4. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

1. Naći modul i glavni argument kompleksnog broja z, ako je z jednako:
a) 2, b) $4 + 3i$, c) $-4 + 3i$, d) $-4 - 4\sqrt{3}i$, e) $-2i$.

2. Napisati u trigonometrijskom obliku sljedeće kompleksne brojeve i navesti njihove glavne argumente:
a) $z = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\frac{3\pi}{4}$, b) $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,
c) $z = \sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}$.

3. Napisati u trigonometrijskom obliku sljedeće kompleksne brojeve i navesti njihove glavne argumente:
a) $z = 1$, b) $z = -3$, c) $z = i$, d) $z = -2i$, e) $z = 1 + i$, f) $z = 1-i$.

4. Napisati u trigonometrijskom obliku sljedeće kompleksne brojeve:
a) $z = 1 + \sqrt{3}i$, b) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, c) $z = -3 - \sqrt{2}i$.

5. Napisati u trigonometrijskom obliku sljedeće kompleksne brojeve:
a) $z = 3 + 4i$, b) $z = 3 - 4i$, c) $z = -3 + 4i$, d) $z = -3 - 4i$.

6. Napisati u algebarskom obliku sljedeće kompleksne brojeve:
a) $z = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, b) $z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$,
c) $z = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$, d) $z = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,
e) $z = \dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}}$, f) $z = \dfrac{2i}{\cos\frac{7\pi}{6} - i\sin\frac{7\pi}{6}}$.

7. Izračunati: a) $\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,
b) $2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

8. Izračunati: a) $\dfrac{\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}}$, b) $\dfrac{4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)}{8\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}$.

9. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = -1 - i$, $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ i $z_3 = 1 + \sqrt{3}i$. Predstaviti ih u trigonometrijskom obliku i naći $\dfrac{z_1 z_3}{z_2}$.

10. Izračunati $\dfrac{6-6i}{3\left(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ\right)}$.

11. Naći skup tačaka z u kompleksnoj ravni koji zadovoljava uslov:
a) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, b) $\operatorname{Re} z > 1$, c) $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, d) $\operatorname{Im} z \geq 2$, e) $-3 < \operatorname{Im} z < 0$.

12. Naći skup tačaka z u kompleksnoj ravni koji zadovoljava uslov:
a) $|z| = 2$, b) $|z| < 3$, c) $|z| \geq 2$, d) $2\,''\,|z|\,''\,4$, e) $1 < |z| \leq 3$.

13. Naći skup tačaka z u kompleksnoj ravni čiji glavni argument zadovoljava uslov:
a) $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$, b) $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$, c) $\arg z \leq \pi$, d) $\arg z > \frac{3\pi}{2}$.

14. Naći skup tačaka z u kompleksnoj ravni za koji važi: $1 \leq |z| < 3$ i $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$.

5. Inverzne trigonometrijske funkcije

A

1. Izračunati: a) $\arcsin(\sin x)$, b) $\arccos(\cos x)$, c) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, d) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

2. Izračunati: a) $\sin(\arcsin x)$, b) $\cos(\arccos x)$, c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, d) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$.

3. Izračunati: a) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$, d) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Izračunati:

a) $\arcsin 0$, b) $\arcsin 1$, c) $\arcsin(-1)$, d) $\arcsin\frac{1}{2}$, e) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$,

f) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, g) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, h) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

5. Izračunati:

a) $\arccos 0$, b) $\arccos 1$, c) $\arccos(-1)$, d) $\arccos\frac{1}{2}$, e) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$,

f) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$, g) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, h) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6. Izračunati: a) $\operatorname{arctg} 0$, b) $\operatorname{arctg}(-1)$, c) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$, d) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$, e) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

7. Izračunati: a) $\operatorname{arcctg} 0$, b) $\operatorname{arcctg} 1$, c) $\operatorname{arcctg}(-1)$, d) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$, e) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

8. Izraziti x pomoću y, ako je:

a) $y = \arcsin 2x$, b) $y = \arccos x + \pi$, c) $y = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{2}$,

d) $y = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x-1}{3}$, e) $y = 1 - 4\,\mathrm{arctg}\frac{x}{5}$, f) $y = \frac{\pi}{8} - \mathrm{arcctg}\frac{2x+1}{5}$.

9. Odrediti oblast definisanosti $D(f)$ funkcije $f(x)$, ako je:

a) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right)$, b) $f(x) = \arccos(3x - 6)$,

c) $f(x) = \arcsin(\lg x)$, d) $f(x) = \arccos\frac{2x}{x^2+1}$.

B

10. Izračunati:

a) $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2}$, b) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

c) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, d) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. Izračunati:

a) $\mathrm{arctg}\sqrt{3} + \mathrm{arctg}(-1)$, b) $\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \mathrm{arctg}1$, c) $\mathrm{arctg}(-1) + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$,

d) $\mathrm{arctg}\sqrt{3} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$, e) $\mathrm{arcctg}\sqrt{3} + \mathrm{arctg}\sqrt{3}$,

f) $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) + \mathrm{arcctg}(-\sqrt{3})$.

12. Izračunati:

a) $\sin\left[4\arcsin\frac{1}{2} - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$,

b) $\mathrm{tg}\left[3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$.

13. Izračunati bez korišćenja tablica ili kalkulatora:

a) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, b) $\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$, c) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$,

d) $\arcsin(\cos 13)$.

14. Izračunati bez korišćenja tablica ili kalkulatora:

a) $\arcsin\left(\cos\frac{13\pi}{8}\right)$, b) $\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{8}\right)$, c) $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)$.

15. Naći vrijednosti trigonometrijskih funkcija od $\arcsin x$ za $x \in [-1,1]$.

16. Naći vrijednosti trigonometrijskih funkcija od $\arccos x$ za $x \in [-1,1]$.

17. Dokazati da je $\cos(2\arcsin x) + \cos(2\arccos x) = 0$ za svako $x \in [-1,1]$.

C

18. Izračunati bez korišćenja tablica ili kalkulatora:
a) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$, b) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$, c) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$, d) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{5}{12}\right)$.

19. Dokazati identitete:
a) $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, b) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,
c) $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, d) $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

20. Izračunati bez korišćenja tablica ili kalkulatora:
a) $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$, b) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$, c) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$,
d) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$, e) $\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right)$, f) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

21. Izračunati bez korišćenja tablica ili kalkulatora:
a) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{12}{13}\right)$, b) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{8}{17}\right)$,
c) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)$.

22. Dokazati da je za svako $x \in [-1,1]$: a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,
b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

D

23. Dokazati da je $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right)^2$.

24. Izračunati bez korišćenja tablica ili kalkulatora:
a) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{1}{4}\right)$, b) $\sin(\operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 2)$,
c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 5)$, d) $tg\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{1}{4}\right)$.

25. Izračunati bez korišćenja tablica ili kalkulatora:

a) $\arccos\left(\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)$, b) $\arcsin\left(\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)$,

c) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, d) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

6. Kosinusna i sinusna teorema

A

1. U $\triangle ABC$ su poznate stranice $a=6$, $b=16$ i ugao između njih $\gamma=60°$. Naći treću stranicu trougla.

2. Date su stranice trougla ABC: $a=1$, $b=3\sqrt{2}$, $c=5$. Naći ugao γ.

3. Za koje je vrijednosti ugla α kvadrat stranice $\triangle ABC$ koja leži naspram tog ugla: a) manji od zbira kvadrata druge dvije stranice, b) jednak zbiru kvadrata druge dvije stranice, c) veći od zbira kvadrata druge dvije stranice?

4. Ne izračunavajući uglove $\triangle ABC$ ispitati kakav je trougao (oštrougli, pravougli ili tupougli) ako su stranice trougla: a) 7, 9, 12, b) 0,3; 0,4; 0,5; c) 12, 13, 14.

5. Gdje se nalazi centar kružne linije (u odnosu na trougao) ako su stranice trougla: a) 4, 5, 6, b) 5, 12, 13, c) 3, 5, 6?

6. Naći kosinuse uglova trougla čije su stranice 5, 6 i 7.

7. U trouglu ABC su dati stranica $c=9$ i uglovi $\alpha=45°$, $\gamma=120°$. Naći stranicu a.

8. Koliki su uglovi trougla ABC ako je $\alpha:\beta=1:2$ i $a:b=1:\sqrt{3}$?

9. Jedna stranica trougla je 20, a ugao naspram nje jednak je: a) 45°, b) 90°, c) 150°. Koliki je poluprečnik kružne linije opisane oko tog trougla?

10. Dokazati: Ako je jedan ugao u trouglu jednak 30°, tada je stranica naspram tog ugla jednaka poluprečniku kružne linije opisane oko trougla.

11. Poluprečnik kružne linije opisane oko $\triangle ABC$ je 6. Naći dužinu stranice a ako je ugao: a) $\alpha=30°$, b) $\alpha=60°$, c) $\alpha=90°$.

12. Naći stranicu c u $\triangle ABC$ ako su poznate stranice $a=3\sqrt{3}$ i $b=7$ i ugao $\beta=30°$.

13. Uglovi $\triangle ABC$ odnose se kao 1 : 2 : 3. Kako se odnose stranice trougla?

14. Postoji li $\triangle ABC$ u kojem je $a = 3$, $b = 5$ i $\alpha = 60°$?

15. Postoji li $\triangle ABC$ u kojem je $c = 15$, $b = 10$ i $\sin\beta = \frac{3}{4}$?

16. Riješiti trougao ako je data stranica trougla i njoj nalegli uglovi:
a) $a = 5$, $\alpha = 45°$, $\beta = 120°$; b) $a = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$, $\beta = 120°$.

17. Riješiti trougao ako su date dvije stranice i ugao između njih:
a) $b = 6$, $c = 3+\sqrt{3}$, $\alpha = 45°$; b) $a = 12$, $b = 8$, $\gamma = 60°$;
c) $a = 27$, $b = 9$, $\alpha = 138°$.

18. Riješiti trougao ako su date sve njegove stranice:
a) $a = \sqrt{6}$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 3-\sqrt{3}$; b) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

19. Riješiti trougao ako su date dvije stranice i ugao naspram jedne od njih:
a) $a = 3+\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, $\alpha = 75°$; b) $a = 27$, $b = 9$, $\alpha = 138°$,
c) $a = 12$, $b = 5$, $\alpha = 120°$;

20. Stranice trougla su a, b i c. Ugao γ, koji se nalazi naspram stranice c, jednak je $120°$. Dokazati da je u tom trouglu $c^2 = a^2 + b^2 + ab$.

21. Izračunati stranice $\triangle ABC$ ako je $\alpha = 60°$, $b = a + 1$ i $c = a-4$.

22. Naći $\sin\beta$, a, $\sin\alpha$ u $\triangle ABC$ u kojem je $b = 6\sqrt{2}$, $c = 10$, $\gamma = 45°$.

23. Stranice $\triangle ABC$ odnose se kao 5:7:8. Koliki je srednji ugao trougla?

24. Stranice $\triangle ABC$ odnose se kao 5:16:19. Koliki je najveći ugao trougla?

25. Neka je u $\triangle ABC$ $\gamma = 120°$ i $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Dokazati da je $\beta = 45°$.

26. Naći stranice a i b $\triangle ABC$ ako je $c = 4$, $\cos\gamma = \frac{3}{4}$ i $\alpha = 2\gamma$.

27. U $\triangle ABC$ je $b = 15{,}2$, $\alpha = 25$, $\beta = 80°$. Naći površinu trougla (koristiti tablice ili kalkulator).

28. Stranice trougla su jednake 4 i 5, a ugao između njih je $140°$. Naći visinu koja odgovara trećoj stranici trougla (koristiti tablice ili kalkulator).

29. Date su dijagonale paralelograma c i d i ugao između njih φ. Naći stranice paralelograma.

30. Date su stranice paralelograma a i b i ugao između njih φ. Naći dijagonale paralelograma.

31. Dijagonala paralelograma jednaka je c i obrazuje sa stranicama paralelograma uglove φ i ψ. Naći stranice paralelograma.

C

32. Stranice trougla su dužine 4, 5 i 6. Naći projekcije stranica dužine 4 i 5 na treću stranicu.

33. U $\triangle ABC$ data je stranica c i uglovi α i β. Naći visinu h_c.

34. Dokazati: Ako je u trouglu $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{b}{a+c}$, tada je taj trougao pravougli.

35. Dokazati da u svakom $\triangle ABC$ važi: $a^2=(b+c)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+(b-c)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

36. Dokazati da u svakom $\triangle ABC$ važi: a) $(b-c)\cos\frac{\alpha}{2}=a\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$,

b) $(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}=a\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$.

37. Dokazati tangensnu teoremu: U svakom $\triangle ABC$ važi da je $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

D

38. Koristeći sinusnu teoremu dokazati kosinusnu teoremu.

39. Dokazati da za stranice i uglove $\triangle ABC$ važi jednakost $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=\frac{c-b\cos\alpha}{b-c\cos\alpha}$.

40. U $\triangle ABC$ su poznate stranice a, b i c. Naći dužine bisektrise unutrašnjih uglova trougla.

41. U $\triangle ABC$ date su stranice a i b i ugao između njih 120°. Naći dužinu bisektrise ugla γ.

42. Date su stranice a i b $\triangle ABC$. Naći treću stranicu ako je poznato da je ugao naspram nje dva puta veći od ugla naspram stranice b.