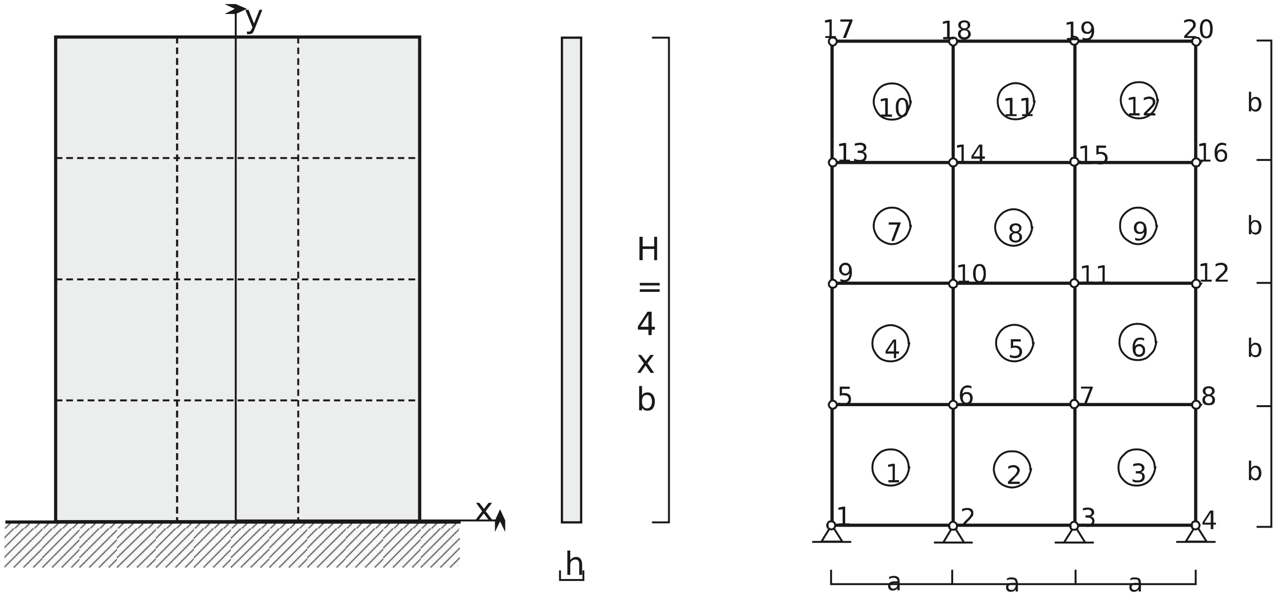
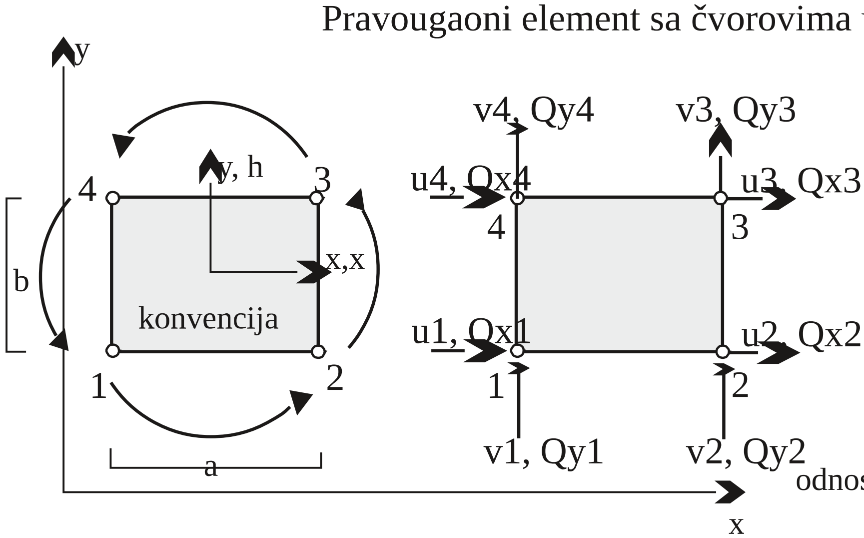
Zadatak

Za zidno platno prikazano na slici odrediti vrednosti svojstvenih vibracija primenom pravougaonog konačnog elementa sa bilinearnom interpolacijom.



TEORIJSKA OSNOVA

Pravougaoni element sa čvorovima u temenima



Temena su uvek obeležena tako da se indeksi 1 ,2, 3 i 4 pozicioniraju u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu

OSNOVNE NEPOZNATE U ČVOROVIMA SU POMERANJA u, v

$$q_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$ vektor nepoznatih u čvoru i

odnosno

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$ vektor pometanja u svim čvorovima pravougaonika

Konačni element oblika pravougaonika sa čvorovima u temenima ima 8 spoljašnjih stepeni slobode i predstavlja jedan od najednostavnijih elemenata koji se primenjuju u 2D analizi.

OBZIROM DA ELEMENT IMA 8 STEPENI SLOBODE, PROMENA POMERANJA u, v U ELEMENTU MOŽE SE PRIKAŽE POMOĆU POLONOMA SA PO 4 GENERALISANE KOORDINATE

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$
$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy$$

u matričnom obliku:

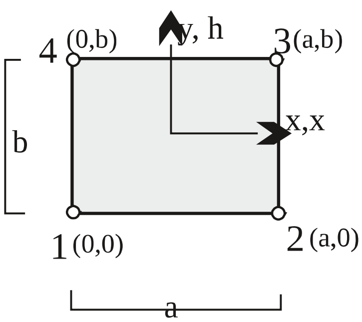
$$u = A\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}$$

broj parametara jednak broju stepeni slobode

TEORIJSKA OSNOVA

odnosno, ako se prikažu za sve četiri tačke:

$$q = C\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} u1 \\ v1 \\ u2 \\ v2 \\ u3 \\ v3 \\ u4 \\ v4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x1 & y1 & x1y1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x1 & y1 & x1y1 \\ 1 & x2 & y2 & x2y2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x2 & y2 & x2y2 \\ 1 & x3 & y3 & x3y3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x3 & y3 & x3y3 \\ 1 & x4 & y4 & x4y4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x4 & y4 & x4y4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha 1 \\ \alpha 2 \\ \alpha 3 \\ \alpha 4 \\ \beta 1 \\ \beta 2 \\ \beta 3 \\ \beta 4 \end{bmatrix}$$



$$C = \begin{bmatrix} 1 & x1 & y1 & x1y1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x1 & y1 & x1y1 \\ 1 & x2 & y2 & x2y2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x2 & y2 & x2y2 \\ 1 & x3 & y3 & x3y3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x3 & y3 & x3y3 \\ 1 & x4 & y4 & x4y4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x4 & y4 & x4y4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

iz navedenih jednačina mogu se odrediti nepoznati koeficijenti αi i βi (i= 1,2,3, 4) u zavisnosti od pomeranja u čvorovima

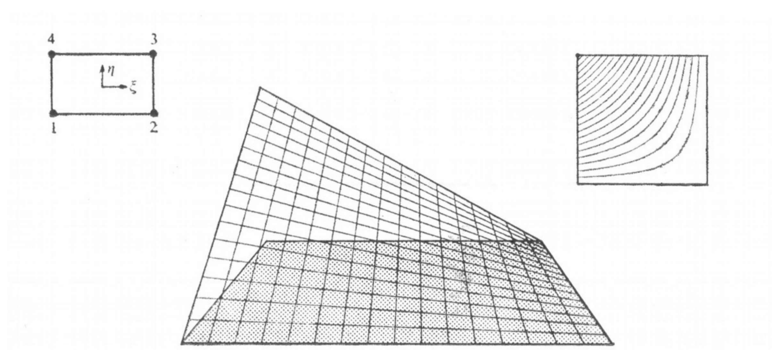
Uvođenjem izraza $\alpha = C^{-1}q$ u jednačinu $u = A\alpha$ dobija se $u = \underbrace{AC^{-1}}_{Aq} q$, odnosno $u = Aq\, q$

Međutim razmatranja o ovom elementu su najjednostavnija u sistemu prirodnih koordinata ξ, η. Tada se veza između pomeranja u i v u elementu i pomeranja u čvorovima uspostavlja preko interpolacionig funkcija.

$$u = N q$$

N - MATRICA INTERPOLACIONIH FUNKCIJA

$$N = \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 \end{bmatrix}$$ sa elementima $$Ni = \frac{1}{4}(1+\xi\xi i)(1+\eta\eta i) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$



Pravougaoni element sa bilinearnom interpolacijom

TEORIJSKA OSNOVA

Smenom izraza $u = N\,q$ u veze između komponenata deformacija i pomeranja dobija se:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \partial/\partial\xi & 0 \\ 0 & \partial/\partial\psi \\ \partial/\partial\psi & \partial/\partial\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\ni = \underbrace{\begin{bmatrix} \partial/\partial\xi & 0 \\ 0 & \partial/\partial\psi \\ \partial/\partial\psi & \partial/\partial\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \end{bmatrix}}_{q} \quad \Rightarrow \quad \ni = B\,q$$

gde je:

B - matrica veze deformacija i generalisanih pomeranja

$$B = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c:c} \frac{\partial N1}{\partial\xi} & 0 & \frac{\partial N2}{\partial\xi} & 0 & \frac{\partial N3}{\partial\xi} & 0 & \frac{\partial N4}{\partial\xi} & 0 \\ \hdashline 0 & \frac{\partial N1}{\partial\psi} & 0 & \frac{\partial N2}{\partial\psi} & 0 & \frac{\partial N3}{\partial\psi} & 0 & \frac{\partial N4}{\partial\psi} \\ \hdashline \frac{\partial N1}{\partial\psi} & \frac{\partial N1}{\partial\xi} & \frac{\partial N2}{\partial\psi} & \frac{\partial N2}{\partial\xi} & \frac{\partial N3}{\partial\psi} & \frac{\partial N3}{\partial\xi} & \frac{\partial N4}{\partial\psi} & \frac{\partial N4}{\partial\xi} \end{array}\right]$$

Diferenciranjem funkcija Ni po x i y, posredno preko ξ i η, matrica B dobija se u obliku:

$$B = \frac{1}{4}\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c:c} -\frac{1}{a}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{a}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{a}(1+\eta) & 0 & -\frac{1}{a}(1+\eta) & 0 \\ \hdashline 0 & -\frac{1}{b}(1-\xi) & 0 & -\frac{1}{b}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{b}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{b}(1-\xi) \\ \hdashline -\frac{1}{b}(1-\xi) & -\frac{1}{a}(1-\eta) & -\frac{1}{b}(1+\xi) & \frac{1}{a}(1-\eta) & \frac{1}{b}(1+\xi) & \frac{1}{a}(1+\eta) & \frac{1}{b}(1-\xi) & -\frac{1}{a}(1+\eta) \end{array}\right]$$

Matrica krutosti elementa, za slučaj ravnog stanja napona, kada je veličina D data izrazom,

$$\sigma = De$$

$$\begin{bmatrix} \sigma\xi \\ \sigma\psi \\ \tau xy \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu 2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-n}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon\xi \\ \varepsilon\psi \\ \gamma xy \end{bmatrix} - \frac{E\,\alpha\,t}{1-\nu 2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrica D uspostavlja vezu između komponenata napona i komponenata deformacija zaizotropna tela

dobija se u poznatom obliku

$$k = \int_v BTDB\,dV = h\int BTDB\,dxdy = h\,\Delta\,BTDB$$

TEORIJSKA OSNOVA

Kod pravougaonih elemenata sa čvorovima u temenima obezbeđen je konrinuitet pomeranja u elementu i na konturama između elemenata. Promena dilatacije ε_x je linearna u odnosu na y, a konstantna u odnosu na x. Za dilataciju ε_y važi obrnuto, dok je klizanje γ_{xy} linearno u odnosu na obe ose x i y. Iako ovaj element, kao vrlo jednostavan, daje rezultate zadovoljavajuće tačnosti, on ima jedan nedostatak koji se tiče ispunjenja uslova ravnoteže. Ako se izrazi za pomeranja unesu u homogene diferencijalne jednačine ravnoteže dobijaju se jednačine oblika:

$$\frac{1 + n}{4(1 - \nu)} (v_1 - v_2 + v_3 - v_4) = 0$$

$$\frac{1 + n}{4(1 - \nu)} (u_1 - u_2 + u_3 - u_4) = 0$$

koje su ispunjene ako su zadovoljeni uslovi $v_1 = v_4$, $v_2 = v_3$, $u_1 = u_4$, $u_2 = u_3$.
U opštem slučaju ove nisu ispunjene, a odstupanje ovih jednačina od nule je proporcionalno deformaciji smicanja. Za uklanjanje ovog nedostatka usvojeno je proširenje interpolacionih polinoma sa još dva člana $\alpha_5 x^2$ i $\beta_5 y^2$ tako da oni imaju oblik:

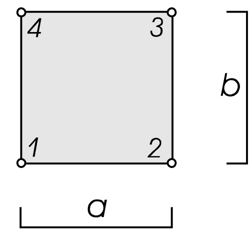
$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy + \beta_5 y^2$$

Dopunske generalisane koordinate α_5 i β_5, koje su iznad broja od osam stepeni slobode elementa, određuju se ta da homogene diferencijalne jednačine ravnoteže budu zadovoljene.

Matrica krutosti za ovaj element dobija se na isti način kao i prethodna i prikazana je na sledećoj strani. Rešenja koja se dobijaju primenom ovog elementa znatno brže konvergiraju ka tačnim rešenjima nego što je bio slučaj sa prethodnim elementom.

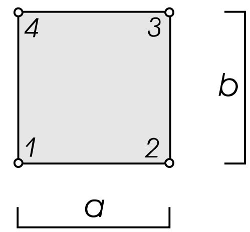
Matrica krutosti pravougaonog četvoročvornog elementa



$\alpha = a/b$

$$K = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)} \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} \multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{3} & \multicolumn{2}{c}{4} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 4\alpha^{-1}+2(1-\nu)\alpha & \frac{3}{2}(1+\nu) & -4\alpha^{-1}+(1-\nu)\alpha & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -2\alpha^{-1}-(1-\nu)\alpha & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2\alpha^{-1}-2(1-\nu)\alpha & \frac{3}{2}(1-3\nu) \\ & 4\alpha+2(1-\nu)\alpha^{-1} & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2\alpha-2(1-\nu)\alpha^{-1} & -\frac{3}{2}(1+\nu) & -2\alpha-(1-\nu)\alpha^{-1} & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -4\alpha+(1-\nu)\alpha^{-1} \\ & & 4\alpha^{-1}+2(1-\nu)\alpha & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2\alpha^{-1}-2(1-\nu)\alpha & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -2\alpha^{-1}-(1-\nu)\alpha & \frac{3}{2}(1+\nu) \\ & & & 4\alpha+2(1-\nu)\alpha^{-1} & \frac{3}{2}(1-3\nu) & -4\alpha+(1-\nu)\alpha^{-1} & \frac{3}{2}(1+\nu) & -2\alpha-(1-\nu)\alpha^{-1} \\ & & & & 4\alpha^{-1}+2(1-\nu)\alpha & \frac{3}{2}(1+\nu) & -4\alpha^{-1}+(1-\nu)\alpha & -\frac{3}{2}(1-3\nu) \\ & \multicolumn{2}{c}{\text{SIMETRI\textasciicircum NO}} & & & 4\alpha+2(1-\nu)\alpha^{-1} & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2\alpha-2(1-\nu)\alpha^{-1} \\ & & & & & & 4\alpha^{-1}+2(1-\nu)\alpha & -\frac{3}{2}(1+\nu) \\ & & & & & & & 4\alpha+2(1-\nu)\alpha^{-1} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \end{array} \end{array}$$

Matrica krutosti pravougaonog četvoročvornog elementa



$$\alpha = a/b$$

$$A = 60 + \frac{30\nu^2}{1-\nu}$$

$$B = 22.5(1-\nu)$$

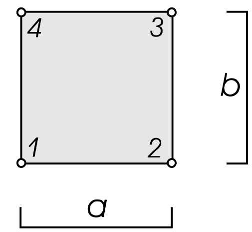
$$C = 30 - \frac{30\nu^2}{1-\nu}$$

$$D = 22.5(1+\nu)$$

$$F = 22.5(1-3\nu)$$

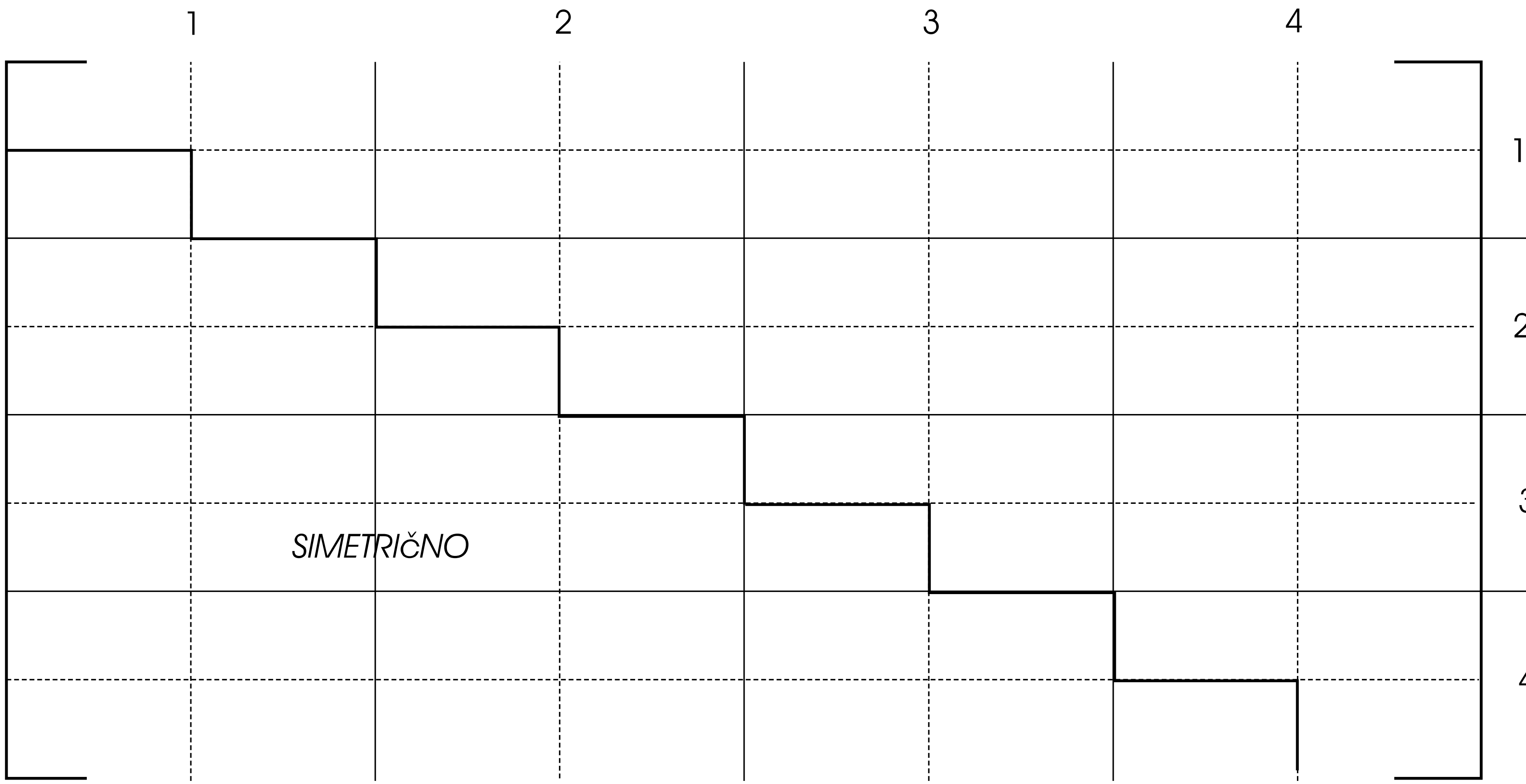
$$K = \frac{Eh}{180(1-\nu^2)} \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccccc} A\alpha^{-1}+B\alpha & D & -A\alpha^{-1}+B\alpha & -F & -C\alpha^{-1}-B\alpha & -D & C\alpha^{-1}-B\alpha & F \\ & A\alpha+B\alpha^{-1} & F & C\alpha-B\alpha^{-1} & -D & -C\alpha-B\alpha^{-1} & -F & -A\alpha+B\alpha^{-1} \\ & & A\alpha^{-1}+B\alpha & -D & C\alpha^{-1}-B\alpha & -F & -C\alpha^{-1}-B\alpha & D \\ & & & A\alpha+B\alpha^{-1} & F & -A\alpha+B\alpha^{-1} & D & -C\alpha-B\alpha^{-1} \\ & & & & A\alpha^{-1}+B\alpha & D & -A\alpha^{-1}+B\alpha & -F \\ & \text{SIMETRI\^{}NO} & & & & A\alpha+B\alpha^{-1} & F & C\alpha-B\alpha^{-1} \\ & & & & & & A\alpha^{-1}+B\alpha & -D \\ & & & & & & & A\alpha+B\alpha^{-1} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Matrica krutosti pravougaonog četvoročvornog elementa

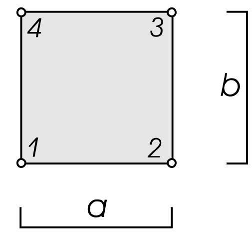


$\alpha = a/b$

$K = \dfrac{Eh}{\quad}$



Matrica krutosti pravougaonog četvoročvornog elementa



$\alpha = a/b =$

$A = 60 + \dfrac{30\nu^2}{1-\nu} =$

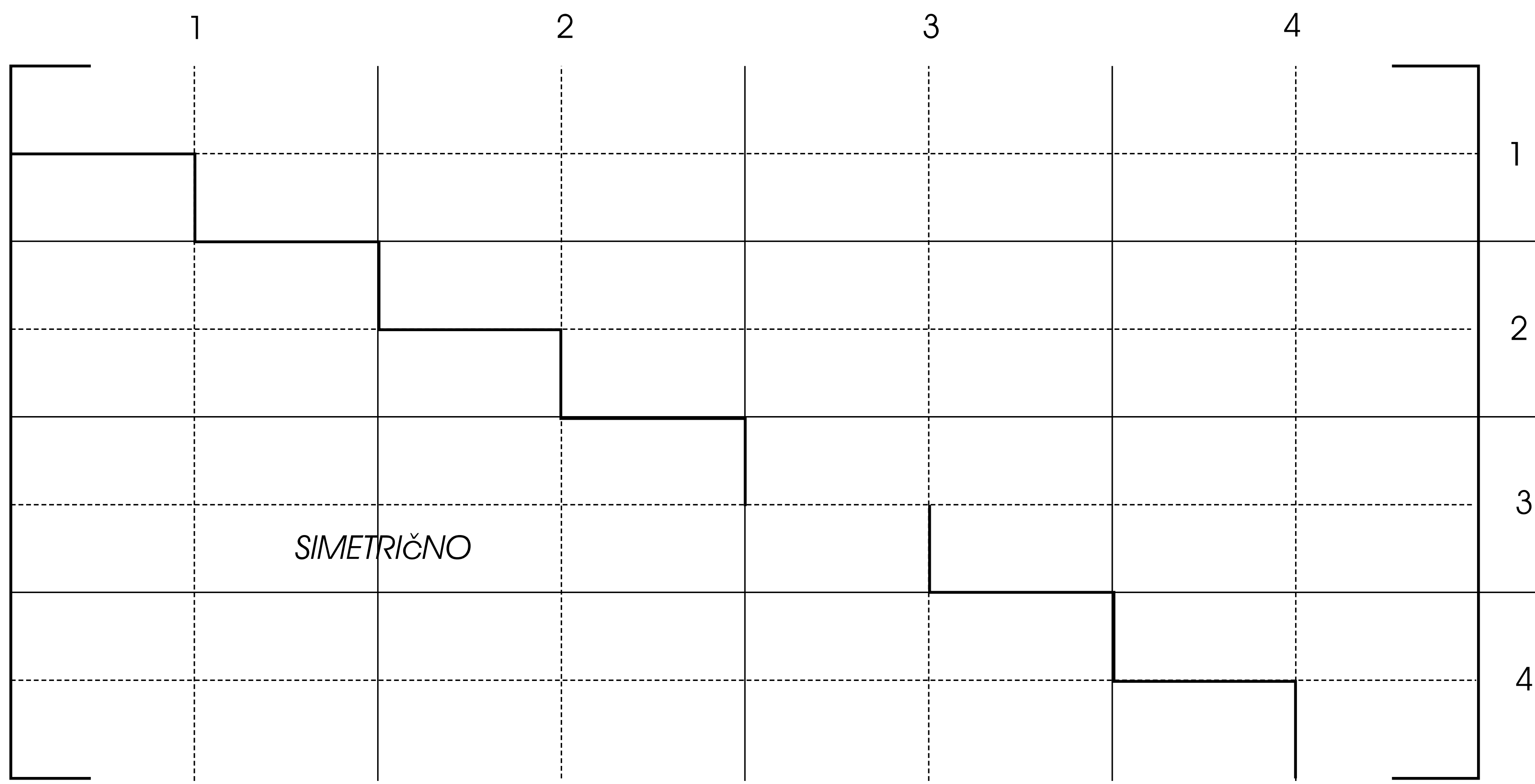
$B = 22.5(1-\nu) =$

$C = 30 - \dfrac{30\nu^2}{1-\nu} =$

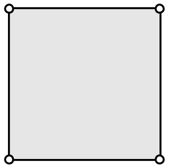
$D = 22.5(1+\nu) =$

$F = 22.5(1-3\nu) =$

$K = \dfrac{Eh}{}$



Element



$K = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)}$

$K = \frac{Eh}{}$

O
subm

Element u matrici krutosti sistema

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$K = \frac{Eh}{}$

Matrica krutosti sistema

$K = \frac{Eh}{\quad}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$K = \frac{Eh}{\quad}$