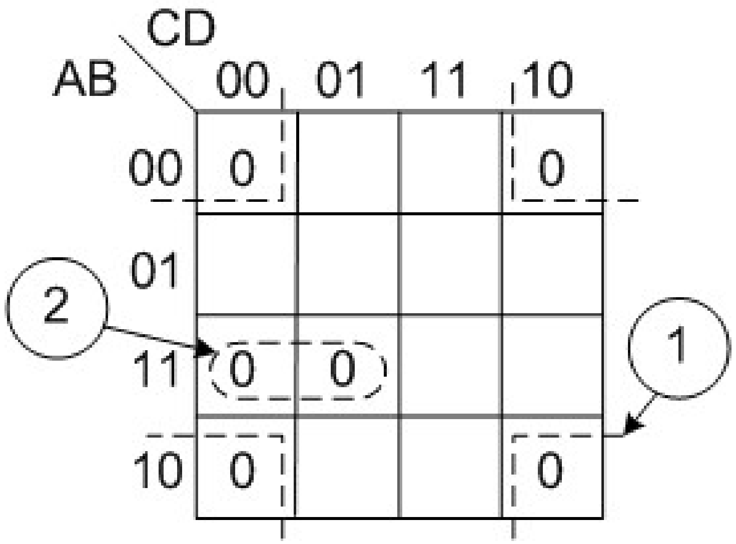
$$F(\text{A, B, C, D}) = \left(\overline{\text{A}} + \overline{\text{B}} + \text{C}\right)\cdot\left(\text{B} + \text{C} + \text{D}\right)\cdot\left(\text{B} + \overline{\text{C}} + \text{D}\right)$$

- *Rješenje*:

$$F = \left(\overline{\text{A}} + \overline{\text{B}} + \text{C}\right)\cdot\left(\text{B} + \text{C} + \text{D}\right)\cdot\left(\text{B} + \overline{\text{C}} + \text{D}\right) = \left(\overline{\text{A}} + \overline{\text{B}} + \text{C} + \text{D}\right)\cdot\left(\overline{\text{A}} + \overline{\text{B}} + \text{C} + \overline{\text{D}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\overline{\text{A}} + \text{B} + \text{C} + \text{D}\right)\cdot\left(\text{A} + \text{B} + \text{C} + \text{D}\right)\cdot\left(\overline{\text{A}} + \text{B} + \overline{\text{C}} + \text{D}\right)\cdot\left(\text{A} + \text{B} + \overline{\text{C}} + \text{D}\right) =$$

$$= \prod \text{M}(0,2,8,10,12,13).$$



$$F(\text{A, B, C, D}) = \left(\text{B} + \text{D}\right)\cdot\left(\overline{\text{A}} + \overline{\text{B}} + \text{C}\right)$$

- *Primjer*: Pronaći minimalnu formu nekompletno definisane funkcije F, sa tri ”bilo što” uslova:

$$F\left(\mathrm{A, B, C, D}\right)=\sum \mathrm{m}(1,3,7,11,15)+\times(0,2,5).$$

- *Rješenje*:

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

$$F=\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}+\mathrm{C\,D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

$$F=\overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{D}+\mathrm{C\,D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

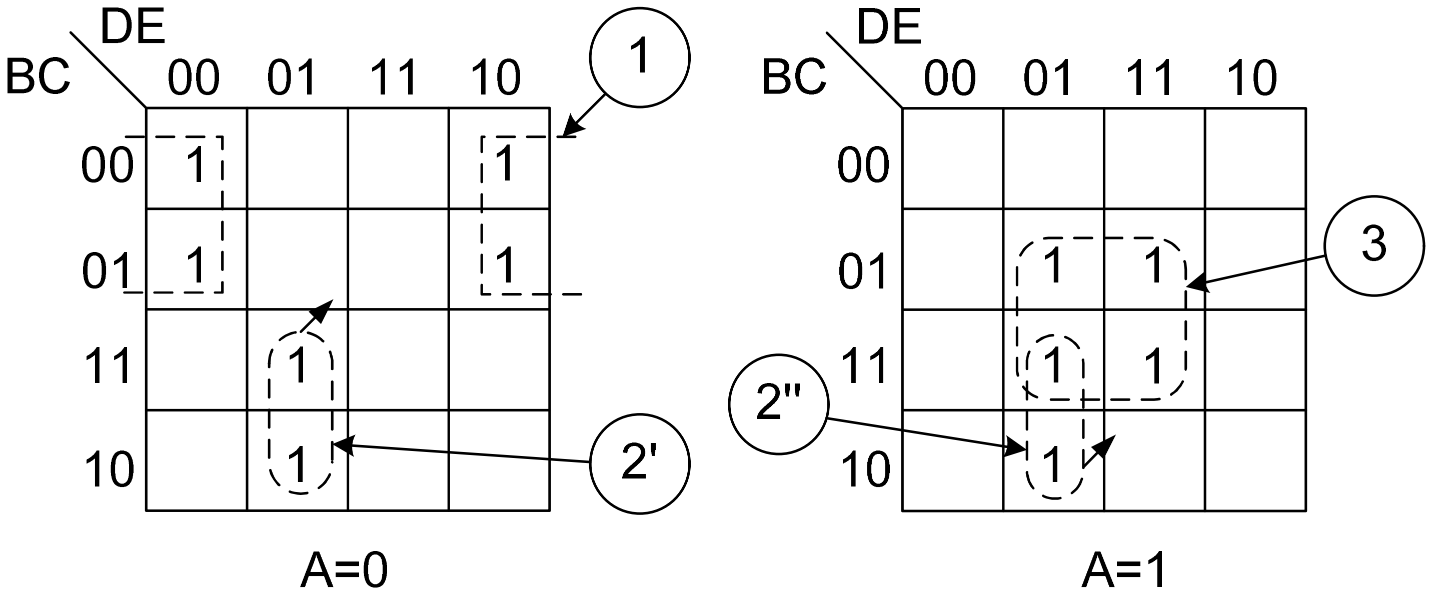
$$F=\mathrm{D}\cdot(\overline{\mathrm{A}}+\mathrm{C})$$

Karnoove mape sa pet promjenljivih

- *Primjer*: Pronaći uprošćeni oblik funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(\mathrm{A, B, C, D, E}) = \sum \mathrm{m}(0,2,4,6,9,13,21,23,25,29,31).$$

- *Rješenje*:



$$F = \overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{E}} + \mathrm{B}\overline{\mathrm{D}}\mathrm{E} + \mathrm{ACE}$$

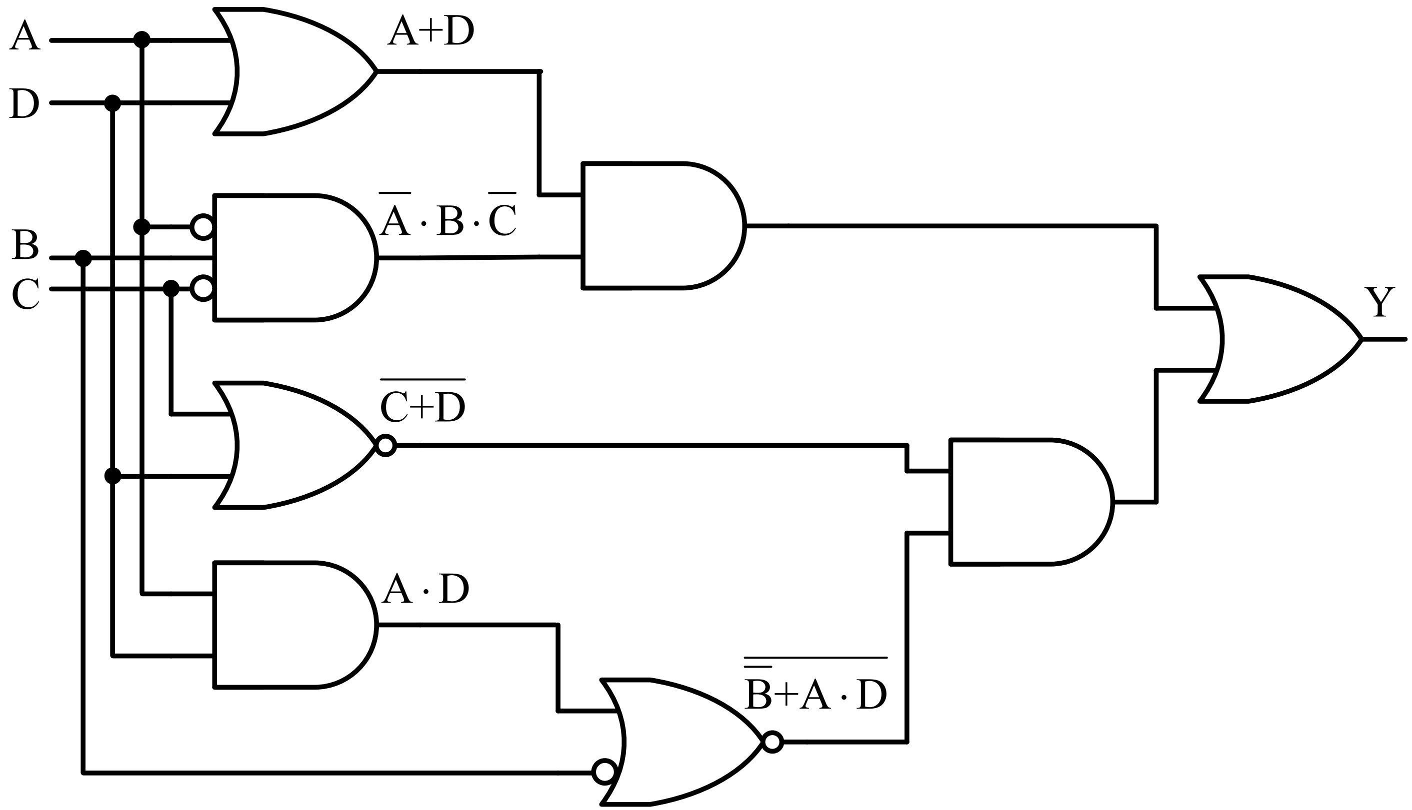
Osnovi računarstva I

Prekidačke mreže

- Posmatrajmo sljedeću složenu prekidačku funkciju:

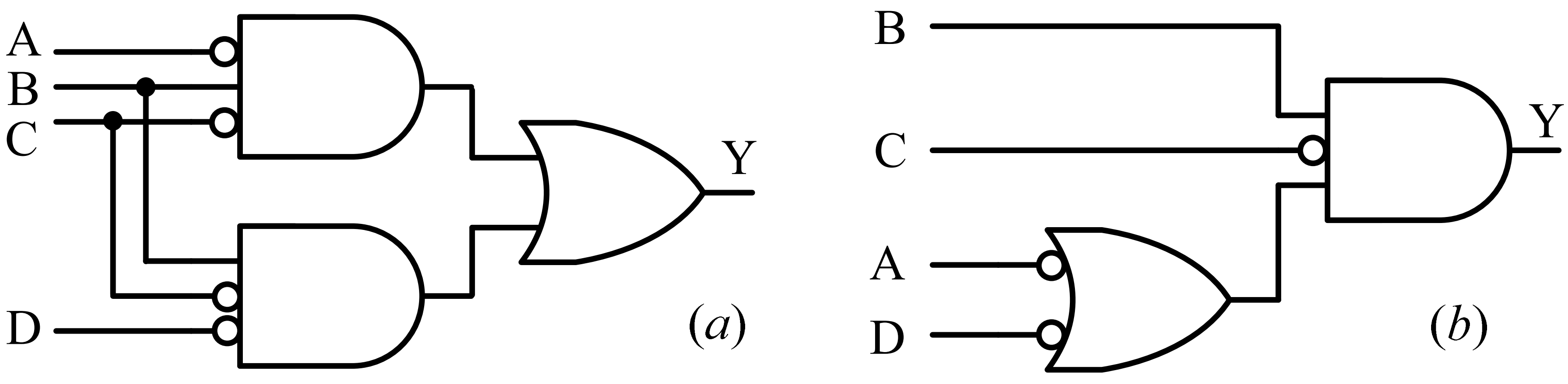
$$Y = (\mathrm{A} + \mathrm{D}) \cdot \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}} + \overline{\mathrm{C} + \mathrm{D}} \cdot \overline{\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{D}}$$

- Logička šema prekidačke mreže može se dobiti direktnim preslikavanjem prekidačke funkcije u odgovarajući dijagram elementarnih logičkih kola:

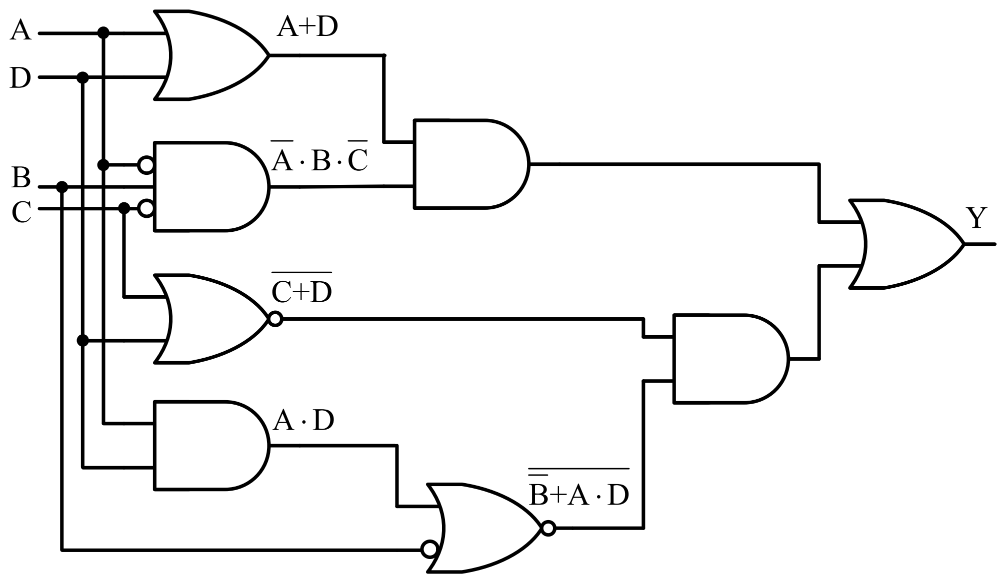


- Izlaz Y iste logičke vrijednosti veoma često se može realizovati pomoću jednostavnije mreže logičkih kola (minimizacija algebarski ili pomoću Karnoovih mapa):

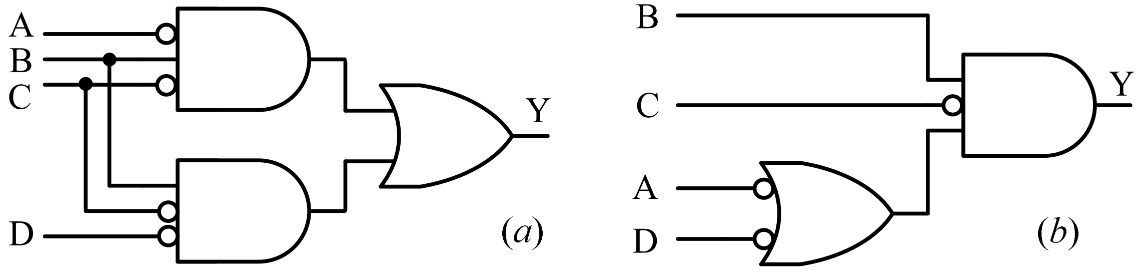
$$Y = \overline{\mathrm{A}}\mathrm{B}\overline{\mathrm{C}} + \mathrm{B}\overline{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{D}} = \mathrm{B}\overline{\mathrm{C}} \cdot \left(\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{D}}\right).$$



- Prekidačke mreže za implementaciju funkcije ne razlikuju se samo u pogledu broja i tipa upotrijebljenih logičkih elemenata, već i po broju nivoa (stepeni) u strukturi mreže
- Stepen prekidačke mreže određen je najvećim brojem redno vezanih logičkih kola kroz koja neki od ulaznih signala treba da prođe do izlaza mreže
- Četvorostepena:



- Dvostepene:



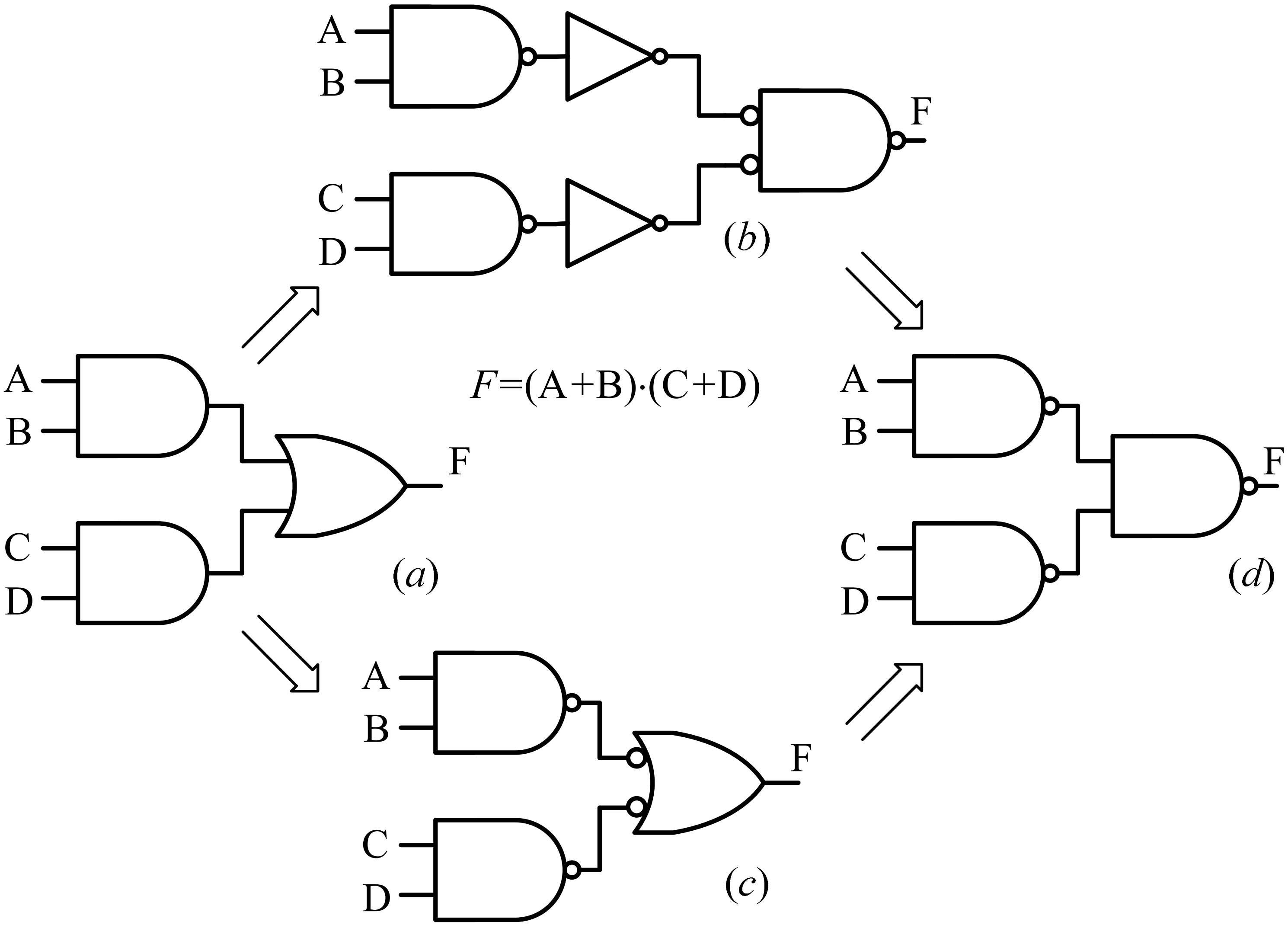
- REALIZACIJA NORMALNIH FORMI PREKIDAČKIH FUNKCIJA UPOTREBOM LOGIČKIH NI I NILI KOLA

- U slučaju logičke funkcije oblika zbira logičkih proizvoda, implementacija **dvostepene** prekidačke mreže može se izvršiti **upotrebom isključivo logičkih NI kola**:

$$F = \mathrm{A}\cdot\mathrm{B} + \mathrm{C}\cdot\mathrm{D} = \overline{\overline{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}}} + \overline{\overline{\mathrm{C}\cdot\mathrm{D}}} = \overline{\overline{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}}\cdot\overline{\mathrm{C}\cdot\mathrm{D}}}$$

- Analogno tome, funkcije oblika proizvoda logičkih zbirova mogu se implementirati **dvostepenom** prekidačkom mrežom, **koristeći isključivo logička NILI kola**.

$F = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} + \mathrm{C} \cdot \mathrm{D}$



$$F = (A+B) \cdot (C+D)$$