UNIVERZITET CRNE GORE

GRAĐEVINSKI FAKULTET

METOD KONAČNIH ELEMENATA

Predavanje 26.03.2020.

šk.god. 2019/2020

3. GEOMETRIJSKO ZNAČENJE ELEMENATA MATRICE KRUTOSTI

Potencijalna energija konačnog elementa: $$\Pi = \frac{1}{2} q^T k q - Q^T q + \overline{C}$$

izvedena je za element kao slobodan nezavisno od sistema konačnih elemenata, tj. kada se element smatra kao izdvojen iz sistema, pa se u čvorovima elemenata mora uvesti uticaj unutrašnjih sila veze pomoću kojih se zamjenjuje uticaj ostalih elemenata na razmatrani element.

Ako se sa **R** označi vektor generalisanih sila veze koji odgovara vektoru generalisanih pomjeranja za element tada se rad sila **R** na pomjeranjima **q** može prilkazati kao proizvod $R^T q$

Kada se u izrazu za ∏ doda i rad unutrašnjih sila dobija se:

$$\Pi = \frac{1}{2} q^T k q - Q^T q - R^T q + \overline{C} = \frac{1}{2} q^T k q - q^T Q - q^T R + \overline{C}$$

Ako se primijeni stav o stacionarnosti dobija se: $\Pi_{,q^T} = 0$

$$kq - Q - R = 0$$

Veza generalisanih sila i generalisanih pomjeranja u čvorovima elementa može da se napiše na sljedeći način:

$$R = kq - Q$$

Iz prethodnog izraza možemo da odredimo vektor **R** ukoliko je poznat vektor **q**.

Međutim iz navedenog izraza nije moguće odrediti vektor **q** ukoliko je poznat vektor **R** jer je matrica krutosti **k,** konačnog elementa, singularna iz razloga što sadrži i pomjeranja elementa kao krutog tijela.

Ako se u poslednjem izrazu, koji predstavlja ravnotežu sila na konačnom elementu, pretpostavi da je vektor generalisanih sila usled spoljašnjih uticaja u elementu nula Q=0, dobija se:

$$R = kq$$

Na onovu ovog izraza može se odrediti statičko-kinematičko tumačenje koeficijenata matrice krutosti kako slijedi.

Sistem jednalina **R=kq** za element može da se napiše u razvijenom obliku:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{iK} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{K1} & \dots & k_{Kj} & \dots & k_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_j \\ \dots \\ q_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_K \end{bmatrix}$$

K – broj čvorova elementa

gdje je blok matrice **k_{ij}** : $k_{ij} = \int_V B_i^T D B_j dV$

Ako se pretpostavi da je $q_j \neq 0$ a $q_i = 0$ (i≠j) dobija se sistem jednačina:

$$R_i = k_{ij} q_j \quad \text{(i=1,2,...,K)}$$

ili u razvijenom obliku za čvor i:

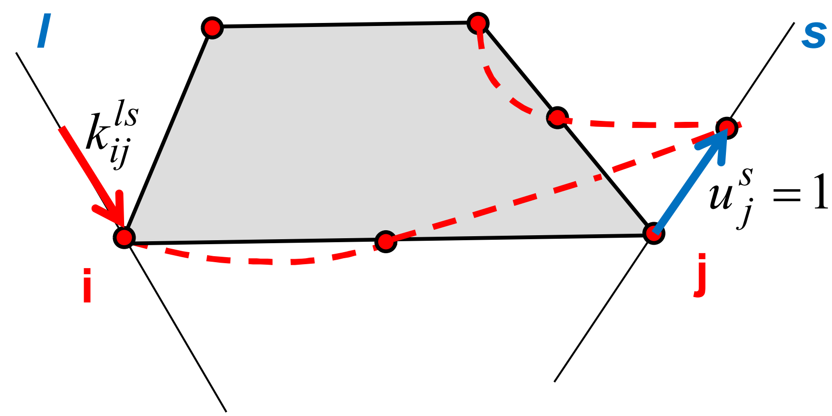
$$\begin{bmatrix} k_{ij}^{11} & \dots & k_{ij}^{1s} & \dots & k_{ij}^{1S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{ij}^{l1} & \dots & k_{ij}^{ls} & \dots & k_{ij}^{lS} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{ij}^{S1} & \dots & k_{ij}^{Ss} & \dots & k_{ij}^{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j^1 \\ \dots \\ u_j^s \\ \dots \\ u_j^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i^1 \\ \dots \\ R_i^l \\ \dots \\ R_i^S \end{bmatrix}$$

gdje je S-broj stepeni slobode u čvoru elementa.

Ako se pretpostavi da je: $u_j^s = 1$, a ostale komponente $u_j^k = 0$ (k≠s) slijedi da je:

$$k_{ij}^{ls} = R_i^l$$

$$k_{ij}^{ls} = R_i^l$$



Element matrice krutosti k_{ij}^{ls} predstavlja generalisanu silu u čvoru i u pravcu l usled jediničnog pomjeranja u čvoru j u pravcu s, pri čemu su sva ostala pomjeranja jednala nuli.

Obzirom da je matrica **D** (matrica krutosti materijala) simetrična slijedi i da je matrica krutosti elementa simetrična, a na osnovu pokazanog geometrijsko-statičkog značenja njenih elemenata, simetričnost proizilazi neposredno kao posledica Betti- jevog stava o uzajamnosti.

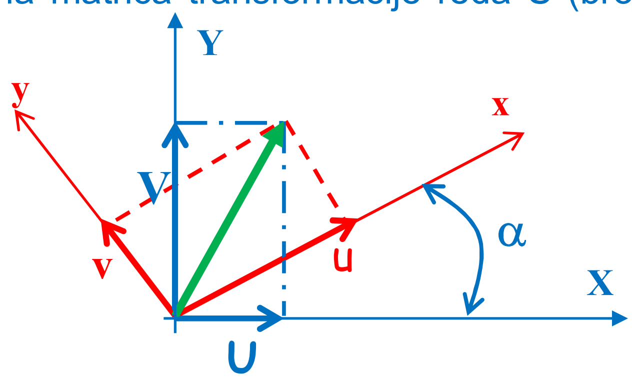
4. TRANSFORMACIJA MATRICE KRUTOSTI

Analiza elementa se sprovodi u pogodno izabranom lokalnom koordinatnom sistemu. Obično se lokalni koordinatni sistemi pojedinih elemenata ne poklapaju sa globalnim koordinatnim sistemom pa je neophodno izvršiti transformaciju iz lokalnog u globalni koordinatni sistem.

Veza između pomjeranja u lokalnom i globalnom sistemu koordinata, u proizvoljnoj tački elementa, može se prikazati kao:

$$u_l = t u_g$$

gdje indeks ***l*** označava lokalni koordinatni sistem a indeks ***g*** označava globalni koordinatni sistem.
t – kvadratna matrica transformacije reda S (broj stepeni slobode u razmatranom čvoru-tački)



$$u_l = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \qquad u_g = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

Matrica transformacije **t** za čvor razmatranog problema u ravni:

$$t = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Za konačni element veza između pomjeranja u lokalnom i pomjeranja u globalnom koordinatnom sistemu može se prikazati u opštem obliku:

$$q_l = T q_g$$

T – kvadratna matrica transformacija konačnog elementa sa brojem podmatrica t koji odgovara broju čvorova konačnog elementa:

$$T = \begin{bmatrix} t & & & & \\ & \cdots & & & \\ & & t & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & t \end{bmatrix}$$

Ako ubacimo izraz $q_l = Tq_g$ u uslove ravnoteže $Q_l = k_l q_l$ dobija se:

$$k_l q_l = k_l T q_g = Q_l$$

Kada se lijeva i desna strana pomnoze sa $\mathbf{T^T}$, i to sa lijeve strane, dobija se:

$$T^T k_l T q_g = T^T Q_l$$

Ako se usvoji da je:

$$k_g = T^T k_l T q_g$$

TRANSFORMISANA MATRICA KRUTOSTI KONAČNOG ELEMENTA

$$Q_g = T^T Q_l$$

TRANSFORMISANI VEKTPR GENERALISANIH SILA KONAČNOG ELEMENTA

dobija se:

$$k_g q_g = Q_g$$

Na osnovu stava o invarijantnosti rada pri transformaciji koordinata slijedi:

$$q_g^T Q_g = q_l^T Q_l$$ ako se ubaci veza $q_l^T = q_g^T T^T$

$$q_g^T Q_g = q_g^T T^T Q_l$$ kao veza $Q_l = T Q_g$

dobija se:

$$q_g^T Q_g = q_g^T T^T T Q_g$$

Kada se uporede lijeva i desna strana jasno je da proizvod matrica T^T i T predstavlja jediničnu matricu I:

$$T^T T = I$$

pa se može napisati da je:

$$T^T = T^{-1}$$ **stav o ortogonalnosti matrice transformacije**

Osobine matrice krutosti konačnog elementa su:

-Matrica krutosti je kvadratna, reda NxN gdje je N broj stepeni slobode konačnog elementa;

-Matrica krutosti je simetrična $k_{ij}=k_{ji}$;

-Matrica krutosti je singulatna.

5. DIREKTNO ODREĐIVANJE MATRICE KRUTOSTI SISTEMA

Vidjeli smo da se matrica krutosti sistema može odrediti preko globalne kinematičke matrice **J** primjenom sljedećeg izraza:

$$K^{*} = J^{T} \overline{K} \; J$$

Principijelno ovaj način određivanja matrice krutosti sistema konačnih elemenata ne predstavlja teškoću.

Međutim, za veliki čvorova radi se o proizvodima matrica koje mogu biti visokog reda pa je ovaj postupak skup, a često i nemoguć.
Zbog toga je pogodnije elemente matrice krutosti sistema konačnih elemenata odrediti preko elemenata matrica krutosti pojedinih konačnih elemenata njihovim stavljanjem na određenu lokaciju u matrici krutosti sistema. Na taj način **matrica krutosti sistema bi se formirala direktno** bez posredovanja globalne kinematičke matrice J.

Izraz za potencijalnu energiju sistema prikazuje se preko vektora generalisanih pomjeranja, vektora generalisanih sila i matrica krutisti za svaki element. Ukupna broj konačnih elemenata u sistemu je označen sa M:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{M} \Pi_e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{M} q_e^{*T} k_e^{*} q_e^{*} - \sum_{e=1}^{M} q_e^{*T} Q_e^{*} = \frac{1}{2} q^{*T} \left(\sum_{e=1}^{M} k_e^{*} q_e^{*} \right) - q^{*T} \sum_{e=1}^{M} Q_e^{*}$$

$$\Pi = \sum_{e=1}^{M} \Pi_e = \frac{1}{2} q^{*T} \left[\sum_{e=1}^{M} (k_e^{*} q_e^{*} - Q_e^{*}) \right]$$

Ako se na prethodni izraz primijeni stav o stacionarnosti potencijalne energije:

$$\Pi_{,q^{*T}} = 0$$

dobija se:

$$\sum_{e=1}^{M} (k_e^* q_e^* - Q_e^*) = 0$$

Ako se usvoji oznaka:

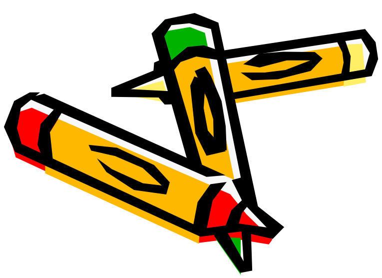
$$\sum_{e=1}^{M} q_e^* = q^*$$

slijedi:

$$\left(\sum_{e=1}^{M} k_e^*\right) q^* = \sum_{e=1}^{M} Q_e^*$$

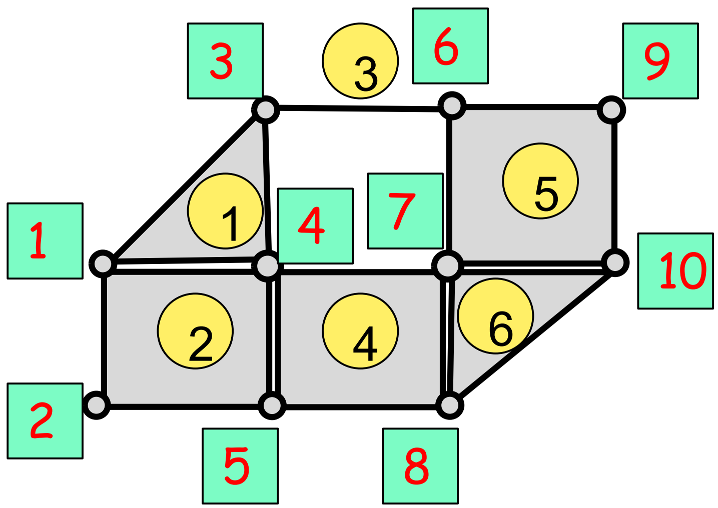
Nakon čega ova veza može da se napiše u sljedećem obliku: $K^* q^* = Q^*$

gdje je: $\sum_{e=1}^{M} k_e^* = K^*$ $\quad\quad$ $\sum_{e=1}^{M} Q_e^* = Q^*$



Zaključuje se da se matrica krutosti K* i vektor generalisanih sila Q* sistema konačnih elemenata mogu dobiti sabiranjem matrica krutosti k_e* i vektora generalisanih sila Q_e* pojedinačnih konačnih elemenata ako se oni prethodno prikažu prema oznakama čvorova u globalnom sistemu koordinata.

PRIMJER Direktno formiranje matrice krutosti sistema konačnih elemenata



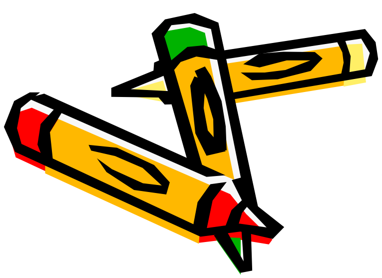
i Oznaka čvorova 1, 2, ...10

e Oznaka elementa 1, 2, ..., 6

$$K^* q^* = Q^*$$

$$\left(\sum_{e=1}^{6} k_e^* \right) q^* = \sum_{e=1}^{6} Q_e^*$$

$$\sum_{e=1}^{6} k_e^* = K^* \qquad \sum_{e=1}^{6} Q_e^* = Q^*$$



Na dalje u primjeru, u matricama krutosti i vektoru sila, oznaka **e** će biti gornji indeks, a donji indeksi će se odnositi na oznake čvorova i.

Postupak odgovara načinu formiranje matrice krutosti sistema i vektora ekvivalentnog čvornog opterećenja koji smo naučili u Statici konstrukcija 2 (matrična analiza) - Postupak kodnih brojeva:

$$K^* = k^{*1} + k^{*2} + k^{*3} + k^{*4} + k^{*5} + k^{*6}$$

$$K^* = \begin{bmatrix} \bullet&&\bullet&\bullet&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ \bullet&&\bullet&\bullet&&&&&& \\ \bullet&&\bullet&\bullet&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bullet&\bullet&&\bullet&\bullet&&&&& \\ \bullet&\bullet&&\bullet&\bullet&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ \bullet&\bullet&&\bullet&\bullet&&&&& \\ \bullet&\bullet&&\bullet&\bullet&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&\bullet&&&\bullet&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&\bullet&&&\bullet&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&\bullet&\bullet&&\bullet&\bullet&& \\ &&&\bullet&\bullet&&\bullet&\bullet&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&\bullet&\bullet&&\bullet&\bullet&& \\ &&&\bullet&\bullet&&\bullet&\bullet&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&\bullet&\bullet&&\bullet&\bullet \\ &&&&&\bullet&\bullet&&\bullet&\bullet \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&\bullet&\bullet&&\bullet&\bullet \\ &&&&&\bullet&\bullet&&\bullet&\bullet \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&\bullet&\bullet&&\bullet&\bullet \\ &&&&&\bullet&\bullet&&\bullet&\bullet \\ &&&&&&&&& \\ &&&&&\bullet&\bullet&&\bullet&\bullet \end{bmatrix} \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10 \end{matrix}$$

$$q^{*T} = \begin{bmatrix} q_1^* & q_2^* & q_3^* & q_4^* & q_5^* & q_6^* & q_7^* & q_8^* & q_9^* & q_{10}^* \end{bmatrix}$$

$$\sum_{e=1}^{6} Q^{*e} = Q^* = \begin{bmatrix} \bullet\\ \\ \bullet\\ \bullet\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bullet\\ \bullet\\ \\ \bullet\\ \bullet\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \bullet\\ \\ \\ \bullet\\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \bullet\\ \bullet\\ \\ \bullet\\ \bullet\\ \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \bullet\\ \bullet\\ \\ \bullet\\ \bullet \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \bullet\\ \bullet\\ \\ \bullet \end{bmatrix} \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10 \end{matrix}$$

$$K^* q^* = Q^*$$

$$
\underbrace{
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{matrix}\bullet\\\bullet\\\bullet\\\bullet\\\bullet\end{matrix}}\right\}{\scriptstyle m+1=5}
\end{array}
}_{}
\begin{bmatrix}
\overbrace{\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet}^{m+1=5} & & & & & \\
\bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & & & & & \\
\bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & & \\
 & & \bullet & & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\
 & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet \\
 & & & & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\
 & & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \\ q_5^* \\ q_6^* \\ q_7^* \\ q_8^* \\ q_9^* \\ q_{10}^*
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10
\end{array}
$$

$$K^* \qquad q^* \qquad Q^*$$

Razvijeni oblik jednačina nakon množenja glasi:

$$\left(k_{11}^{*1}+k_{11}^{*2}\right)q_1^{*}+k_{12}^{*2}q_2^{*}+k_{13}^{*1}q_3^{*}+\left(k_{14}^{*1}+k_{14}^{*2}\right)q_4^{*}+k_{15}^{*2}q_5^{*}=Q_1^{*1}+Q_1^{*2}$$

$$k_{21}^{*2}q_1^{*}+k_{22}^{*2}q_2^{*}++k_{24}^{*2}q_4^{*}+k_{25}^{*2}q_5^{*}=Q_2^{*2}$$

$$k_{31}^{*1}q_1^{*}+\left(k_{33}^{*1}+k_{33}^{*3}\right)q_3^{*}+k_{34}^{*1}q_4^{*}+k_{36}^{*3}q_6^{*}=Q_3^{*1}+Q_3^{*3}$$

$$\left(k_{41}^{*1}+k_{41}^{*2}\right)q_1^{*}+k_{42}^{*2}q_2^{*}+k_{43}^{*1}q_3^{*}+\left(k_{44}^{*1}+k_{44}^{*2}+k_{44}^{*4}\right)q_4^{*}+\left(k_{45}^{*4}+k_{45}^{*2}\right)q_5^{*}+k_{47}^{*4}q_7^{*}+k_{48}^{*4}q_8^{*}=$$
$$Q_4^{*1}+Q_4^{*2}+Q_4^{*4}$$

i tako dalje..........

Prethodne relacije predstavljaju **analitičke uslove ravnoteže u čvorovima**, sukcesivno od 1 do 10 za dati primjer.

Širina trake matrice krutosti sistema se određuje na sljedeći način:

$$b = (m+1)S$$

m – je maksimalna razlika između oznaka čvorova konačnih elemenata. Za dati primjer m=4

b – širina trake matrice krutosti sistema elemenata

S – broj stepeni slobode u čvoru

Zaključuje se da način obilježavanja čvorova na razmatranom primjeru daje najmanju širinu trake.

Postupak formiranja matrice krutosti sistema koji je ilustrovan na primjeru može se generalizovati za proizvoljan broj elemenata i svesti na algoritam koji je pogodan za izradu programa za računar.

Postupak formiranja sistema jednačina pomoću kojih se dolazi do rješenja problema po Metodi konačnih elemenata sličan je postupku koji se primjenjuje u analizi i proračunu ravnih linijskih nosača po metodi deformacija. Međutim i pored velike sličnosti između MKE i metode deformacije linijskih sistema postoji suštinska razlika jer se po metodi deformacija za linijske nosače dobijaju tačna rješenja a po MKE približna rješenja.