

1 Uslovno matematičko očekivanje

Neka je (X, Y) slučajni vektor diskretnog tipa. Uslovno matematičko očekivanje promjenljive Y uz uslov $X = x_i$ se označava sa $E(Y|X = x_i)$ i zadaje sa

$$E(Y|X = x_i) = \sum_{j=1}^m y_j P\{Y = y_j | X = x_i\},$$

gdje je x_i neka realizacija promjenljive X , a $y_j, j = 1, 2, \dots, m$, su sve realizacije promjenljive Y . Primjenjujući isti postupak na sve realizacije $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, slučajne promjenljive X , generišemo preslikavanje $g(x_i) = E(Y|X = x_i), i = 1, 2, \dots, n$. (*) Kako su argumenti preslikavanja g slike preslikavanja X sa (*) je zadata kompozicija $g \circ X = g(X)$ tj. slučajna promjenljiva i formirano preslikavanje-slučajnu promjenljivu nazivamo matematičko očekivanje od Y uz uslov X i označavamo sa $E(Y|X)$. Sumirajući sve do sada rečeno možemo konstatovati:

$$g(X) = E(Y|X) = \sum_{i=1}^n g(x_i) I\{X = x_i\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j P\{Y = y_j | X = x_i\} I\{X = x_i\}.$$

Uopštenje na apsolutno neprekidni slučaj je prirodno. Ulogu sume preuzima integral, ulogu vjerovatnoće gustina. Neka je (X, Y) slučajni vektor apsolutno neprekidnog tipa i neka su $\varphi(x, y), \varphi(y|x), \varphi_1(x), \varphi_2(y)$ odgovarajuće gustine. Imamo

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \varphi(y|x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_1(x)} dy = h(x) \Rightarrow h(X) = E(Y|X).$$

Svojstva uslovnog matematičkog očekivanja.

1. $E(\sum_i c_i X_i | Y) = \sum_i c_i E(X_i | Y)$.

2. $E(w(X)|X) = w(X), E(X|X) = X, E(w(X)Y|X) = w(X)E(Y|X), w : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je Borelovo preslikavanje.

3. Ako su X i Y nezavisne slučajne promjenljive, tada je $E(Y|X) = EY$.

4. $EE(Y|X) = EY$. Tvrđenje ćemo dokazati u apsolutno neprekidnom slučaju.

$$EE(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|X = x)\varphi_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\varphi(x,y)}{\varphi_1(x)} dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi_2(y)dy = EY.$$

U stohastici se sa $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ označava prostor slučajnih promjenljivih (zadatih na (Ω, \mathcal{F}, P)) sa konačnim drugim momentom. Dakle, $X \in L^2$ ako je $EX^2 < \infty$.

Zadaćemo preslikavanje $(X, Y) = EXY$, gdje su $X, Y \in L^2$. Dakle, paru (X, Y) se dodjeljuje realni broj.

Lako se provjerava: ako su $X, Y, Z \in L^2$ tada važi

$$\begin{aligned} (aX + bY, Z) &= a(X, Z) + b(Y, Z), \quad a, b \in \mathbf{R} \\ (X, X) &\geq 0 \\ (X, X) = 0 &\Rightarrow X = 0. \end{aligned}$$

Dakle (X, Y) je skalarni proizvod. Pokazuje se da je prostor L^2 snabdjeven normom

$$\|X\| = (X, X)^{\frac{1}{2}}$$

kompletan. Dakle, prostor L^2 snabdjeven sa gore zadatim skalarnim proizvodom je Hilbertov. Uobičajeno se L^2 naziva Hilbertovim prostorom slučajnih veličina sa konačnim drugim momentom.

Neka je (X, Y) slučajni vektor i neka je $w : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ Borelovo preslikavanje. Slučajnu promjenljivu $w(X)$ nazivamo ocjenom slučajne promjenljive Y .

DEFINICIJA 1.1 *Ocjena $w^*(X)$ je najbolja ako je*

$$E(Y - w(X))^2 \geq E(Y - w^*(X))^2 \text{ tj. } \|Y - w(X)\| \geq \|Y - w^*(X)\|$$

za proizvoljno Borelovo preslikavanje w .

Teorema 1.1 $w^*(X) = E(Y|X)$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright E(Y - w(X))^2 &= E(Y - w^*(X) + w^*(X) - w(X))^2 \geq \\ E(Y - w^*(X))^2 + 2E(Y - w^*(X))(w^*(X) - w(X)) &= E(Y - w^*(X))^2. \end{aligned}$$

Naime

$$\begin{aligned} E(Y - w^*(X))(w^*(X) - w(X)) &= EE((Y - w^*(X))(w^*(X) - w(X))|X) = \\ &= (\text{koristimo svojstvo 2}) E(w^*(X) - w(X))E(Y - w^*(X)|X) = 0. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Potreba za ocjenjivanjem se pojavljuje u slučajevima kada je X dostupna, a Y nedostupna slučajna promjenljiva. Na primjer, X je temperatura, a Y vlažnost na nekom lokalitetu i dostupni su podaci o temperaturi, a nedostupni o vlažnosti. U tim okolnostima na osnovu trenutne temperature x nepoznatu trenutnu vlažnost ocjenjujemo sa $w^*(x)$.

U teoriji ocjenjivanja, funkcija w^* se naziva funkcija regresije. Tačnost ocjene se "mjeri" parametrom $\Delta = E(Y - w^*(X))^2$.

Primjer 1.1 $(X, Y) : \mathcal{U}(D)$, $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < x\}$.

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = 2, (x, y) \in D, \varphi_1(x) &= \int_0^x 2dy = 2x, 0 < x < 1, w^*(x) = \int_0^x y\varphi(y|x)dy = \frac{x}{2}, 0 < x < 1. \\ \Delta = E\left(Y - \frac{X}{2}\right)^2 &= \int_D \int 2\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 dx dy = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Primjer 1.2 *Naći očekivani broj bacanja kocke do registrovanja tri uzastopne šestice.*

Neka je X_3 broj bacanja kocke do registrovanja tri uzastopne šestice, X_2 broj bacanja kocke do registrovanja dvije uzastopne šestice, X_1 broj bacanja kocke do registrovanja šestice.

$$X_3|X_2 : \begin{array}{cccc} x+1 & x+1+3 & x+1+4 & \dots \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}P\{X_3=3\} & \frac{5}{6}P\{X_3=4\} & \dots \end{array}$$

$$\begin{aligned} E(X_3|X_2 = x) &= (x+1)\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}(P\{X_3=3\} + P\{X_3=4\} + \dots)\right) + \frac{5}{6}(3P\{X_3=3\} + 4P\{X_3=4\} + \dots) \\ (x+1) + \frac{5}{6}EX_3 &\Rightarrow E(X_3|X_{\text{@}}) = X_2 + 1 + \frac{5}{6}EX_3 \Rightarrow EE(X_3|X_{\text{@}}) = EX_3 = EX_2 + 1 + \frac{5}{6}EX_3 \Rightarrow \\ &EX_3 = 6(EX_2 + 1). \end{aligned}$$

Istovjetnim postupkom se dobija $EX_2 = 6(EX_1 + 1) \Rightarrow EX_2 = 6(6 + 1) \Rightarrow EX_3 = 6^3 + 6^2 + 6 = 258$.

Primjer 1.3 Neka je slučajna promjenljiva X jednaka broju bacanja novčića do padanja prvog pisma, a Y broju bacanja novčića do padanja drugog pisma. Naći raspodjelu slučajne promjenljive Y te $E(X|Y)$, $E(Y|X)$ i EY .

► Standardnim postupkom se dobija raspodjela slučajne promjenljive Y , a računanjem $E(Y|X = k)$ i $E(X|Y = l)$ dobijamo funkcije koje određuju uslovno matematičko očekivanje.

$$Y : \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & \dots \\ \frac{1}{2^2} & 2\frac{1}{2^3} & 3\frac{1}{2^4} & \dots \end{array}, \quad EY = 4,$$

$$Y|X = k : \begin{array}{cccc} k+1 & k+2 & k+3 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \dots \end{array}, \quad E(Y|X = k) = k + 2 \Rightarrow E(Y|X) = X + 2,$$

$$X|Y = l : \begin{array}{cccc} l-1 & l-2 & l-3 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \dots \end{array}, \quad E(X|Y = l) = l - 2 \Rightarrow E(X|Y) = X - 2. \blacktriangleleft$$

Primjer 1.4 Slučajna promjenljiva X ima $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodjelu, a slučajna promjenljiva Y pri uslovu $X = n$ ima $\mathcal{B}(n, p)$ raspodjelu. Naći $E(Y|X)$, $E(X|Y)$, EY .

$$\blacktriangleright P\{Y = k|X = n\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad E(Y|X = n) = np \Rightarrow$$

$$E(Y|X) = pX, \quad EY = EE(Y|X) = EpX = \lambda p.$$

$$P\{Y = k\} = \sum_{n=k}^{\infty} P\{Y = k|X = n\} P\{X = n\} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$P\{X = k|Y = n\} = \frac{P\{Y = n|X = k\} P\{X = k\}}{P\{Y = n\}} = \frac{(\lambda(1-p))^{k-n}}{(k-n)!} e^{-\lambda(1-p)},$$

$$k = n, n+1, \dots, \quad E(X|Y = n) = \sum_{k=n}^{\infty} k P\{X = k|Y = n\} = \lambda(1-p) + n \Rightarrow$$

$$E(X|Y) = \lambda(1-p) + Y. \blacktriangleleft$$

Primjer 1.5 U kutiji se nalazi 10 bijelih i 10 crnih kuglica. Iz kutije se po modelu bez vraćanja, u prvoj seriji vadi 8 kuglica, a zatim se po istom modelu u drugoj seriji vadi još 8 kuglica. Neka je X broj izvađenih bijelih kuglica u prvoj seriji, a Y broj izvađenih bijelih kuglica u drugoj seriji. Naći raspodjelu slučajnog vektora (X, Y) te $E(Y|X)$ i EY .

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P\{X = k, Y = l\} &= \frac{\binom{10}{k} \binom{10}{8-k} \binom{10-k}{l} \binom{2+k}{8-l}}{\binom{20}{8} \binom{12}{8}}, P\{Y = l|X = k\} = \frac{\binom{10-k}{l} \binom{2+k}{8-l}}{\binom{12}{8}}, \\ 0 \leq k \leq 8, 0 \leq l \leq 8, 6 \leq k+l \leq 10, E(Y|X = k) &= 8 \frac{10-k}{12} = \frac{20-2k}{3} \Rightarrow \\ E(Y|X) = \frac{20-2X}{3} \Rightarrow EY = EE(Y|X) &= \frac{20-2 \cdot 4}{3} = 4. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Primjer 1.6 Na brojač padaju kosmičke čestice. Neka slučajna promjenljiva X predstavlja broj čestica koje padnu na brojač u toku vremena T i neka je $X : \mathcal{P}(\lambda T)$. Svaka čestica koja padne na brojač registruje se nezavisno od ostalih i to sa vjerovatnoćom p , $0 < p < 1$. Neka je Y broj registrovanih čestica. Naći $E(X|Y)$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright P\{Y = m\} &= \sum_{k=m}^{\infty} P\{Y = m|X = k\} P\{X = k\} = \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} p^m q^{k-m} \frac{(\lambda T)^k}{k!} = \\ &= \frac{(p\lambda T)^m}{m!} e^{-p\lambda T}, m = 0, 1, 2, \dots, q = 1 - p; P\{X = k|Y = m\} = \\ &= \frac{P\{Y = m|X = k\} P\{X = k\}}{P\{Y = m\}} = \frac{(q\lambda T)^{k-m}}{(k-m)!} e^{-q\lambda T}, k = m, m+1, m+2, \dots, \\ E(X|Y = m) &= \sum_{k=m}^{\infty} k \frac{(q\lambda T)^{k-m}}{(k-m)!} e^{-q\lambda T} = m + q\lambda T \Rightarrow E(X|Y) = Y + q\lambda T. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Primjer 1.7 $X_1 : \mathcal{U}(0, 1)$, $(X_2|X_1 = x_1) : \mathcal{U}(x_1, 1)$, $(X_3|X_2 = x_2) : \mathcal{U}(x_2, 1)$, Naći $\varphi_2(x_2)$, $\varphi(x_1|x_2)$, EX_n .

$$\begin{aligned} \varphi(x_2|x_1) &= \frac{1}{1-x_1}, \varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_2|x_1)\varphi_1(x_1) = \frac{1}{1-x_1}, 0 < x_1 < x_2 < 1; \varphi_2(x_2) = \int_0^{x_2} \varphi(x_1, x_2) dx_1 = \\ &= \ln \frac{1}{1-x_2}, 0 < x_2 < 1; \varphi(x_1|x_2) = \frac{\varphi(x_1, x_2)}{\varphi_2(x_2)} = \frac{1}{(x_1-1)\ln(1-x_2)}, 0 < x_1 < x_2 < 1. \\ E(X_2|X_1 = x_1) &= \int_{x_1}^1 x_2 \varphi(x_2|x_1) dx_2 = \int_{x_1}^1 \frac{x_2}{1-x_1} dx_2 = \frac{1+x_1}{2} = h(x_1) \Rightarrow \\ E(X_2|X_1) &= \frac{1+EX_1}{2} \Rightarrow EX_2 = EE(X_2|X_1) = \frac{1+EX_1}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Po analogiji imamo, $EX_3 = \frac{1+EX_2}{2} = \frac{7}{8}$, ..., $EX_n = \frac{1+EX_{n-1}}{2} = \frac{2^n-1}{2^n}$.

Primjer 1.8 Neka su X_1, X_2, \dots, X_n nezavisne, jednako raspodijeljene slučajne promjenljiva sa $\mathcal{U}(0, 1)$ raspodjelom. Naći $E(Y_1|Y_n)$ i $E(Y_n|Y_1)$.

$$\blacktriangleright f(y_1|y_n) = \frac{f(y_1, y_n)}{h(y_n)} = \frac{(n-1)(y_n - y_1)^{n-2}}{y_n^{n-1}}, \quad 0 < y_1 < y_n < 1,$$

$$E(Y_1|Y_n = y_n) = \int_0^{y_n} y_1 f(y_1|y_n) dy_1 = \frac{y_n}{n} \Rightarrow E(Y_1|Y_n) = \frac{Y_n}{n}.$$

Slično se dobija $E(Y_n|Y_1) = nY_1$. ◀

Primjer 1.9 *Neka su X_1, X_2, \dots, X_n nezavisne, jednako raspodijeljene slučajne veličine sa $\mathcal{U}(0, 1)$ raspodjelom. Izračunati $E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k | Y_n\right)$ i $E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k | Y_1\right)$.*

► Zbog linearnosti operatora matematičkog očekivanja imamo,

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k | Y_n\right) = E(X_1 | Y_n).$$

Nađimo raspodjelu za $X_1 | Y_n = v$, $0 < v < 1$. Imamo,

$$F(u|v) = \lim_{h \rightarrow 0} P\{X_1 < u | v \leq Y_n < v + h\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P\{X_1 < u, v \leq Y_n < v + h\}}{P\{v \leq Y_n < v + h\}}.$$

Očigledno je $F(u|v) = 1$, $u > v$. Dalje,

$$F(u|v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(n-1)uv^{n-2}h + o(h)}{nv^{n-1}h + o(h)} = \frac{n-1}{n} \frac{u}{v}, \quad u \leq v.$$

Na kraju, računajući Lebeg-Stiltjesov integral i uzimajući u obzir skok koji funkcija $F(u|v)$ ima u tački $u = v$, dobijamo funkciju koja određuje traženo uslovno matematičko očekivanje. Imamo,

$$E(X_1 | Y_n = v) = \int_{\mathbb{R}} u dF(u|v) = \frac{n-1}{n} \int_0^v \frac{u}{v} du + \frac{1}{n} v = \frac{n+1}{2n} v.$$

Dakle, $w(v) = \frac{n+1}{2n} v$ pa je traženo $E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k | Y_n\right) = \frac{n+1}{2n} Y_n$. Sprovodeći identični postupak, dobija se $E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k | Y_1\right) = \frac{n+1}{2} Y_1$.

Primjer 1.10 *Na intervalu $(0, 1)$ slučajno se biraju dvije tačke, a zatim se na intervalu koji*

one formiraju slučajno bira tačka T . Naći raspodjelu slučajne promjenljive X koja je jednaka apscisi tačke T i naći ET .

Primjer 1.11 Slučajna promjenljiva X ima $\mathcal{U}(0,1)$ raspodjelu, a $Y|X = x : \mathcal{B}(n, x)$. Naći raspodjelu slučajne promjenljive Y i EY .

$$E(Y|X = x) = nx \Rightarrow E(Y|X) = nX \Rightarrow EY = EE(Y|X) = EnX = \frac{n}{2}.$$

Primjenjujući formulu potpune vjerovatnoće u apsolutno neprekidnom slučaju, dobijamo

$$P\{Y = k\} = \int_0^1 P\{Y = k|X = x\}\varphi_1(x)dx = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}dx = \binom{n}{k} B(k+1, n-k+1) = \frac{1}{n+1},$$

$$k = 0, 1, \dots, n.$$

2 Karakteristične funkcije

DEFINICIJA 2.1 Neka je X slučajna promjenljiva čija je funkcija raspodjele $F_X(x)$. **Karakteristična funkcija slučajne promjenljive X u oznaci**

$$f_X(t) := Ee^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), t \in \mathbf{R}.$$

Primijetimo, $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ i funkcija raspodjele postoji za svaku slučajnu promjenljivu. Integral sa kojim je definisana karakteristična funkcija apsolutno konvergira odakle slijedi konvergencija samog integrala. Provjerimo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1.$$

Ako je raspodjela slučajne promjenljive X diskretnog tipa tj. $P\{X = x_i\} = p_i$, $i \in I$, tada je

$$f_X(t) = \sum_{i \in I} p_i e^{eti}.$$

Ako je slučajna promjenljiva X apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom $g(x)$ tada je

$$f_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(x) dx.$$

Koristi se i sinonim: **karakteristična funkcija za raspodjelu** X . Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$ se u Analizi naziva Furijeova transformacija funkcije $F(x)$.

Potražimo karakterističnu funkciju slučajne promjenljive $X : \mathcal{N}(0, 1)$.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad f'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \sin tx e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin tx de^{-\frac{x^2}{2}} =$$

(parcijalna int) $= -tf(t) \Rightarrow f(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}; f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$ te je $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Iz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x \sin tx| e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty,$$

slijedi da integral dobijen formalnim diferenciranjem ravnomjerno konvergira po t te je diferenciranje bilo korektno.

Svojstva karakteristične funkcije.

1. $f(0) = 1, |f(t)| \leq 1, f(-t) = \overline{f(t)}$.
2. Ako je $Y = aX + b, a, b \in \mathbf{R}$, tada je $f_Y(t) = f_X(at)e^{itb}$.
 $f_Y(t) = E^{it(aX+b)} = Ee^{iatX+itb} = f_X(at)e^{itb}$.
3. Funkcija $f(t)$ je ravnomjerno neprekidna na \mathbf{R} .

$$|f(t+h) - f(t)| = |Ee^{i(t+h)X} - Ee^{itX}| = |Ee^{itX}(e^{iXh} - 1)| \leq E|e^{itX}| |e^{iXh} - 1| =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{ixh} - 1| dF(X) \rightarrow 0, h \rightarrow 0.$$

Konvergencija slijedi na osnovu Lebegove konvergencije o dominantnoj konvergenciji, a čiju primjenu obezbjeđuje aproksimacija $|e^{ixh} - 1| \leq 2$.

4. Ako za neko $n \in \mathbb{N}$ postoji EX^n , tada za svako $k \leq n$ postoji $f^{(k)}(t)$ i važi

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} EX^k + o(t^n), t \rightarrow 0.$$

Formalnim diferenciranjem dobijamo $f^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} dF(x)$. Korektnost diferenciranja slijedi kao posljedica aproksimacije

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(ix)^k e^{itx}| dF(x) = E|X|^k < \infty.$$

Konstatujemo, $f^{(k)}(0) = i^k EX^k$. I na kraju

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(t^n) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} EX^k + o(t^n), t \rightarrow 0.$$

5. Ako postoji $f^{(2k)}(0)$, tada je $EX^{2k} < \infty$. (bez dokaza)

6. Ako su X_1, \dots, X_n nezavisne slučajne promjenljive, tada je $f_{\sum_{k=1}^n X_k}(t) = \prod_{k=1}^n f_{X_k}(t)$.

$$f_{\sum_{k=1}^n X_k}(t) = E e^{it \sum_{k=1}^n X_k} = E \prod_{k=1}^n e^{itX_k} = \prod_{k=1}^n f_{X_k}(t).$$

Teorema 2.1 *Bohner-Hinčinova teorema.* Funkcija $f(t)$ je karakteristična funkcija neke slučajne promjenljive ako i samo ako važi 1. $f(0) = 1$, 2. $|f(t)| \leq 1$, 3. $f(t)$ je neprekidna 4. $f(t)$ je nenegativno definitivna tj. za svaku kolekciju realnih brojeva t_1, \dots, t_n i svaku kolekciju kompleksnih brojeva z_1, \dots, z_n važi $\sum_{j,k=1}^n f(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geq 0, n = 1, 2, \dots$

U konkretnim slučajevima je provjera nenegativne definitnosti težak zadatak. Zbog toga su ustanovljene teoreme tipa ako-tada i do cilja tj. verifikacije da je data funkcija karakteristična se brzo dolazi. Navešćemo primjer.

Teorema 2.2 *Pojina teorema.* Ako je funkcija $f(t)$ neprekidna, konveksna, parna, nenegativna, $f(0) = 1, f(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \pm\infty$, tada je $f(t)$ karakteristična funkcija.

Primjenom Pojine teoreme lako se provjerava da je $f(t) = e^{-|t|}$ karakteristična funkcija.

Teorema 2.3 *Levijeva formula inverzije.* Ako su a i b tačke neprekidnosti funkcije raspodjele $F(x)$ i ako je $f(t)$ odgovarajuća karakteristična funkcija, tada je

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} f(t) dt.$$

Posljedice. a) Ako je karakteristična funkcija $f(t)$ apsolutno integrabilna na \mathbf{R} , tada je odgovarajuća slučajna promjenljiva (raspodjela) apsolutno neprekidnog tipa i za odgovarajuću funkciju gustine $g(x)$ važi

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t) dt.$$

b) Ako je slučajna promjenljiva X diskretnog tipa, tada za svaku realizaciju x važi

$$P\{X = x\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-itx} f(t) dt.$$

Karakterističnim funkcijama se uspostavlja preslikavanje sa skupa funkcija raspodjele (sa skupa raspodjela) na skup karakterističnih funkcija. Teoremom jedinstvenosti se ustanovljava da je preslikavanje 1 – 1.

U dokazu teoreme jedinstvenosti za karakteristične funkcije koristimo Stonovu teoremu.

Teorema 2.4 (Stone) *Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[-l, l]$ i $f(-l) = f(l)$. Za $\forall \varepsilon > 0$ postoji trigonometrijski polinom*

$$T_n(x) = \sum_{v=-n}^n a_v e^{i\pi v \frac{x}{l}}$$

takav da je $\sup_{[-l, l]} |T_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Teorema 2.5 (Teorema jedinstvenosti) *Neka su F i G funkcije raspodjele koje imaju istu karakterističnu funkciju na \mathbf{R} tj. za svako $t \in \mathbf{R}$ važi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x). \quad (2.1)$$

Tada je $F = G$.

Fiksirajmo $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$), $\varepsilon > 0$ i formirajmo funkciju $f^{(\varepsilon)}$ za koju važi:

$$f^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 0, & x < a - \varepsilon, x \geq b, \\ \frac{x-a+\varepsilon}{\varepsilon}, & a - \varepsilon \leq x < a, \\ 1, & a \leq x < b - \varepsilon, \\ \frac{b-x}{\varepsilon}, & b - \varepsilon \leq x < b. \end{cases}$$

Dokažimo da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x) dG(x). \quad (2.2)$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $[a - \varepsilon, b] \subset [-n, n]$ i neka je $(\delta_n, n \in \mathbb{N})$ takav niz da je $\delta_n \geq 0$ i $\delta_n \downarrow 0, n \rightarrow \infty$. Funkcija $f^{(\varepsilon)}$ ispunjava uslove Stonove teoreme te postoji konačna suma

$$f_n^{(\varepsilon)}(x) = \sum_k a_k e^{\frac{i\pi x k}{n}}$$

tako da važi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(\varepsilon)}(x) - f_n^{(\varepsilon)}(x)| \leq \delta_n.$$

Funkciju $f_n^{(\varepsilon)}$ periodično produžimo na \mathbb{R} . Primijetimo

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^{(\varepsilon)}(x)| \leq 2.$$

Iz (2.1) slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)}(x) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)}(x) dG(x).$$

Imamo

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x) dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x) dG(x) \right| = \left| \int_{-n}^n f^{(\varepsilon)}(x) dF(x) - \int_{-n}^n f^{(\varepsilon)}(x) dG(x) \right| \leq \\
& \left| \int_{-n}^n f_n^{(\varepsilon)}(x) dF(x) - \int_{-n}^n f_n^{(\varepsilon)}(x) dG(x) \right| + 2\delta_n \leq \\
& \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)}(x) dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)}(x) dG(x) \right| + 2\delta_n + 2F([-n, n]^c) + 2G([-n, n]^c), \quad (2.3)
\end{aligned}$$

gdje je $F(A) = \int_A dF(x)$ i $G(A) = \int_A dG(x)$. Puštajući da $n \rightarrow \infty$ zaključujemo da (2.3) teži ka 0. Ovim je dokazana jednakost (2.2).

Primijetimo $f^{(\varepsilon)}(x) \rightarrow I_{[a,b]}(x)$ kad $\varepsilon \rightarrow 0$. Na osnovu teoreme o dominantnoj konvergenciji iz (2.2) slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_{[a,b]}(x) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{[a,b]}(x) dG(x)$$

tj. $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. Zbog proizvoljnosti a i b zaključujemo da je $F(x) = G(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$. ♦

DEFINICIJA 2.2 *Raspodjela slučajne promjenljive X je simetrična ako za svaki Borelov skup B važi $P\{X \in B\} = P\{X \in (-B)\} = P\{(-X) \in B\}$ tj. slučajne promjenljive X i $-X$ imaju istu raspodjelu.*

Lema 2.1 *Karakteristična funkcija je parna \Leftrightarrow odgovarajuća raspodjela je simetrična \Leftrightarrow karakteristična funkcija je realna.*

Pretpostavimo da je karakteristična funkcija parna. Imamo $f_X(t) = f_X(-t) = f_{-X}(t)$ na osnovu teoreme jedinstvenosti zaključujemo da promjenljive X i $-X$ imaju istu raspodjelu tj. raspodjela promjenljive X je simetrična.

Pretpostavimo da je raspodjela slučajne promjenljive X simetrična. Imamo

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin tx dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF(x).$$

Pretpostavimo da je karakteristična funkcija realna. Imamo $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF(x) = f(-t)$.

Primjer 2.1 Naći karakterističnu funkciju slučajne promjenljive $S_n : \mathcal{B}(n, p)$.

Neka je I_A indikator događaja A , $p(A) = p$. Kako je $I_A : \begin{matrix} 0 & 1 \\ q & p \end{matrix}$, $q = 1 - p$, imamo $f_{I_A}(t) = pe^{it} + q$. Polazeći od $S_n = I_{A_1} + \dots + I_{A_n}$, gdje je A_1 događaj da se u prvom opitu iz serije od n ponavljanja ostvari uspjeh, ..., A_n je događaj da se u n -tom opitu iz serije ostvari uspjeh, dobijamo

$$f_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n f_{I_{A_k}}(t) = (pe^{it} + q)^n.$$

Primjer 2.2 Naći karakterističnu funkciju slučajne promjenljive $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Pokažimo da $\frac{X-m}{\sigma} : \mathcal{N}(0, 1)$.

$$P\left\{\frac{X-m}{\sigma} < t\right\} = P\{X < \sigma t + m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\sigma t + m} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left(\frac{x-m}{\sigma} = u\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ \Rightarrow \frac{X-m}{\sigma} = X^* : \mathcal{N}(0, 1), X = \sigma X^* + m; f_X(t) = f_{\sigma X^* + m}(t) = e^{itm} f_{X^*}(\sigma t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Primjer 2.3 a) Slučajna promjenljiva $X : \mathcal{P}(\lambda)$. Naći $f_X(t)$, EX , DX .

b) Slučajne promjenljive X_1, \dots, X_n su nezavisne sa $\mathcal{P}(\lambda_1), \dots, \mathcal{P}(\lambda_n)$ raspodjelama. Dokazati da $\sum_{k=1}^n X_k : \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)$.

$$a) f_X(t) = \sum_{k=0}^n e^{ikt} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t e^{it})^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(t e^{it} - 1)} \cdot f'(0) = iEX \Rightarrow EX = \lambda; \\ f''(0) = i^2 EX^2 \Rightarrow EX^2 = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow DX = EX^2 - (EX)^2 = \lambda.$$

$$b) f_{\sum_{k=1}^n X_k}(t) = \prod_{k=1}^n f_{X_k}(t) = e^{\sum_{k=1}^n \lambda_k (t e^{it} - 1)} \Rightarrow (\text{t. jedinstvenosti}) \sum_{k=1}^n X_k : \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right).$$

Primjer 2.4 a) Slučajne promjenljive X_1, \dots, X_n su nezavisne sa $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \dots, \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ raspodjelama. Dokazati da $\sum_{k=1}^n X_k : \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^n m_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right)$.

b) Slučajne promjenljive X_1, \dots, X_n su nezavisne jednako raspodijeljene sa $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodjelom. Dokazati da $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k : \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

$$f_{\sum_{k=1}^n X_k}(t) = \prod_{k=1}^n f_{X_k}(t) = e^{it \sum_{k=1}^n m_k - \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^n X_k : \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^n m_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right).$$

Gama raspodjela

Gama funkcija. $\Gamma(a) := \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$, $a > 0$. Pokazuje se da važi $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}$.

DEFINICIJA 2.3 *Slučajna promjenljiva X ima gama raspodjelu sa parametrima α i ν , koristi se zapis $X : \Gamma(\nu, \alpha)$, ako je odgovarajuća funkcija gustine*

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \alpha^\nu x^{\nu-1} e^{-\alpha x}, x > 0, \alpha > 0, \nu > 0.$$

Potražimo karakterističnu funkciju slučajne promjenljive $X : \Gamma(\nu, \alpha)$.

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} \alpha^\nu e^{itx} x^{\nu-1} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \int_0^{\infty} \alpha^\nu x^{n+\nu-1} e^{-\alpha x} dx = (\alpha x = u) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \int_0^{\infty} u^{n+\nu-1} e^{-u} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\nu)}{n! \Gamma(\nu)} \left(\frac{it}{\alpha}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\nu}{n} \left(-\frac{it}{\alpha}\right)^n = \left(1 - \frac{it}{\alpha}\right)^{-\nu}. \end{aligned}$$

Koristili smo uopšteni binomni koeficijent

$$\binom{t}{k} := \frac{t(t-1)\dots(t-k+1)}{k!}, t \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}_0.$$

Ako su X_1, \dots, X_n nezavisne slučajne promjenljive sa $\Gamma(\nu_1, \alpha), \dots, \Gamma(\nu_n, \alpha)$ raspodjelama, tada $\sum_{k=1}^n X_k : \Gamma\left(\sum_{k=1}^n \nu_k, \alpha\right)$. Zaista

$$f_{\sum_{k=1}^n X_k}(t) = \prod_{k=1}^n f_{X_k}(t) = \left(1 - \frac{it}{\alpha}\right)^{-\sum_{k=1}^n \nu_k} \Rightarrow \sum_{k=1}^n X_k : \Gamma\left(\alpha, \sum_{k=1}^n \nu_k\right).$$

Primijetimo, ako je $X : \mathcal{E}(\lambda)$ možemo koristiti i zapis $X : \Gamma(1, \lambda)$. Naime, eksponencijalna raspodjela je specijalan slučaj gama raspodjele. Ako su X_1, \dots, X_n nezavisne slučajne promjenljive i svaka ima $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodjelu, tada $\sum_{k=1}^n X_k : \Gamma(n, \lambda)$.

Komentar. Neka je X slučajna promjenljiva koja je jednaka broju neuspjeha do registrovanja r tog uspjeha, vjerovatnoća uspjeha je p .

$$P\{X = k\} = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k = \binom{-r}{k} p^r (-q)^k, k = 0, 1, 2, \dots$$

Ovim je objašnjeno zbog čega se koristi naziv negativna binomna raspodjela.

Primjer 2.5 *Slučajne promjenljive X i Y su nezavisne i svaka ima karakterističnu funkciju $f(t) = (2 - e^{it})^{-1}$. Naći raspodjelu slučajne promjenljive $Z = X + Y$.*

$$\blacktriangleright f(t) = \frac{1}{2 - e^{it}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{it}/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{int}}{2^{n+1}} \implies P\{X = k\} = \frac{1}{2^{k+1}}, k = 0, 1, \dots$$

Koristeći razvoj $(1 - z)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$, dobijamo

$$f_Z(t) = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{e^{it}}{2}\right)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} e^{int}.$$

Iz teoreme jedinstvenosti, dobija se

$$P\{Z = k\} = \frac{k+1}{2^{k+2}}, k = 0, 1, 2, \dots \blacktriangleleft$$

Primjer 2.6 *Neka su X i Y nezavisne slučajne promjenljive sa raspodjelama $P\{X = k\} = 1/2^k, k = 1, 2, \dots, P\{Y = k\} = 2^{k-1}/3^k, k = 1, 2, \dots$. Naći raspodjelu slučajne promjenljive $Z = X + Y$.*

$$\blacktriangleright f_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{itk}}{2^k} = \frac{e^{it}}{2 - e^{it}}, f_Y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1} e^{itk}}{3^k} = \frac{e^{it}}{3 - 2e^{it}}.$$

$$f_Z(t) = f_X(t) f_Y(t) = \frac{e^{2it}}{(2 - e^{it})(3 - 2e^{it})}.$$

Uvedimo smjenu $w = e^{it}$ i funkciju $g(w) = \frac{w^2}{(2-w)(3-2w)}$ razvijmo u red. Dobijamo

$$g(w) = \frac{1}{2} + \frac{4}{w-2} - \frac{9}{2} \frac{1}{2w-3} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{1}{2^{k-1}} \right] e^{itk}.$$

Dakle, $P\{Z = k\} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{1}{2^{k-1}}, k = 2, 3, \dots \blacktriangleleft$

Primjer 2.7 *Naći raspodjelu čija je karakteristična funkcija $f(t) = \frac{3}{8-5e^{-3it}}$.*

Primjer 2.8 Slučajne promjenljive X i Y su nezavisne, njihove karakteristične funkcije su $f_X(t) = \frac{3e^{it}-1}{4e^{it}-2}$, $f_Y(t) = \cos^4(t)$. Izračunati $P\{X \leq Y + 1\}$ i EY^9 .

$$f_X(t) = \frac{3}{4} + \left[8e^{it} \left(1 - \frac{1}{2e^{it}} \right) \right]^{-1} = \frac{3}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(-n-1)t}}{2^{n+3}} \Rightarrow X : \begin{array}{cccc} 0 & -1 & -2 & -3 & \dots \\ \frac{3}{4} & 2^{-3} & 2^{-4} & 2^{-5} & \dots \end{array}$$

$$f_Y(t) = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^4 = \frac{1}{2^4} \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} e^{itk} e^{-it(4-k)} \Rightarrow Y : \begin{array}{cccc} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{array}$$

Zbog simetričnosti raspodjele slučajne promjenljive Y dobijamo $EY^9 = 0$ i

$$P\{X \leq Y + 1\} = 1 - P\{X + Y \geq 2\} = 1 - P\{X = 0, Y = 2\} - P\{X = -2, Y = 4\} - P\{X = -1, Y = 4\} - P\{X = 0, Y = 4\} = \frac{193}{256}.$$

Primjer 2.9 X i Y su nezavisne slučajne promjenljive, $X : \mathcal{U}(-0,5; 0,5)$, $Y : \begin{array}{cc} -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{array}$
Metodom karakterističnih funkcija naći raspodjelu slučajne promjenljive $Z = X + Y$.

Primjer 12. Neka su X_1, X_2, \dots nezavisne, jednako raspodijeljene slučajne promjenljive i neka je $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Ako je $0 < P\{X_1 \text{ je djeljivo sa } 2\} < 1$, tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{Y_n \text{ je djeljivo sa } 2\} = \frac{1}{2}$. Dokazati!

► Neka je $P\{X_1 = k\} = p_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Kako je $f_{X_1}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{itk}$ to je

$$f_{X_1}(\pi) = (p_0 + p_{-2} + p_2 + \dots) - (p_1 + p_{-1} + p_3 + p_{-3} + \dots) = P\{X_1 \text{ je djeljivo sa } 2\} - P\{X_1 \text{ nije djeljivo sa } 2\}.$$

Očigledno, $f_{Y_n}(t) = f_{X_1}^n(t)$. Sada je

$$P\{Y_n \text{ je djeljivo sa } 2\} - P\{Y_n \text{ nije djeljivo sa } 2\} = \alpha_n - \beta_n,$$

gdje je $\alpha_n = P\{Y_n \text{ je djeljivo sa } 2\}$ i $\beta_n = P\{Y_n \text{ nije djeljivo sa } 2\}$. Primijetimo, $f_{Y_n}(\pi) = f_{X_1}^n(\pi) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ jer je $|f_{X_1}(\pi)| < 1$. Dakle, $\alpha_n - \beta_n \rightarrow 0$ i $\alpha_n + \beta_n = 1$, odakle slijedi $\alpha_n \rightarrow \frac{1}{2}$, $n \rightarrow \infty$. ◀

Primjer 2.10 Dokazati da funkcije a) $f(t) = e^{-i|t|}$, b) $f(t) = \cos t^2$, c) $f(t) = e^{-t^4}$ nisu karakteristične.

a) Funkcija je parna ali nije realna. b) Funkcija nije ravnomjerno neprekidna. c) Ako je funkcija karakteristična, tada je $EX^2 = -f''(0) = 0 \Rightarrow X \stackrel{s.i.}{=} 0 \Rightarrow f_X(t) = 1$, kontradikcija.

DEFINICIJA 2.4 Niz funkcija raspodjele $F_n(x)$ slabo konvergira ka funkciji $F(x)$ ako $F_n(x) \rightarrow F(x)$ za $\forall x \in C(F)$, koristi se zapis $F_n(x) \xrightarrow{w} F(x)$. Ako niz $F_n(x) \xrightarrow{w} F(x)$ pri čemu je $F(x)$ funkcija raspodjele, tada kažemo da niz $F_n(x)$ kompletno konvergira ka $F(x)$ i koristimo zapis $F_n(x) \xrightarrow{c} F(x)$.

DEFINICIJA 2.5 Niz slučajnih promjenljivih $X_n, n = 1, 2, \dots$ u raspodjeli konvergira ka slučajnoj promjenljivoj X , koristimo zapis $X_n \xrightarrow{d} X$ (d -distribution) ako $F_{X_n}(x) \xrightarrow{c} F_X(x)$.

Primjer 2.11 $X_n : \begin{matrix} -n & n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} n = 1, 2, \dots F_n(x) \xrightarrow{w} F(x) = \frac{1}{2}$. Konvergencija nije kompletna.

Teorema 2.6 (Teorema neprekidnosti) Neka je $F_n(x), x \in \mathbf{R}$, niz funkcija raspodjele i neka je $f_n(t), t \in \mathbf{R}$, odgovarajući niz karakterističnih funkcija.

1) Ako $F_n(x) \xrightarrow{k} F(x)$, tada $f_n(t) \Rightarrow f(t), t \in \mathbf{R}$, $f(t)$ je karakteristična funkcija za $F(x)$.

2) Ako za $\forall t \in \mathbf{R}$ postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ i ako je funkcija $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ neprekidna u tački $t = 0$, ona je karakteristična funkcija za neku funkciju raspodjele $F(x)$ i $F_n(x) \xrightarrow{c} F(x)$.

Primjer 2.12 Neka je $X_n, n = 1, 2, \dots$ niz slučajnih promjenljivih sa $\mathcal{U}((-4 - \frac{1}{n}, -4 + \frac{3}{n}) \cup (0, \frac{2}{n}))$ raspodjelom. Metodom karakterističnih funkcija ispitati konvergenciju u raspodjeli datog niza.

$$f_{X_n}(t) = \int_{-4 - \frac{1}{n}}^{-4 + \frac{3}{n}} \frac{n}{6} e^{itx} dx + \int_0^{\frac{2}{n}} \frac{n}{6} e^{itx} dx \rightarrow \frac{2}{3} e^{-4it} + \frac{1}{3} = f_W(t), W : \begin{matrix} -4 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}$$

Primjer 2.13 Slučajne promjenljive $X_j, j = 1, 2, \dots$ su nezavisne i jednako raspodijeljene sa raspodjelom

$$X_j : \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 9 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & & \frac{1}{10} \end{matrix}$$

Neka je

$$Y_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{10^j} X_j, n = 1, 2, \dots$$

Dokazati da niz slučajnih promjenljivih

$$Y_n \xrightarrow{d} W : \mathcal{U}(0, 1), n \rightarrow \infty.$$

$$f_{X_j}(t) = E^{itX_j} = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 e^{itk} = \frac{1}{10} \frac{\sin 5t}{\sin \frac{t}{2}} e^{i\frac{t}{2}}.$$

$$f_{Y_n}(t) = \frac{1}{10^n} \prod_{j=1}^n \frac{\sin 5 \frac{t}{10^j}}{\sin \frac{t}{2 \cdot 10^j}} e^{\frac{9it}{2 \cdot 10^j}} = \frac{1}{10^n} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2 \cdot 10^n}} e^{\frac{it}{2}(1-10^{-n})} \rightarrow 2 \frac{\sin \frac{t}{2}}{t} e^{i\frac{t}{2}} = f_W(t).$$

Koristili $e^{i\varphi} - 1 = 2i \sin \frac{\varphi}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}$; u proizvodu sinusa nakon što sinuse eksplicitno zapišemo dolazi do skraćivanja.

Primjer 2.14 Neka je $X_n, n = 1, 2, \dots$ niz nezavisnih slučajnih promjenljivih sa $\Gamma(1, n + 1)$ raspodjelama. Dokazati da

$$Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k - EX_k}{n} \xrightarrow{R} X : \mathcal{N}(0, 1/2), n \rightarrow \infty.$$

► Znamo $f_{X_k}(t) = (1 - it)^{-k-1}$, $f'_{X_k}(0) = iEX_k \Rightarrow EX_k = k + 1$.

$$\begin{aligned} f_{Y_n}(t) &= \prod_{k=1}^n f_{X_k}\left(\frac{t}{n}\right) e^{-it\frac{k+1}{n}} = \left(1 - \frac{it}{n}\right)^{-\frac{n(n+3)}{2}} e^{-it\frac{n+3}{2}} = e^{-\frac{n(n+3)}{2} \ln\left(1 - \frac{it}{n}\right) - it\frac{n+3}{2}} = \\ &= e^{-\frac{n(n+3)}{2} \left(-\frac{it}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - it\frac{n+3}{2}} = e^{-\frac{(n+3)t^2}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow e^{-\frac{t^2}{4}} = f_X(t), n \rightarrow \infty. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Primjer 2.15 Neka su X_1, X_2, \dots nezavisne, jednako raspodijeljene slučajne promjenljive sa $\mathcal{U}(0, 1)$ raspodjelom i neka je slučajna promjenljiva Y_n n -ta po veličini iz kompleksa $(X_1, X_2, \dots, X_{2n-1})$. Dokazati da niz

$$W_n = \left(Y_n - \frac{1}{2}\right) \sqrt{8n}$$

u raspodjeli konvergira ka slučajnoj promjenljivoj W koja ima $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodjelu.

► Znamo da je gustina slučajne promjenljive Y_n

$$g_n(u) = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!} u^{n-1} (1-u)^{n-1}, 0 < u < 1.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
 f_{W_n}(t) &= f_{Y_n}(\sqrt{8nt})e^{-it\sqrt{2n}} = e^{-it\sqrt{2n}} \int_0^1 e^{i\sqrt{8nt}u} g_n(u) du = [(u - \frac{1}{2})\sqrt{8n} = w] \\
 &= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!\sqrt{8n}} \int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} e^{i\sqrt{8nt}(\frac{1}{2} + \frac{w}{\sqrt{8n}})} g_n(\frac{1}{2} + \frac{w}{\sqrt{8n}}) dw = \\
 &= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!\sqrt{8n}2^{2n-2}} \int_{-\infty}^{\infty} I_{(-\sqrt{2n}, \sqrt{2n})}(w) e^{itw} \left(1 - \frac{w^2}{2n}\right)^{n-1} dw \rightarrow \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itw} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = f_W(t), n \rightarrow \infty, W : \mathcal{N}(0, 1).
 \end{aligned}$$

Koristili smo Stirlingovu formulu i Lebegovu teoremu o dominantnoj konvergenciji.

Primjer 2.16 *Slučajne promjenljive iz niza X_n , $n = 1, 2, \dots$ imaju gustine*

$$g_n(x) = n(1-x)^{n-1}, 0 < x < 1.$$

Neka je $Y_n = nX_n$. Dokazati da niz Y_n u raspodjeli konvergira ka slučajnoj promjenljivoj Y koja ima $\mathcal{E}(1)$ raspodjelu.

$$\begin{aligned}
 f_{Y_n}(t) &= E^{itnX_n} = \int_0^1 n(1-x)^{n-1} e^{intx} dx = [nx = v] \int_0^{\infty} (1-v/n)^{n-1} e^{itv} I_{(0,n)}(v) dv \\
 &\rightarrow \int_0^{\infty} e^{itv} e^{-v} dv = f_Y(t), n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Koristili smo Lebegovu teoremu o dominantnoj konvergenciji i teoremu jedinstvenosti. ◀

Primjer 13. Slučajna veličina X ima $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, raspodjelu. Dokazati da raspodjela slučajne veličine $w_\lambda = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$, kada $\lambda \rightarrow \infty$, konvergira ka raspodjeli slučajne veličine $X : \mathcal{N}(0, 1)$.

$$\blacktriangleright f_{w_\lambda}(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}} e^{\lambda(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1)} = e^{-\frac{t^2}{2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)}, \lambda \rightarrow \infty.$$

Traženi rezultat, sada direktno slijedi iz Obrnute teoreme. ◀

3 Konvergenције nizova slučajnih promjenljivih i granične teoreme

DEFINICIJA 3.1 Niz slučajnih promjenljivih $X_n, n = 1, 2, \dots$ u vjerovatnoći konvergira ka slučajnoj promjenljivoj X , koristi se zapis $X_n \xrightarrow{P} X$, ako je za $(\forall \epsilon > 0), \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\} = 0$.

Neka je $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ niz realnih brojeva. Znamo,

$$\alpha_n \rightarrow \alpha \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geq N)|\alpha_n - \alpha| \leq \epsilon \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbf{N})(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geq N)|\alpha_n - \alpha| \leq \frac{1}{k}.$$

Označimo sa

$$L = \{X_n \rightarrow X\} = \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \leq \epsilon\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \leq \frac{1}{k}\} \in \mathcal{F}.$$

Budući da je $X_n - X$ slučajna promjenljiva, skup $\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{k}\}$ je događaj. Budući da je σ polje događaja zatvoreno u odnosu na prebrojiva presijecanja i uniranja, izvodimo zaključak da je skup L događaj.

DEFINICIJA 3.2 Niz slučajnih promjenljivih X_n skoro izvjesno konvergira ka slučajnoj promjenljivoj X , koristi se zapis $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ (a.s. almost surely), ako je $P\{\omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\} = P(L) = 1$.

Lema 3.1 Neka je $B_k, k = 1, 2, \dots$ niz događaja. $P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = 1 \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbf{N})P(B_k) = 1$.

$U \Rightarrow$ smjeru tvrđenje je očigledno. Dokažimo tvrđenje u \Leftarrow smjeru. $C_1 = B_1, C_2 = B_1 B_2, C_3 = B_1 B_2 B_3, \dots$ Kako $C_k \downarrow$, imamo $P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(C_k) = 1$. Primjenom Silvesterove formule se dokazuje $(\forall k \in \mathbf{N})P(C_k) = 1$

Na osnovu leme zaključujemo, $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbf{N})P\left\{\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \leq \frac{1}{k}\}\right\} = 1 \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbf{N}) \lim_{N \rightarrow \infty} P\left\{\bigcap_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \leq \frac{1}{k}\}\right\} = 1$, posljednja ekvivalencija slijedi iz: $(\forall k \in \mathbf{N}) \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \leq \frac{1}{k}\} = W_N \uparrow$. Dokazali smo

Lema 3.2 $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \leq \epsilon\}\right) = 1,$

Prelaskom na komplementarni događaj, zaključujemo da se lema može formulirati na sljedeći način:

Lema 3.3 $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) \lim_{N \rightarrow \infty} P\left\{\bigcup_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| > \epsilon\}\right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} P\left\{\sup_{n \geq N} |X_n - X| > \epsilon\right\}$
 $= P\left\{\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| > \epsilon\}\right\} = P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_{n,\epsilon}\right) = 0,$ gdje je $A_{n,\epsilon} = \{|X_n - X| > \epsilon\}, n = 1, 2, \dots$

Primijetimo, $P\left\{\bigcup_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| > \epsilon\}\right\} \leq \sum_{n=N}^{\infty} P\{|X_n - X| > \epsilon\}$ te ako za $\forall \epsilon > 0$ red $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n - X| > \epsilon\}$ konvergira konstatujemo: $(\forall \epsilon > 0) \lim_{N \rightarrow \infty} P\left\{\bigcup_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| > \epsilon\}\right\} = 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} X.$

Prisjetimo se jednog tvrdjenja iz Borel-Kantelijeve teoreme. Ako je $A_n, n = 1, 2, \dots$ niz nezavisnih događaja, tada je $P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$ Neka je c konstanta i X_n niz nezavisnih slučajnih promjenljivih. Iz pretpostavljene nezavisnosti promjenljivih X_n slijedi nezavisnost događaja $A_{n,\epsilon} = \{|X_n - c| > \epsilon\}, n = 1, 2, \dots$. Analizu zaključimo sa $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_{n,\epsilon}\right) = 0 \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n - c| > \epsilon\} < \infty.$

Dakle, važi

Lema 3.4 Neka je $X_n, n = 1, 2, \dots$ niz slučajnih promjenljivih, X slučajna promjenljiva i c konstanta.

a) Ako za $\forall \epsilon > 0$ red $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n - X| > \epsilon\}$ konvergira tada $X_n \xrightarrow{a.s.} X.$

b) Ako su promjenljive X_n nezavisne, tada $X_n \xrightarrow{a.s.} c$ ako i samo za $\forall \epsilon > 0$ red $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n - c| > \epsilon\}$ konvergira

Komentar. U nizu događaja $A_{n,\epsilon} = \{|X_n - X| > \epsilon\}, n = 1, 2, \dots,$ gdje su slučajne promjenljive X, X_1, X_2, \dots nezavisne i jednako raspodijeljene sa raspodjelom $X : \begin{matrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix},$ događaji nisu nezavisni. Provjeriti! Ovim je obrazloženo zbog čega u prethodnoj lemi pod a) nemamo ekvivalenciju.

Lema 3.5 Ako $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ tada $X_n \xrightarrow{p} X.$

$X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow (\forall \epsilon > 0) \lim_{N \rightarrow \infty} P\left\{\sup_{n \geq N} |X_n - X| > \epsilon\right\} = 0 \Rightarrow (\forall \epsilon > 0) \lim_{N \rightarrow \infty} P\{|X_N - X| > \epsilon\} = 0$
 jer $\{|X_N - X| > \epsilon\} \subset \left\{\sup_{n \geq N} |X_n - X| > \epsilon\right\}$.

Lema 3.6 Ako $X_n \xrightarrow{p} X$ tada postoji podniz X_{n_k} takav da $X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$.

Iz $P\{|X_n - X| > 1\} \rightarrow 0 \Rightarrow \exists n_1, P\{|X_{n_1} - X| > 1\} < \frac{1}{2}$. Iz $P\{|X_n - X| > \frac{1}{2}\} \rightarrow 0 \Rightarrow \exists n_2 > n_1, P\{|X_{n_2} - X| > \frac{1}{2}\} < \frac{1}{2^2}$. Nastavljajući postupak dolazimo do $n_k > \dots > n_2 > n_1$ i $X_{n_k}, P\{|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\} < \frac{1}{k^2}$. Neka je $\epsilon > 0$. $\exists k_0 \in \mathbf{N}, \frac{1}{k_0} < \epsilon$ te je $\sum_{k=k_0}^{\infty} P\{|X_{n_k} - X| > \epsilon\} \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} P\{|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\} < \infty$.

Primjer 3.1 Neka je $X_n : \mathcal{U}(0, n)$, $n = 1, 2, \dots$ niz nezavisnih slučajnih promjenljivih i neka je $Y_n = \min\{1, X_n\}$. Dokazati da $Y_n \xrightarrow{P} 1$ i $Y_n \not\xrightarrow{a.s.} 1$.

► Neka je $0 < \epsilon < 1$. Imamo

$$P\{1 - Y_n > \epsilon\} = P\{X_n < 1 - \epsilon\} = \frac{1 - \epsilon}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Dakle, $Y_n \xrightarrow{P} 1$. Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, zaključujemo da $Y_n \not\xrightarrow{a.s.} 1$ ◄.

Komentar. U zadacima u kojima ispitujemo p ili $a.s.$ konvergenciju, dovoljno je analizu provesti u slučaju $0 < \epsilon < 1$. Naime, $P\{|X_n - X| > \epsilon_2\} \leq P\{|X_n - X| > \epsilon_1\}$, gdje je $0 < \epsilon_1 < 1, \epsilon_2 \geq 1$.

Lema 3.7 $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$.

Neka je $x \in C(F), \epsilon > 0$.

$$F_X(x - \epsilon) = P\{X < x - \epsilon\} = P\{X < x - \epsilon, X_n < x\} + P\{X < x - \epsilon, X_n \geq x\} \leq P\{X_n < x\} + P\{|X_n - X| > \epsilon\} \Rightarrow F_X(x - \epsilon) - P\{|X_n - X| > \epsilon\} \leq F_{X_n}(x).$$

$$\text{Takođe } F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \epsilon) + P\{|X_n - X| > \epsilon\} \Rightarrow F_X(x - \epsilon) \leq \liminf F_{X_n}(x) \leq \limsup F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \epsilon).$$

Budući da je x proizvoljna tačka neprekidnosti funkcije $F(x)$ i ϵ proizvoljan pozitivan broj, zaključujemo da $F_{X_n} \xrightarrow{c} F(x)$.

Lema 3.8 $X_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} c$.

Znamo, $F_c(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ 1, & x > c \end{cases}$ Neka je $\epsilon > 0$. $P\{|X_n - c| > \epsilon\} \leq P\{X_n < c - \epsilon\} + P\{X_n > c + \epsilon\} \leq P\{X_n < c - \frac{\epsilon}{2}\} + 1 - P\{X_n < c + \frac{\epsilon}{2}\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Primjer 3.2 *Konstruisati niz slučajnih promjenljivih koji konvergira u raspodjeli i ne konvergira u vjerovatnoći.*

► Navešćemo dva niza. a) Neka je X slučajna promjenljivih sa raspodjelom

$$X : \begin{matrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix},$$

neka je $X_n = X, n = 1, 2, \dots$ i $Y = 1 - X$. Slučajne promjenljive X_n i Y imaju istu raspodjelu te $X_n \xrightarrow{d} Y$. Međutim, $|X_n - Y| = 1$ te niz X_n ne konvergira u vjerovatnoći ka slučajnoj promjenljivoj Y .

b) Neka je $X : \mathcal{N}(0, 1)$ i neka je $X_n = -X, n = 1, 2, \dots$. Slučajne promjenljive iz niza X_n i slučajna promjenljiva X imaju istu raspodjelu te $X_n \xrightarrow{d} X$. Neka je ϵ proizvoljan broj veći od 0. Imamo

$$P\{|X_n - X| > \epsilon\} = P\{|X| > \epsilon/2\} \not\rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Dakle niz slučajnih promjenljivih X_n ne konvergira u vjerovatnoći. ◀

U tekstu koji slijedi oznaka $\| \cdot \|$ se odnosi na normu iz prostora L_2 .

DEFINICIJA 3.3 *Niz slučajnih promjenljivih $X_n, n = 1, 2, \dots$ srednjekvadratno konvergira ka slučajnoj promjenljivoj X ako $\|X_n - X\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow E(X_n - X)^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, koristićemo oznaku $X_n \xrightarrow{L_2} X$.*

Lema 3.9 $X_n \xrightarrow{L_2} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$.

Neka je $\epsilon > 0$. $P\{|X_n - X| > \epsilon\} \leq \frac{E(X_n - X)^2}{\epsilon^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Primjer 3.3 a) $X_n : \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} \end{matrix}, n = 2, 3, \dots$

b) $X_n : \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{matrix}, n = 2, 3, \dots$ promjenljive su nezavisne.

a) $X_n \xrightarrow{a.s.} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} 0$, $EX_n^2 = 1$ te niz ne konvergira srednjekvadratno. b) Niz ne konvergira skoro izvjesno, $EX_n^2 = \frac{1}{n} \Rightarrow X_n \xrightarrow{L_2} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} 0$.

Lema 3.10 Ako je niz $X_n, n = 1, 2, \dots$ skoro izvjesno ograničen (tj. postoji interval (a, b) takav da je $(\forall n \in \mathbf{N})P(a < X_n < b) = 1$), tada iz $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L_2} X$.

$$\begin{aligned} \epsilon > 0, E(X_n - X)^2 &= \int_{\omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}} (X_n - X)^2 P(d\omega) + \int_{\omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| < \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}} (X_n - X)^2 P(d\omega) \leq \\ &\frac{\epsilon}{2} + (b-a)^2 P\{|X_n - X| > \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\} \leq \frac{\epsilon}{2} + (b-a)^2 \frac{\epsilon}{2(b-a)^2} = \epsilon, \text{ za } \forall n \geq n_0(\epsilon). \end{aligned}$$

Postojanje brojeva $\frac{\epsilon}{2(b-a)^2}$ i $n_0(\epsilon)$ slijedi iz pretpostavljene konvergencije u vjerovatnoći.

Primjer 3.4 Neka je $X_n, n = 2, 3, \dots$ niz slučajnih promjenljivih sa raspodjelama

$$X_n : \begin{array}{ccc} -n & 0 & n \\ \frac{2}{(n+1)^2} & 1 - \frac{5}{(n+1)^2} & \frac{3}{(n+1)^2} \end{array} .$$

Ispitati konvergencije niza X_n .

► Neka je $0 < \epsilon < 1$. Kako red $\sum_{n=2}^{\infty} P\{|X_n| > \epsilon\} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{(n+1)^2}$ konvergira, zaključujemo da $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$, $X_n \xrightarrow{P} 0$ i $X_n \xrightarrow{d} 0$. Kako je $EX_n^2 = \frac{5n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 5, n \rightarrow \infty$, zaključujemo da $X_n \not\xrightarrow{L_2} 0$. ◀

Primjer 3.5 Neka je $X_n, n = 1, 2, \dots$ niz jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih sa $\mathcal{E}(1)$ raspodjelom. Ispitati konvergencije niza $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}X_n}$.

► Neka je $\epsilon > 0$.

$$P\{Y_n > \epsilon\} = P\left\{X_n < \frac{1}{\epsilon\sqrt{n^3}}\right\} = \int_0^{\frac{1}{\epsilon\sqrt{n^3}}} e^{-u} du = 1 - e^{-\frac{1}{\epsilon\sqrt{n^3}}} \sim \frac{1}{\epsilon\sqrt{n^3}}, n \rightarrow \infty.$$

Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ konvergira to je $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|Y_n| > \epsilon\} < \infty$ te $Y_n \xrightarrow{a.s.} 0$, $Y_n \xrightarrow{P} 0$ i $Y_n \xrightarrow{d} 0$.

Primijetimo,

$$EY_n^2 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{n^3 t^2} dt > \frac{1}{n^3 e} \int_0^1 \frac{dt}{t^2}.$$

Posljednji integral divergira te slučajne promjenljive Y_n ne pripadaju prostoru L_2 . ◀

Primjer 3.6 Neka je $X_n, n = 1, 2, \dots$, niz jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih sa $\mathcal{U}(0, 1)$ raspodjelom i neka je $Y_n = \frac{1}{1+n^4 X_n^2}$. Ispitati konvergencije niza Y_n .

► Neka je $0 < \varepsilon < 1$. Za dovoljno velike n -ove kojima se obezbeđuje da je $\frac{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}}{n^2} < 1$, imamo

$$P\{Y_n > \varepsilon\} = P\left\{\frac{1}{1+n^4 X_n^2} > \varepsilon\right\} = P\left\{X_n < \frac{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}}{n^2}\right\} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}}{n^2}.$$

Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, zaključujemo da $Y_n \xrightarrow{a.s.} 0$, $Y_n \xrightarrow{P} 0$ i $Y_n \xrightarrow{d} 0$. Realizacije niza Y_n su izvjesno sa intervala $(0, 1)$ te iz već konstatovane konvergencije u vjerovatnoći slijedi $Y_n \xrightarrow{L_2} 0$. ◀

Primjer 3.7 Neka je $X_n, n = 1, 2, \dots$ niz nezavisnih, jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih sa $\mathcal{E}(1)$ raspodjelom i neka je $Y_n = \frac{1}{1+nX_n}$. Ispitati konvergencije niza Y_n .

► Neka je $0 < \varepsilon < 1$. Imamo

$$P\{Y_n > \varepsilon\} = P\left\{\frac{1}{1+nX_n} > \varepsilon\right\} = P\left\{X_n < \frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{n}\right\} = \int_0^{\frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{n}} e^{-u} du = 1 - e^{-\frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{n}} = g(\varepsilon, n).$$

Kako $g(\varepsilon, n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, zaključujemo da $Y_n \xrightarrow{P} 0$ i $Y_n \xrightarrow{d} 0$.

Primijetimo, $g(\varepsilon, n) \sim \frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{n}, n \rightarrow \infty$ te red $\sum_{n=1}^{\infty} g(\varepsilon, n), 0 < \varepsilon < 1$, divergira. Dakle, $Y_n \not\xrightarrow{a.s.} 0$. Iz $P\{0 < Y_n < 1\} = 1$ i već dokazane konvergencije u vjerovatnoći zaključujemo $Y_n \xrightarrow{L_2} 0$. ◀

Primjer 3.8 Neka je $X_n, n = 1, 2, \dots$ niz slučajnih promjenljivih sa

$$\mathcal{U}\left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

raspodjelama. Ispitati konvergencije niza X_n .

► $P\left\{\omega : 1 - \frac{1}{n} < X_n(\omega) < 1 + \frac{1}{n}\right\} = 1 \Rightarrow P\{X_n \rightarrow 1\} = 1 \Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} 1, X_n \xrightarrow{P} 1$ i $X_n \xrightarrow{d} 1$. Budući da je izvjesno $0 < Y_n < 2$ zaključujemo da $X_n \xrightarrow{L_2} 1$. ◀

Primjer 3.9 Neka je $X_n, n = 1, 2, \dots$ niz nezavisnih slučajnih promjenljivih sa $\mathcal{U}(0, n)$ raspodjelama. Ispitati konvergencije niza $Y_n = \frac{X_n}{1+X_n}$.

► Neka je $0 < \varepsilon < 1$ i n dovoljno veliko tako da je $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Imamo,

$$P\{|1 - Y_n| > \varepsilon\} = P\{1 - Y_n > \varepsilon\} = P\left\{X_n < \frac{1}{\varepsilon} - 1\right\} = \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Dakle, $Y_n \xrightarrow{p} 1$ i $Y_n \xrightarrow{d} 1$. Primijetimo, $P\{0 < Y_n < 1\} = 1$ te $Y_n \xrightarrow{L_2} 1$. Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|1 - Y_n| > \varepsilon\}$ divergira, zaključujemo da $Y_n \not\xrightarrow{q.s.} 1$. ◀

Primjer 3.10 Neka je $X_n, n = 1, 2, \dots$ niz nezavisnih slučajnih promjenljivih sa

$$\mathcal{U}\left(\left(0, \frac{1}{n}\right) \cup \left(1, 1 + \frac{1}{n^2}\right)\right)$$

raspodjelama. Ispitati konvergencije niza X_n .

► Jednostavno se provjerava da $f_{X_n}(t) \rightarrow 1$ odakle slijedi $X_n \xrightarrow{d} 0$, a time i $X_n \xrightarrow{P} 0$. Kako je $P\{0 \leq X_n \leq 2\} = 1$ to $X_n \xrightarrow{L_2} 0$. Neka je $0 < \varepsilon < 1$ i n dovoljno veliko tako da je $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Imamo,

$$P\{X_n > \varepsilon\} = P\left\{X_n \in \left(1, 1 + \frac{1}{n^2}\right)\right\} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n+1}.$$

Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n > \varepsilon\}$ divergira to $X_n \not\xrightarrow{q.s.} 0$. ◀

Primjer 3.11 Neka je $X_n, n = 1, 2, \dots$ niz slučajnih promjenljivih sa $\mathcal{U}(n, n^2)$ raspodjelama i neka je $Y_n = e^{-n}X_n$. Dokazati da $Y_n \xrightarrow{a.s.} 0$ i $Y_n \xrightarrow{L_2} 0$.

$$\text{► } P\left\{\omega : 0 \leq Y_n(\omega) \leq \frac{n^2}{e^n}\right\} = 1 \implies P\{\omega : Y_n(\omega) \rightarrow 0\} = 1.$$

Dakle, $Y_n \xrightarrow{a.s.} 0$. Lako se provjerava da $EY_n^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. ◀