1 Testiranje statističkih hipoteza

Pojam statističke hipoteze i ideju testiranja približićemo kroz jedan primjer.

Primjer 1. U kutiji se nalazi 10 kuglica i znamo da je kutija napunjena po jednoj od dvije strategije:

A) Sa 9 kuglica na kojima je broj 1 i jednom kuglicom na kojoj je broj 2.

B) Sa 9 kuglica na kojima je broj 2 i jednom kuglicom na kojoj je broj 1.

Dozvoljeno nam je da iz kutije izvučemo 4 kuglice po modelu sa vraćanjem. Na osnovu izvučenih kuglica tj. brojeva na njima, treba da se odlučimo za jednu od dvije hipoteze (pretpostavke, mogućnosti):

1^0 Kutija je napunjena po strategiji A – govorićemo o hipotezi H_A.

2^0 Kutija je napunjena po strategiji B – govorićemo o hipotezi H_B.

Postupak presuđivanja u korist jedne od hipoteza zvaćemo **testom**. Ako je kutija napunjena po strategiji A, tada je zbog velike vjerovatnoće pojave broja 1, vjerovatnoća da se registruje mala suma brojeva, velika. Ako je kutija napunjena po strategiji B, tada je zbog velike vjerovatnoće pojave broja 2, vjerovatnoća da se registruje velika suma brojeva, velika. Jasno, suma brojeva je u rasponu od 4 do 8 i kada govorimo o maloj odnosno velikoj sumi imamo u vidu male odnosno velike vrijednosti u odnosu na interval omeđen brojevima 4 i 8. Nakon ove analize, nameće se kao razuman sljedeći postupak odlučivanja: Ako je zbir izvučenih brojeva ≥ 7 prihvatićemo H_B, a H_A odbaciti. U suprotnom tj. ako je zbir izvučenih brojeva < 7 prihvatićemo H_A, a H_B odbaciti.

Označimo sa X obilježje koje predstavlja broj na izvučenoj kuglici. U slučaju kada je važeća strategija A, obilježje X ima raspodjelu

$$X : \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{array},$$

a u slučaju kada je važeća strategija B, obilježje X ima raspodjelu

$$X : \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{array}.$$

Ove dvije raspodjele možemo tretirati kao familiju raspodjela obilježja X. U uzorku (X_1, X_2, X_3, X_4) komponente predstavljaju redom prvi, drugi, treći i četvrti izvučeni broj. U statistici je uobičajeno da se hipoteze izražavaju u terminima raspodjela. U našem primjeru H_A je hipoteza da obilježje X ima gornju, a H_B donju raspodjelu.

Ako je (x_1, x_2, x_3, x_4) realizovani uzorak, tada se uslov "zbir izvučenih brojeva je ≥ 7" zapisuje sa $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 7$. Ovaj uslov generiše oblast

$$C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 7\},\, C \subset R^4.$$

Nakon uvođenja oblasti C, pravilo odlučivanja možemo ovako formulisati: Ako realizovani uzorak (x_1, x_2, x_3, x_4) "upadne" u oblast C, tada prihvatamo H_B, a ako "upadne" u C^c, tada prihvatamo H_A. Oblast C određuje postupak – pravilo odlučivanja tj. test. "Upadanje" uzorka u oblast C ne odgovara hipotezi H_A (tada imamo onu situaciju kada je zbir izvučenih brojeva veliki tj. među brojevima dominira 2; ostvaruje se događaj čija je je vjerovatnoća realizacije mala ako je tačna hipoteza H_A). Zbog toga oblast C nazivamo kritična oblast za H_A.

U postupku odlučivanja nema izričitosti. Mi samo konstatujemo da na osnovu registrovanih brojeva prednost dajemo jednoj hipotezi (prihvatamo jednu hipotezu). Naravno, postoji mogućnost greške. Grešku pravimo kada povodeći se za pravilom odlučivanja odbacimo hipotezu koja je faktički tačna. Preciznije, moguće je da odbacimo H_A koja je tačna i samim tim prihvatimo H_B koja je netačna. Jasno, moguća je i situacija u kojoj H_A i H_B imaju zamijenjene uloge.

Izračunajmo vjerovatnoću α da odbacimo tačnu hipotezu H_A.

$$\alpha = P_{H_A}\{(X_1, X_2, X_3, X_4) \in C\} = \frac{1}{10^4} + 4 \cdot \frac{9}{10^4} = 0,0037.$$

Izračunajmo vjerovatnoću β da odbacimo tačnu hipotezu H_B.

$$\beta = P_{H_B}\{(X_1, X_2, X_3, X_4) \in C^c\} = \frac{1}{10^4} + 4 \cdot \frac{9}{10^4} + 6 \cdot \frac{9^2}{10^4} = 0,0523.$$

Interesantno je vidjeti šta se dešava ako promijenimo test na taj način što za kritičnu oblast za H_A sada uzmemo

$$D = \{(x_1, x_2.x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 8\},\, D \subset R^4.$$

Lako se dobija $\alpha = 0,0001$, $\beta = 0,3439$. Primijetimo, vjerovatnoća da se odbaci faktički tačna H_A je znatno smanjena, ali je vjerovatnoća odbacivanja faktički tačne H_B postala enormno velika. Praktično, u jednom od tri slučaja ćemo odbaciti tačnu hipotezu H_B. U ovakvoj situaciji je bolje testiranje obaviti prvim postupkom.◀

Motivisani prethodnim primjerom, možemo preći na izlaganje teorije.

Neka je X obilježje čija funkcija raspodjele vjerovatnoća pripada familiji

$$\mathcal{F}_X = \{F(x, \theta),\, \theta \in \Theta\}.$$

Pretpostavka oblika $H_o(\theta \in \Theta_o)$, $\Theta_o \subset \Theta$, zove se **statistička hipoteza**. Malo drugačije rečeno, pretpostavka se sastoji u tome da obilježje X ima raspodjelu koja pripada užoj familiji određenoj parametarskim skupom Θ_o. Ako je Θ_o jednočlani skup, tada se hipoteza H_o naziva prosta. U protivnom govorimo o složenoj hipotezi. Hipotezi H_o ćemo suprotstaviti hipotezu $H_1(\theta \in \Theta \backslash \Theta_o)$. Hipoteza H_o se naziva nulta, a hipoteza H_1 alternativna. Postupak odlučivanja u korist jedne hipoteze na osnovu realizovanog uzorka se naziva **statistički test**. Taj postupak je određen zadavanjem kritične oblasti $C \subset R^n$ i sprovodi se na sljedeći način: Ako $(x_1, ..., x_n) \in C$ tada H_0 odbacujemo u korist H_1, a ako $(x_1, ..., x_n) \in C^c$ tada H_1 odbacujemo u korist H_0. Zbog upravo izloženog se kaže da kritična oblast zadaje test.

Posvetimo se slučaju kada je $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, $H_0(\theta = \theta_0), H_1(\theta = \theta_1)$, dakle obje hipoteze su proste. Pretpostavimo da je $C \subset R^n$ kritična oblast koja zadaje test.

Prilikom odlučivanja, postoji mogućnost da se napravi greška.

1^o **Grešku prve vrste** pravimo kada odbacimo faktički tačnu hipotezu H_o.

2^o **Grešku druge vrste** pravimo kada odbacimo faktički tačnu hipotezu H_1.

Vjerovatnoća greške prve vrste se označava sa α i za nju, na osnovu rečenog, važi

$$\alpha = P_{H_0}\{(X_1, \ldots, X_n) \in C\}.$$

α se naziva **pragom značajnosti testa**, a C se naziva **kritična oblast veličine** α.

Vjerovatnoća greške druge vrste se označava sa β i za nju, na osnovu rečenog, važi

$$\beta = P_{H_1}\{(X_1, \ldots, X_n) \in C^c\}.$$

Prirodna je potreba da se pronađe test u kome su brojevi α i β mali. Kod rješavanja ovog zadatka poteškoće izviru iz činjenice da smanjivanje jednog od ova dva parametra povlači uvećavanje drugog. Postupamo na sljedeći način. Među svim skupovima $S \subset R^n$ za koje je

$$P_{\theta_0}\{(X_1, ..., X_n) \in S\} = \alpha$$

tražimo skup C za koji je vjerovatnoća $P_{\theta_1}\{(X_1, ..., X_n) \in C^c\}$ najmanja. Ako skup C postoji nazivamo ga **najbolja kritična ooblast veličine** α, a odgovarajući test **najbolji test sa pragom značajnosti** α. U nekim modelima postoji efektivni postupak za dobijanje najbolje kritične oblasti. Postupak dobijanja najbolje kritične oblasti generiše Nejman Pirsonova lema. Prije nego što formulišemo pomenutu lemu, zadaćemo model. Pretpostavlja se da obilježje ima apsolutno neprekidnu raspodjelu. Gustina koja odgovara raspodjeli zadatoj parametrom θ_0 je $f_0(x)$, gustina koja odgovara raspodjeli zadatoj parametrom θ_1 je $f_1(x)$

$$K(X_1,...,X_n) := \frac{L(\theta_1, X_1,...,X_n)}{L(\theta_0, X_1,...,X_n)} = \frac{L(\theta_1, \mathbf{X})}{L(\theta_0, \mathbf{X})} = \frac{f_1(X_1)...f_1(X_n)}{f_0(X_1)...f_0(X_n)},$$
$$\mathbf{X} = (X_1,...,X_n),\ \mathbf{x} = (x_1,...,x_n), h(c) := P_{\theta_0}\{K(X_1,...,X_n) \geq c\},\ c \geq 0.$$

Primijetimo, $h(c) \downarrow$ i $h(0) = 1$. Neka je $A_c = \{(x_1,...,x_n) : K(x_1,...,x_n) \geq c\}$. Sada je

$$1 \geq P_{\theta_1}\{K(X_1,...,X_n) \geq c\} = \int\limits_{A_c} L(\theta_1, \mathbf{x})d\mathbf{x} = \int\limits_{A_c} f_1(x_1)...f_1(x_n)d\mathbf{x} \geq c \int\limits_{A_c} f_0(x_1)...f_0(x_n)d\mathbf{x}$$
$$= c\int\limits_{A_c} L(\theta_0, \mathbf{x})d\mathbf{x} = cP_{\theta_0}\{K(X_1,...,X_n) \geq c\} = ch(c) \Rightarrow h(c) \leq \frac{1}{c} \Rightarrow \lim_{c\to\infty} h(c) = 0.$$

Ako je $h(c)$ neprekidna funkcija, tada za proizvoljni broj $\alpha \in (0,1)$ postoji $c \in R^+$ takav da je $h(c) = \alpha$.

Nejman Pirsonova lema. Neka za dato $\alpha \in (0,1)$ postoji $c > 0$ takav da je $h(c) = \alpha$. Tada postoji najbolja kritična oblast veličine α za testiranje $H_0(\theta = \theta_0)$ protiv $H_1(\theta = \theta_1)$ i data je sa $W_0 = \{\mathbf{x} : K(\mathbf{x}) \geq c\}$.

Dokaz. Neka je W proizvoljna kritična oblast veličine α tj. $\alpha = P\{\mathbf{X} \in W\}$. Primijetimo, $P_{\theta_0}\{\mathbf{X} \in W_0\} = P_{\theta_0}\{K(\mathbf{X}) \geq c\} = \alpha$.

Treba da pokažemo $P_{\theta_1}\{\mathbf{X} \in W^c\} \geq P_{\theta_1}\{\mathbf{X} \in W_0^c\}$ što je ekvivalentno sa $P_{\theta_1}\{\mathbf{X} \in W\} \leq P_{\theta_1}\{\mathbf{X} \in W_0\}$.

$$P_{\theta_1}\{\mathbf{X} \in W\} - P_{\theta_1}\{\mathbf{X} \in W_0\}$$
$$= \int\limits_{W\cap W_0^c} L(\theta_1, \mathbf{x})d\mathbf{x} + \int\limits_{W\cap W_0} L(\theta_1, \mathbf{x})d\mathbf{x} - \int\limits_{W\cap W_0} L(\theta_1, \mathbf{x})d\mathbf{x} - \int\limits_{W^c\cap W_0} L(\theta_1, \mathbf{x})d\mathbf{x}$$
$$\leq c(\int\limits_{W\cap W_0^c} L(\theta_0, \mathbf{x})d\mathbf{x} - \int\limits_{W^c\cap W_0} L(\theta_0, \mathbf{x})d\mathbf{x}) = c(\int\limits_{W\cap W_0^c} + \int\limits_{W\cap W_0} - \int\limits_{W\cap W_0} - \int\limits_{W^c\cap W_0})$$
$$= c(\int\limits_{W} L(\theta_0, \mathbf{x})d\mathbf{x} - \int\limits_{W_0} L(\theta_0, \mathbf{x})d\mathbf{x}) = c(\alpha - \alpha) = 0.$$

Primjer. Obilježje X ima $\mathcal{N}(m, \sigma_0^2)$, σ_0^2 poznato, raspodjelu (gustina $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_0^2}}$). Tražimo najbolju kritičnu oblast veličine α (najbolji test sa pragom značajnosti α) za testiranje $H_0(m = m_0)$ protiv $H_1(m = m_1)$, $m_1 > m_0$.

$$h(c)=P_{m_0}\left\{\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}^n}e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(X_k-m_1)^2}{2\sigma_0^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}^n}e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(X_k-m_0)^2}{2\sigma_0^2}}}\geq c\right\}=P_{m_0}\left\{e^{\frac{(m_1-m_0)}{\sigma_0^2}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k+\frac{n(m_0^2-m_1^2)}{2\sigma_0^2}}\geq c\right\}=$$

$$P_{m_0}\left\{\overline{X}_n\geq\frac{\sigma_0^2\ln c}{(m_1-m_0)n}+\frac{m_1+m_0}{2}\right\}=P_{m_0}\left\{\frac{\overline{X}_n-m_0}{\sigma_0}\sqrt{n}\geq\frac{\sigma_0\ln c}{(m_1-m_0)\sqrt{n}}+\frac{(m_1-m_0)\sqrt{n}}{2\sigma_0}\right\}=\alpha.$$

Budući da statistika $\frac{\overline{X}_n-m_0}{\sigma_0}\sqrt{n}:\mathcal{N}(0,1)$ u modelu u kome $X:\mathcal{N}(m_0,\sigma_0^2)$, zaključujemo da postoji c takvo da je $h(c)=\alpha$ i to c je rješenje jednačine

$$\frac{\sigma_0\ln c}{(m_1-m_0)\sqrt{n}}+\frac{(m_1-m_0)\sqrt{n}}{2\sigma_0}=z_\alpha.$$

Dakle, $W_0=\left\{(x_1,...,x_n):\frac{\overline{x}_n-m_0}{\sigma_0}\sqrt{n}\geq z_\alpha\right\}=\left\{(x_1,...,x_n):\overline{x}_n\geq m_0+\frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}}\right\}$. Primijetimo, W_0 ne zavisi od m_1 te isti test dobijamo bez obzira na to koje $m_1>m_0$ zadaje alternativnu hipotezu. U slučaju testiranja $H_0(m=m_0)$ protiv $H_1(m=m_1)$, $m_1<m_0$, primjenom istog postupka se dobija:

$$W_0=\left\{(x_1,...,x_n):\frac{\overline{x}_n-m_0}{\sigma_0}\sqrt{n}\leq -z_\alpha\right\}=\left\{(x_1,...,x_n):\overline{x}_n\leq m_0-\frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}}\right\}.$$

U slučaju $n=9$, $\alpha=0,05$, $m_0=0$, $m_1=1$, $\sigma_0^2=1$ imamo: $W_0=\{(x_1,...,x_9):\overline{x}_9\geq\frac{1{,}65}{3}\}=\{(x_1,...,x_9):\overline{x}_9\geq 0,55\}$, dok je $\beta=P_1\{\overline{x}_9<0,55\}=P_1\{(\overline{x}_9-1)3<-1,35\}=0,09$.

Vratimo se na opšti slučaj i nađimo najmanje n takvo da je uz zadato α vjerovatnoća greške druge vrste $\leq\beta$. Iz

$$P_{m_1}\left\{\overline{X}_n<m_0+\frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}}\right\}=P\left\{Z<\frac{m_0-m_1}{\sigma_0}\sqrt{n}+z_\alpha\right\}\leq\beta$$

Iz

$$\frac{m_0-m_1}{\sigma_0}\sqrt{n}+z_\alpha<-z_\beta\Rightarrow n\geq\left(\frac{\sigma_0(z_\alpha+z_\beta)}{m_1-m_0}\right)^2.$$

Primjer. $X:\mathcal{E}(\theta)$ (tj. $g(x)=\theta e^{-\theta x}$, $x>0$, $\theta>0$). Znamo $EX=\frac{1}{\theta}$; $DX=\frac{1}{\theta^2}$ i u slučaju kad je

n veliko $\left(\overline{X}_n - \frac{1}{\theta}\right)\theta\sqrt{n} : \mathcal{N}(0,1)$. Testirajmo $H_0(\theta = \theta_0)$ protiv $H_1(\theta = \theta_1)$, $\theta_1 > \theta_0$, n je veliko.

$$h(c) = P_{\theta_0}\left\{\frac{\theta_1^n e^{-\theta_1 \sum\limits_{k=1}^{n} X_k}}{\theta_0^n e^{-\theta_0 \sum\limits_{k=1}^{n} X_k}} \geq c\right\} = P_{\theta_0}\left\{\overline{X}_n \leq \frac{\ln c(\frac{\theta_0}{\theta_1})^n}{n(\theta_0-\theta_1)}\right\}$$

$$= P_{\theta_0}\left\{\left(\overline{X}_n - \frac{1}{\theta_0}\right)\theta_0\sqrt{n} \leq \left(\frac{\ln c(\frac{\theta_0}{\theta_1})^n}{n(\theta_0-\theta_1)} - \frac{1}{\theta_0}\right)\theta_0\sqrt{n}\right\} = \alpha.$$

Očigledno, funkcija $h(c)$ je neprekidna (kompozicija dvije neprekidne funkcije) te postoji najbolja kritična oblast veličine α. Uzimajući u obzir gore pomenutu aproksimaciju statistike $\left(\overline{X}_n - \frac{1}{\theta_0}\right)\theta_0\sqrt{n} : \mathcal{N}(0,1)$ u modelu koji generiše H_0 dobijamo

$$W_0 = \left\{(x_1, ..., x_n) : \left(\overline{x}_n - \frac{1}{\theta_0}\right)\theta_0\sqrt{n} \leq -z_\alpha\right\}.$$

I u ovom primjeru W_0 ne zavisi od θ_1. I na kraju, kad je $n = 100$, $\alpha = 0,05$, $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 1,5$ dobijamo $W_0 = \{(x_1, ..., x_{100}) : \overline{x}_{100} \leq 0,835\}$, $\beta = P_{1,5}\{\overline{X} > 0,835\} = P\{Z > (0,835 - 1,5^{-1})15\} = P\{Z > 2,520\} = 0,0059$.

Najbolja kritična oblast iz formulacije Nejman-Pirsonove leme se može zapisati i u ekvivalentnom obliku $W_0 = \left\{\mathbf{x} : \frac{L(\theta_0,\mathbf{x})}{L(\theta_1,\mathbf{x})} \leq c\right\}$. Oblik kritične oblasti W_0 je očekivan (razuman, saglasan sa intuicijom). Ovu konstataciju objasnimo na neformalnom nivou. Naime, kritičnu oblast čine uzorci $(x_1, ..., x_n)$ čija je vjerovatnoća realizacije u modelu $\theta = \theta_0$ "mnogo manja" nego u modelu $\theta = \theta_1$. Kako su pomenute vjerovatnoće redom $L(\theta_0, x_1, ..., x_n)$ i $L(\theta_1, x_1, ..., x_n)$, za uzorke $(x_1, ..., x_n)$ iz W_0 količnik $\frac{L(\theta_0,\mathbf{x})}{L(\theta_1,\mathbf{x})}$ je mali, što se prevodi na nejednakost $\frac{L(\theta_0,\mathbf{x})}{L(\theta_1,\mathbf{x})} \leq c$. Izložena analiza je motiv za

Test količnika vjerodostojnosti

Neka je parametarski skup Θ, $\Lambda + \Lambda_0 = \Theta$, $H_0(\theta \in \Theta_0)$, $H_1(\theta \in \Theta_1)$. Neka je θ^* vrijednost parametra θ za koju funkcija $L(\theta, \mathbf{x})$, $\theta \in \Lambda_0$ dostiže maksimum. Neka je θ^{**} vrijednost parametra θ za koju funkcija $L(\theta, \mathbf{x})$, $\theta \in \Theta$ dostiže maksimum. U testu količnika vjerodostojnosi kritična oblast je

$$\mathcal{C} = \left\{\mathbf{x} : \frac{L(\theta^*, \mathbf{x})}{L(\theta^{**}, \mathbf{x})} \leq c_\alpha\right\}, \; 0 < c_\alpha < 1,$$

i

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Lambda_0} P_\theta\{\mathbf{X} \in \mathcal{C}\} = \sup_{\theta \in \Lambda_0} P_\theta\left\{\frac{L(\theta^*, \mathbf{X})}{L(\theta^{**}, \mathbf{X})} \leq c_\alpha\right\}.$$

Slučaj $c_\alpha = 1$ smo isključili zbog toga što bi implicirao $\mathcal{C} = R^n$, $\alpha = 1$.

Neka je C kritična oblast koja određuje neki test za testiranje $H_o(\theta \in \Theta_o)$ protiv $H_1(\theta \in \Theta \backslash \Theta_0)$.

Funkcija moći testa se zadaje sa

$$W(\theta) = P_\theta\{(X_1, \ldots, X_n) \in C\},\ \theta \in \Theta.$$

Primjer. $X : \mathcal{N}(m, \sigma_0^2)$, σ_0^2 je poznato, $H_0(m \geq m_0)$, $H_1(m < m_0)$.

Budući da je $L(m, x_1, ..., x_n) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2}{2\sigma_0^2}}$, maksimum funkcije vjerodostojnosti se dobija za ono m za koje kvadratna funkcija $g(m) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2 = nm^2 - 2m\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ ima minimum. Jednostavno se dobija $m^* = \max\{\overline{x}_n, m_0\}$, $m^{**} = \overline{x}_n$.

$$\frac{L(m^*, \mathbf{x})}{L(m^{**}, \mathbf{x})} = \begin{cases} 1, & \overline{x}_n \geq m_0 \\ e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}[\sum_{k=1}^{n}(x_k-m_0)^2 - \sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x}_n)^2]}, & \overline{x}_n < m_0 \end{cases}$$

Riješimo nejednačinu

$$e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}[\sum_{k=1}^{n}(x_k-m_0)^2 - \sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x}_n)^2]} \leq c_\alpha$$

Naša nejednačina je ekvivalentna sa

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - m_0)^2 - \sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x}_n)^2 \geq c,\ c > 0 \Leftrightarrow \overline{x}_n^2 - 2m_0\overline{x}_n + m_0^2 \geq c,\ c > 0 \Leftrightarrow (m_0 - \overline{x}_n)^2 \geq c,\ c > 0$$
$$\Leftrightarrow m_0 - \overline{x}_n \geq c,\ c > 0 \Leftrightarrow \overline{x}_n \leq m_0 - c,\ c > 0,$$

gdje zbog ekonomičnosti zapisa koristimo samo jednan simbol za konstantu iako je riječ o različitim konstantama.

$$\alpha = \sup_{m \geq m_0} P_m\Big\{\overline{X}_n \leq m_0 - c\Big\} = \sup_{m \geq m_0} P_m\left\{\frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma_0}\sqrt{n} \leq \frac{m_0 - c - m}{\sigma_0}\sqrt{n}\right\} =$$
$$\sup_{m \geq m_0} P_m\left\{Z \leq \frac{m_0 - c - m}{\sigma_0}\sqrt{n}\right\},$$

Očigledno, supremum se dostiže za $m = m_0$ i nakon rješavanje jednačine $-\frac{c\sqrt{n}}{\sigma_0} = -z_\alpha$ dobijamo $c = \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}}$. Dakle, $\mathcal{C} = \Big\{(x_1, ..., x_n) : \overline{x}_n \leq m_0 - \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}}\Big\}$.

Potražimo funkciju moći testa.

$$W(m) = P_m\left\{\overline{X}_n < m_0 - \frac{z_\alpha \sigma_0}{\sqrt{n}}\right\} = P\left\{Z < \frac{m_0 - m - \frac{z_\alpha\sigma_0}{\sqrt{n}}}{\sigma_0}\sqrt{n}\right\} = \Phi\left(\frac{m_0 - m}{\sigma_0}\sqrt{n} - z_\alpha\right),$$

gdje sa Φ označavamo funkciju raspodjele slučajne promjenljive Z. Funkcija $W(m)$ je neprekidna, monotono opada, teži ka 1 kad $m \to -\infty$ i teži ka 0 kad $m \to \infty$.

U slučaju $H_0(m \leq m_0)$, $H_1(m > m_0)$ se dobija $\mathcal{C} = \left\{(x_1, ..., x_n) : \overline{x}_n \geq m_0 + \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}}\right\}$.

U slučaju $H_0(m = m_0)$, $H_1(m \neq m_0)$ imamo $m^* = m_0$, $m^{**} = \overline{x}_n$ te je

$$\mathcal{C} = \left\{(x_1, ..., x_n) : \frac{| \overline{x}_n - m_0 |}{\sigma_0}\sqrt{n} \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}.$$

Primjer. $X : \mathcal{U}[0, \theta]$, $\theta > 0$, $H_0(\theta = \theta_0)$, $H_1(\theta \neq \theta_0)$.

$\theta^* = \theta_0$, $L(\theta^*, x_1, ..., x_n) = \frac{1}{\theta_0^n}$, $y_n \leq \theta_0$, $\theta^{**} = y_n$, $L(\theta^{**}, x_1, ..., x_n) = \frac{1}{y_n^n}$ te je

$$\frac{L(\theta^*, \mathbf{x})}{L(\theta^{**}, \mathbf{x})} = \begin{cases} \left(\frac{y_n}{\theta_0}\right)^n, & y_n < \theta_0, \\ 1, & y_n = \theta_0, \\ 0, & y_n > \theta_0. \end{cases} \quad C = \left\{(x_1, ..., x_n) : \left(\frac{y_n}{\theta_0}\right)^n \leq c_\alpha \text{ ili } y_n > \theta_0\right\},$$

$$\alpha = P_{\theta_0}\left\{\left(\frac{Y_n}{\theta_0}\right)^n \leq c_\alpha \text{ ili } Y_n > \theta_0\right\} = P_{\theta_0}\{Y_n \leq \sqrt[n]{c_\alpha}\theta_0\} = c_\alpha;\ C = \{\mathbf{x} :\ y_n \leq \sqrt[n]{\alpha}\theta_0 \text{ ili } y_n > \theta_0\}.$$

1^0 $0 < \theta \leq \sqrt[n]{\alpha}\theta_0$, $W(\theta) = 1$.

2^0 $\sqrt[n]{\alpha}\theta_0 < \theta \leq \theta_0$, $W(\theta) = \alpha\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n$.

3^0 $\theta > \theta_0$, $W(\theta) = \alpha\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n + 1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n = 1 - (1 - \alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n$.

Primjer. $X : \mathcal{U}[0, \theta]$, $\theta > 0$, $H_0(\theta \in [1, 2])$.

Potražimo θ^*.

a) $y_n < 1$, $L(\theta, \mathbf{x}) = \frac{1}{\theta^n}$, $1 \leq \theta \leq 2$. Maksimum se dostiže za $\theta = 1$.

b) $1 \leq y_n \leq 2$, $L(\theta, \mathbf{x}) = \frac{1}{\theta^n}$, $y_n \leq \theta \leq 2$ te se maksimum dostiže za $\theta = y_n$.

Dakle, $\theta^* = \max\{1, y_n\}$, a $\theta^{**} = y_n$.

$$\frac{L(\theta^*, \mathbf{x})}{L(\theta^{**}, \mathbf{x})} = \begin{cases} y_n^n, & y_n < 1, \\ 1, & 1 \leq y_n \leq 2, \\ 0, & y_n > 2. \end{cases}$$

$C = \{\mathbf{x} : y_n \leq \sqrt[n]{c_\alpha} \text{ ili } y_n > 2\}$, $\alpha = \sup\limits_{\theta \in [1,2]} P\{Y_n \leq \sqrt[n]{c_\alpha} \text{ ili } Y_n > 2\} = c_\alpha \Rightarrow$

$C = \{\mathbf{x} : y_n \leq \sqrt[n]{\alpha} \text{ ili } y_n > 2\}$.

$$W(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta \leq \sqrt[n]{\alpha}, \\ \frac{\alpha}{\theta^n}, & \sqrt[n]{\alpha} < \theta \leq 2, \\ 1 + \frac{\alpha}{\theta^n} - \frac{2^n}{\theta^n}, & \theta > 2. \end{cases}$$

Primjer. $X : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ oba parametra su nepoznata, $H_0(m \leq m_0)$, $H_1(m > m_0)$. Metodom maksimalne vjerodostojnosti ćemo ocijeniti nepoznati vektor (m, σ^2). Zbog toga što je funkcija ln strogo monotono rastuća, traženje maksimuma funkcije $L(m, \sigma^2, \mathbf{x})$ ćemo zbog jednostavnije analize konvertovati u traženje maksimuma funkcije $\ln L(m, \sigma^2, \mathbf{x})$.

$\frac{\partial}{\partial m} \ln L = 0 \Rightarrow m = \overline{x}_n$. Zamijenimo dobijeno m u L i rješavamo $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x}_n)^2 = \overline{s}_n^2$. Dakle $\theta^{**} = (\overline{x}_n, \overline{s}_n^2)$. Potražimo θ^*. $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - m)^2$. Zamijenimo upravo dobijeno σ^2 u $L(m, \sigma^2, \mathbf{x})$, a zatim tražimo maksimum funkcije $\ln L(m, \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - m)^2, \mathbf{x})$, $m \leq m_0$. Maksimum se dostiže u u tački $\min\{\overline{x}_n, m_0\}$. Dakle,

$$\theta^* = \begin{cases} (\overline{x}_n, \overline{s}_n^2), & x_n \leq m_0, \\ (m_0, \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - m_0)^2), & x_n > m_0. \end{cases}$$

$$\frac{L(\theta^*, \mathbf{x})}{L(\theta^{**}, \mathbf{x})} = \begin{cases} 1, & \overline{x}_n \leq m_0, \\ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x}_n)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - m_0)^2}, & \overline{x}_n > m_0. \end{cases}$$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x}_n)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - m_0)^2} < c \Leftrightarrow \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x}_n)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x}_n + \overline{x}_n - m_0)^2} < c \Leftrightarrow \frac{n\overline{s}_n^2}{n\overline{s}_n^2 + n(\overline{x}_n - m_0)^2} < c \Leftrightarrow \frac{\overline{x}_n - m_0}{\hat{s}_n} \sqrt{n} \geq c_\alpha, \overline{s}_n^2 = \frac{n-1}{n} \hat{s}_n^2.$$

Znamo da statistika $\frac{\overline{X}_n - m_0}{\hat{s}_n} \sqrt{n}$ ima Studentovu raspodjelu sa $n-1$ stepena slobode. Slučajnu promjenljivu koja ima t_{n-1} raspodjelu ćemo oznčiti sa T.

$$\alpha = \sup_{m \leq m_0} P_m \left\{ \frac{\overline{X}_n - m_0}{\hat{S}_n} \sqrt{n} \geq c_\alpha \right\} = \sup_{m \leq m_0} P_m \left\{ \frac{\overline{X}_n - m}{\hat{S}_n} \sqrt{n} + \frac{m - m_0}{\hat{S}_n} \sqrt{n} \geq c_\alpha \right\} =$$

$$= P\{T \geq v_{n-1;0,5-\alpha}\}.$$

Naime, supremum se dostiže za $m = m_0$, a $v_{n-1;0,5-\alpha}$ se čita iz tablica za Studentovu raspodjelu. I na kraju

$$C = \left\{ \mathbf{x} : \overline{x}_n > m_0 + \frac{v_{n-1;0,5-\alpha} \hat{s}_n}{\sqrt{n}} \right\}.$$