**Z.** Neka su $A$, $B$, $C$ iskazne formule i $\Sigma = \{(A \to B), (B \to C)\}$. Na osnovu dokaza $A_1 = A$, $A_2 = (A \to B) \in \Sigma$, $A_3 = B$ (MP 1,2), $A_4 = (B \to C) \in \Sigma$, $A_5 = C$ za $\Sigma, A \vdash C$ napisati dokaz za $\Sigma \vdash A \to C$. Ne pozivati se na teoremu dedukcije i izvedena pravila.

**Rj.** Uočimo da je ovde u pitanju dokaz teoreme dedukcije za specijalan slučaj. Naime, na osnovu dokaza (koji je dat) za $\Sigma, A \vdash C$ treba da napravimo dokaz za $\Sigma \vdash A \to C$. Kao u dokazu teoreme dedukcije dokazaćemo $\Sigma \vdash A \to A_i$ redom za $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Uočimo da je $A_5 = C$ i to je ono što nam treba, ostali dokazi su samo pomoćni.

Za $i = 3$ kao je $A_3 = B$, dobija se po (MP $A_1$,$A_2$) i $B_1 = (A \to B) \in \Sigma$ (potrebini dokaz) to možemo preskočiti slučajeve $i = 1, 2$.
Za $i = 4$ je $A_4 = (B \to C) \in \Sigma$ pa je dokaz za $\Sigma \vdash A \to A_4$ sledeći niz formula: $B_2 = (B \to C) \in \Sigma$, $B_3 = (B \to C) \to (A \to (B \to C)) \in T_1$, $B_4 = A \to (B \to C)$ (MP 2,3).
Za $i = 5$ je $A_5 = C$, dobija se po (MP $A_3$,$A_4$) pa je dokaz za $\Sigma \vdash A \to A_5$ sledeći niz formula: $B_1$,..., $B_5 = (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \in T_2$, $B_6 = (A \to B) \to (A \to C)$ (MP $B_4$,$B_5$), $B_7 = A \to C$ (MP $B_1$,$B_6$).

Dakle, traženi dokaz za $\Sigma \vdash A \to C$ je niz formula: $B_1 = (A \to B) \in \Sigma$, $B_2 = (B \to C) \in \Sigma$, $B_3 = (B \to C) \to (A \to (B \to C)) \in T_1$, $B_4 = A \to (B \to C)$ (MP 2,3), $B_5 = (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \in T_2$, $B_6 = (A \to B) \to (A \to C)$ (MP $B_4$,$B_5$), $B_7 = A \to C$ (MP $B_1$,$B_6$).

**Napomena 1.** Da su nam bili potrebni slučajevi $i = 1, 2$ dokazi bi bili sledeći:

Za $i = 1$ treba dokazati $A \to A$ a to je teorema tautologije i dokaz je niz formula: $C_1 = A \to (A \to A) \in T_1$, $C_2 = A \to ((A \to A) \to A) \in T_1$, $C_3 = (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \in T_2$, $C_4 = (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ (MP 2,3), $C_5 = A \to A$ (MP 1,4).
Za $i = 2$ imamo $A_2 = (A \to B) \in \Sigma$ pa je dokaz za $\Sigma \vdash A \to A_2$ niz formula: $C_6 = (A \to B) \in \Sigma$, $C_7 = (A \to B) \to (A \to (A \to B)) \in T_1$, $C_8 = A \to (A \to B)$ (MP 6,7).
Znači:
1) ako je $A_i \in \Sigma \cup T$ onda se koristi $A_i$ i aksioma $A_i \to (A \to A_i) \in T_1$,
2) ako je $A_i$ dobijeno po MP od $A_k$ i $A_j = (A_k \to A_i)$ onda se koristi aksioma $(A \to (A_k \to A_i)) \to ((A \to A_k) \to (A \to A_i)) \in T_2$ i dokazi za $A \to A_k$ i $A \to A_j$,
3) specijalan slučaj je $A_i = A$ kada se možemo pozvati na teoremu tautologije.

**Napomena 2.** Rješite sami sledeći zadatak. Na osnovu gore navedenog dokaza $B_1$,..., $B_7$ za $\Sigma \vdash A \to C$ napisati dokaz za $(A \to B) \vdash (B \to C) \to (A \to C)$. Ne pozivati se na teoremu dedukcije i izvedena pravila.