

13. Ispitati monotonost niza čiji je opšti član:

a) $x_n = \frac{1}{n}$,

b) $x_n = (-1)^n$,

c) $x_n = \frac{2n}{2n+3}$,

d) $x_n = \frac{10^n}{n!}$,

e) $x_n = \frac{n}{n!}$,

f) $x_n = n^2 - 6n + 8$,

g) $x_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$,

h) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

i) $x_n = \frac{1}{\log_2 n}$, $n > 2$

14. Odrediti zbir prvih n članova niza (x_k) , ako je:

a) $x_k = \frac{1}{k(k+1)}$, b) $x_k = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, c) $x_k = \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$,

d) $x_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$,

2. Aritmetički niz

1. Odrediti prvih pet članova aritmetičkog niza ako je:

a) $a_1 = 1$, $d = 1$; b) $a_1 = 2$, $d = -3$; c) $a_1 = \frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{3}$; d) $a_1 = \frac{2}{5}$, $d = \frac{1}{5}$

2. Naći peti član aritmetičkog niza: a) 4, 1, -2..., b) 1, 3, 5...

3. Prvi član aritmetičkog niza je 1, a razlika 4. Da li je 2007 član ovog niza?

4. Naći razliku aritmetičkog niza ako je: a) $a_1 = 3$, $a_{15} = 31$;
b) $a_1 = -7$, $a_{25} = 65$.

5. Naći prvi član aritmetičkog niza ako je: a) $a_{42} = -121$, $d = -3$;
b) $a_{36} = 75$, $d = 2$.
6. Izračunati a_1 i d aritmetičkog niza u kojem je: a) $a_3 = 5$, $a_{21} = 41$,
b) $a_2 + a_5 - a_3 = 10$, $a_2 + a_9 = 17$.
7. Izračunati n i S_n u aritmetičkom nizu u kojem je:
a) $a_1 = 3$, $d = 2$, $a_n = 21$, b) $a_1 = -8$, $d = 2$, $a_n = 74$.
8. Izračunati a_1 i d u aritmetičkom nizu u kojem je: a) $\begin{cases} S_5 - S_8 + a_5 = 52 \\ S_2 + a_2 = -2 \end{cases}$,
b) $a_2 + a_4 = 16$ i $a_1 \cdot a_5 = 28$.
9. Izračunati n i a_n u aritmetičkom nizu ako je:
a) $a_1 = 2$, $d = 3$, $S_n = 15050$, b) $a_1 = -1$, $d = 2$, $S_n = 1935$.
10. Izračunati zbirove:
a) $3 + 5 + 7 + \dots + 47$, b) $15 + 19 + 23 + \dots + 55$, c) $12 + 9 + 6 + \dots + (-21)$.
11. Izračunati zbir prvih 30 članova aritmetičkog niza u kojem je prvi član 2, a šesti 17.
- B**
12. Izračunati zbirove:
a) svih dvocifrenih parnih brojeva, b) svih dvocifrenih neparnih brojeva,
c) svih trocifrenih brojeva, d) svih neparnih trocifrenih brojeva.
13. Koliko ima dvocifrenih brojeva koji su djeljivi sa 7?
14. Naći zbir svih dvocifrenih brojeva koji nijesu djeljivi ni sa 2, ni sa 3.
15. Izračunati zbir prvih 30 neparnih brojeva koji podijeljeni brojem 5 daju ostatak 1.
16. Naći prvi član i razliku aritmetičkog niza (a_n) za koji je $a_1 + a_2 + a_3 = 18$ i $a_1 a_2 a_3 = 162$.
17. Riješiti jednačine ($x \in \mathbb{N}$):
a) $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \dots 5^{2x} = (0,04)^{-28}$, b) $2 + 5 + 8 + \dots + x = 155$,
c) $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$, d) $\log_{13} x + \log_{13} x^2 + \dots + \log_{13} x^{10} = 110$.
18. Uprostiti izraz ($x \uparrow 0$): a) $\frac{x \cdot x^2 \dots x^n}{x \cdot x^3 \dots x^{2n-1}}$, b) $\frac{x^2 \cdot x^4 \cdot x^6 \dots x^{2n}}{x \cdot x^2 \cdot x^3 \dots x^n}$.

19. Odrediti x tako da brojevi $2\cos\frac{\pi}{6}$, $4\sin x$, $6\sin(\pi - x)$ budu uzastopni članovi aritmetičkog niza.
20. Odrediti x tako da brojevi $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 3)$ budu uzastopni članovi aritmetičkog niza.
21. Tijelo u prvoj sekundi kretanja pređe 9 m, a za svaku sljedeću sekundu pređe po 4 m više nego u prethodnoj sekundi. Koji put je tijelo prešlo u osmoj sekundi?
22. Naći prvi član i razliku aritmetičkog niza (a_n) za koji je $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ i $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 98$.
23. Voz je, odlazeći sa stanice, ravnomjerno povećavao brzinu 50 m u minuti. Koja je brzina voza poslije dvadesete minute?
24. Uglovi trougla čine aritmetički niz. Izračunati uglove ako je zbir njihovih kosinusa $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.
25. Brojevi α , β , γ obrazuju aritmetički niz sa razlikom $\frac{\pi}{3}$. Dokazati da je $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma = -3$.
26. Dokazati da ne postoji trougao kod kojeg su uglovi i stranice istovremeno članovi aritmetičkog niza.
27. Zbir n prvih uzastopnih članova jednog niza (a_n) je dat formulom $S_n = 2n^2 + 3n$. Dokazati da se radi o aritmetičkom nizu.
28. Niz (a_n) zadat je formulom $a_n = 8n - 3$. Dokazati da se radi o aritmetičkom nizu.
29. Odrediti razliku aritmetičkog niza čiji je zbir prvih n članova $S_n = \frac{1}{4}(n^2 + 5n)$.
30. Neka je za svako n zbir prvih n članova nekog aritmetičkog niza dat formulom:
a) $S_n = n^2$, b) $S_n = 5n^2$, c) $S_n = 4n^2 - 3n$. Napisati prva tri člana tog niza.
31. Odrediti aritmetički niz čiji je prvi član 1 i $S_m : S_n = m^2 : n^2$.
32. Dati su realni brojevi a , b i c . Pod kojim uslovima postoji aritmetički niz za koji je zbir S_n prvih n članova jednak $an^2 + bn + c$?

33. Između brojeva 1 i 40 umetnuti niz od 12 brojeva tako da dobijeni niz bude aritmetički. Naći zbir prvih 14 članova dobijenog niza.
34. Dokazati da brojevi $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ i $\sqrt{7}$ ne mogu biti članovi jednog aritmetičkog niza.
35. Poznato je da je $y = f(x)$ linearna funkcija i da su $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ članovi aritmetičkog niza. Dokazati da je $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ aritmetički niz.
36. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $(a+b)(a+c)(b+c) \neq 0$. Dokazati da su brojevi $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ uzastopni članovi aritmetičkog niza ako i samo ako su brojevi a^2, b^2, c^2 uzastopni članovi aritmetičkog niza.
37. Naći zbir rješenja jednačine $2\cos^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x}$, ako $x \in [2, 40]$.
38. Izračunati zbirove:
a) $S^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$, b) $S^{(3)} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.

D

39. Ako je za aritmetički niz i neke prirodne brojeve m i n ($m \neq n$): $S_m = S_n$, tada je $S_{m+n} = 0$. Dokazati.
40. Ako je u aritmetičkom nizu $a_p = q$ i $a_q = p$, koliko je a_m ?
41. Neka je u aritmetičkom nizu za neke prirodne brojeve p i q : $S_p = q$ i $S_q = p$. Koliko je S_{p+q} ?
42. Neka je $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ aritmetički niz. Izračunati zbir
$$S_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n.$$
43. Neka je (a_n) aritmetički niz sa pozitivnim članovima. Dokazati da je zbir prvih n članova niza (x_n) , gdje je $x_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$, jednak $\frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}$.

3. Geometrijski niz

A

1. Napisati prvih pet članova geometrijskog niza ako je:
- a) $a_1 = 3, q = -\frac{1}{3}$; b) $a_1 = -1, q = -1$; c) $a_1 = 1, q = 2$;
- d) $a_1 = 8, q = \frac{1}{2}$.

2. Izračunati osmi član.
3. Odrediti prvi član i količnik geometrijskog niza ako je:
a) $b_n = \frac{5}{3^n}$, b) $b_n = (-1)^n$, c) $b_n = \frac{(-1)^n \cdot 2}{3^n}$.
4. Odrediti količnik geometrijskog niza ako je njegov prvi član 1, a trinaesti 4096.
5. Odrediti broj n u geometrijskom nizu ako je $b_1 = 1$, količnik 3 i $b_n = 6561$.
6. Dokazati da je broj $\frac{1}{81}$ član geometrijskog niza čiji je prvi član $b_1 = 81$ i količnik $q = \frac{1}{3}$. Koji je indeks tog člana?
7. Izračunati zbir prvih 8 članova geometrijskog niza ako je prvi član 2 i količnik 3.
8. Odrediti treći i peti član geometrijskog niza ako je zbir njegovih prvih sedam članova $\frac{127}{64}$ i količnik $\frac{1}{2}$.
9. Odrediti geometrijski niz ako je zbir prva tri člana 13, a proizvod 27.
10. Izračunati zbirove:
a) $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^7$, b) $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^8$, c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots + \frac{(-1)^{7-1}}{2^7}$.

B

11. Izračunati prvi član i količnik geometrijskog niza ako je: a) $\begin{cases} b_7 - b_3 = 180 \\ b_7 - b_5 = 144 \end{cases}$
b) $\begin{cases} b_1 + b_5 = 82 \\ b_2 \cdot b_4 = 81 \end{cases}$.
12. Proizvod prva tri člana geometrijskog niza je 64, a zbir kubova tih članova je 584. Odredi taj niz.
13. Naći zbir prvih n članova geometrijskog niza:
a) $1, -x, x^2, \dots$ ($x \neq -1$), b) $1, x^2, x^4, \dots$ ($x \neq \pm 1$),
c) $1, -x^3, x^6, \dots$ ($x \neq -1$).
14. Mogu li brojevi 12, 13 i 14 biti članovi jednog geometrijskog niza?
15. Odrediti x tako da brojevi $32^x, 6^{x^2+1}, 3^{5x}$ obrazuju uzastopne članove geometrijskog niza.
16. Odrediti uslov pod kojim tri različita broja a, b i c mogu biti članovi jednog geometrijskog niza.

17. Ako dužine stranica trougla obrazuju geometrijski niz, tada i dužine njegovih visina obrazuju geometrijski niz. Dokazati.

18. Odrediti oštre uglove pravouglog trougla ako dužine njegovih stranica obrazuju geometrijski niz.

19. Dužine ivica kvadra a, b, c su uzastopni članovi geometrijskog niza. Ako je dijagonala kvadra $D = 4\sqrt{3}$ i površina $P = 96$, kolike su dužine ivica kvadra?

20. Odrediti tri pozitivna broja koji su uzastopni članovi geometrijskog niza ako je njihov zbir 21, a zbir recipročnih vrijednosti $\frac{7}{12}$.

21. Brojevi $1 - \cos 2x, \cos x - \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sin^2 x}$ su uzastopni članovi geometrijskog niza. Naći x , ako je petnaesti član tog niza jednak $\frac{27}{8}$.

22. Postoje li tri broja koji su istovremeno članovi aritmetičkog i geometrijskog niza?

23. Tri broja, čiji je zbir 36, su uzastopni članovi aritmetičkog niza. Ako se tim brojevima oduzmu, redom, brojevi 1, 6 i 3 dobijaju se tri broja koji su uzastopni članovi geometrijskog niza. Naći te brojeve.

24. Zbir tri pozitivna broja, koji su uzastopni članovi aritmetičkog niza, iznosi 15. Ako se ovim brojevima dodaju, redom, brojevi 1, 4, 19 dobijaju se tri uzastopna člana geometrijskog niza. Naći te brojeve.

25. Brojevi a, b, c su uzastopni članovi aritmetičkog niza, a njihovi kvadrati uzastopni članovi geometrijskog niza. Naći te brojeve, ako je njihov zbir 21.

26. Naći četiri pozitivna broja, od kojih su prva tri uzastopni članovi aritmetičkog niza, a posljednja tri uzastopni članovi geometrijskog niza. Zbir prva tri je 12, a zbir posljednja tri je 19.

27. Naći zbirove ($n \in \mathbb{N}$):

a) $1 + 3 + 7 + 15 + \dots + (2^n - 1)$, b) $1 + 5 + 13 + 29 + \dots + (2^{n+1} - 3)$,

c) $3 + 6 + 11 + \dots + (2^n + n)$.

28. Riješiti jednačinu $\sqrt[100]{x \sqrt{x \sqrt[3]{x \dots \sqrt{x}}}} = 2$.

29. Naći zbir $S_n = nx + (n-1)x^2 + \dots + 2x^{n-1} + x^n$.