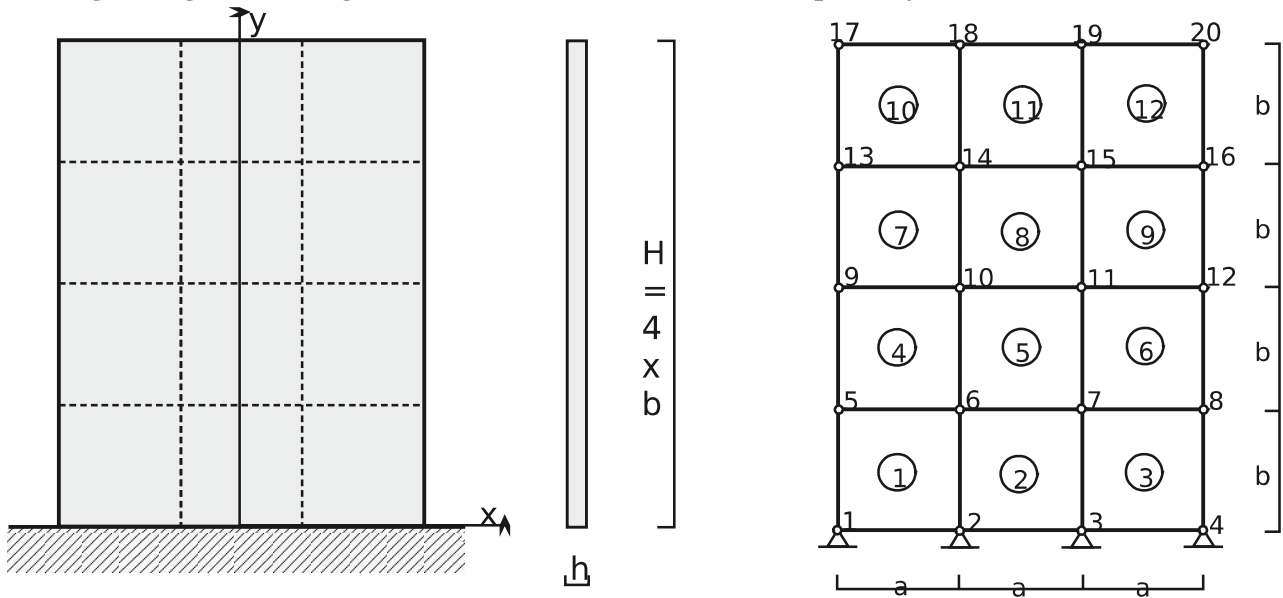


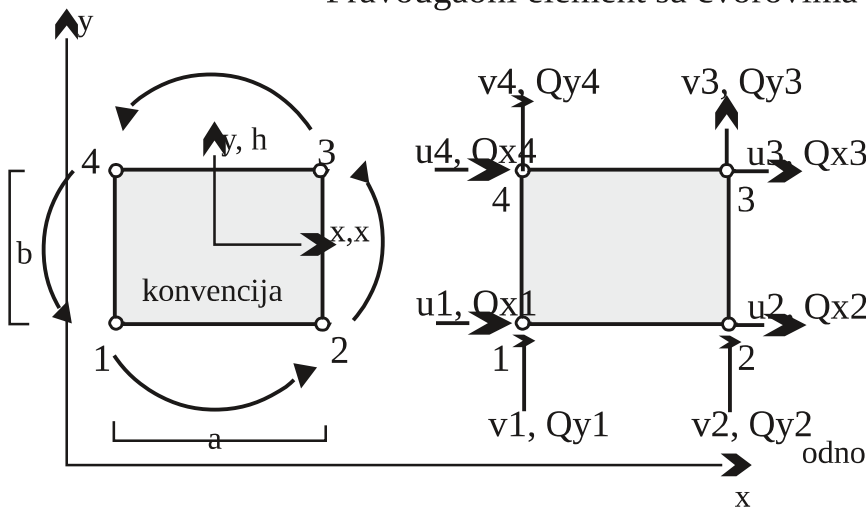
## Zadatak

Za zidno platno prikazano na slici odrediti vrednosti svojstvenih vibracija primenom pravougaonog konačnog elementa sa bilinearnom interpolacijom.



## TEORIJSKA OSNOVA

### Pravougaoni element sa čvorovima u temenima



Temena su uvek obeležena tako da se indeksi 1, 2, 3 i 4 pozicioniraju u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu

OSNOVNE NEPOZNATE U ČVOROVIMA SU POMERANJA  $u, v$

$$q_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \text{ vektor nepoznatih u čvoru } i$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \text{ vektor pometanja u svim čvorovima pravougaonika}$$

Konačni element oblika pravougaonika sa čvorovima u temenima ima 8 spoljašnjih stepeni slobode i predstavlja jedan od najjednostavnijih elemenata koji se primenjuju u 2D analizi.

OBZIROM DA ELEMENT IMA 8 STEPENI SLOBODE, PROMENA POMERANJA  $u, v$  U ELEMENTU MOŽE SE PRIKAŽE POMOĆU POLONOMA SA PO 4 GENERALISANE KOORDINATE

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy$$

u matričnom obliku:

$$u = A\alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix}$$

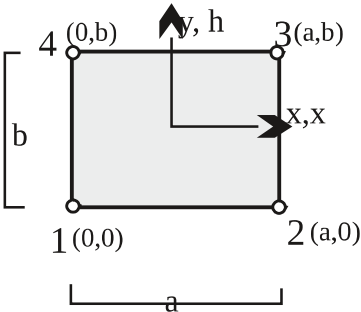
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}$$

broj parametara jednak broju stepeni slobode

## TEORIJSKA OSNOVA

odnosno, ako se prikažu za sve četiri tačke:

$$q = C\alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}$$



$$C = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

iz navedenih jednačina mogu se odrediti nepoznati koeficijenti  $\alpha_i$  i  $\beta_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) u zavisnosti od pomeranja u čvorovima

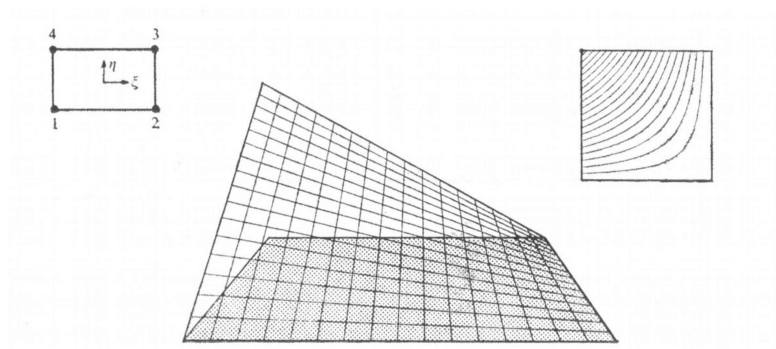
Uvođenjem izraza  $\alpha = C^{-1}q_u$  jednačinu  $u = A\alpha$  dobija se  $u = \frac{(AC^{-1})}{Aq} q$ , odnosno  $u = Aq q$

Međutim razmatranja o ovom elementu su najjednostavnija u sistemu prirodnih koordinata  $\xi, \eta$ . Tada se veza između pomeranja  $u$  i  $v$  u elementu i pomeranja u čvorovima uspostavlja preko interpolacionig funkcija.

$$u = N q$$

### N - MATRICA INTERPOLACIONIH FUNKCIJA

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad \text{sa elementima} \quad N_i = \frac{1}{4} (1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) \quad i = 1, 2, 3, 4$$



Pravougaoni element sa bilinearnom interpolacijom

## TEORIJSKA OSNOVA

Smenom izraza  $u = N q$  u veze između komponenta deformacija i pomeranja  $\varepsilon = \begin{bmatrix} \partial/\partial\xi & 0 \\ 0 & \partial/\partial\psi \\ \partial/\partial\psi & \partial/\partial\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  dobija se:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \partial/\partial\xi & 0 \\ 0 & \partial/\partial\psi \\ \partial/\partial\psi & \partial/\partial\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon = B q$$

$B$

gde je:

$B$  - matrica veze deformacija i generalisanih pomeranja

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N4}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N1}{\partial \psi} & 0 & \frac{\partial N2}{\partial \psi} & 0 & \frac{\partial N3}{\partial \psi} & 0 & \frac{\partial N4}{\partial \psi} \\ \frac{\partial N1}{\partial \psi} & \frac{\partial N1}{\partial \xi} & \frac{\partial N2}{\partial \psi} & \frac{\partial N2}{\partial \xi} & \frac{\partial N3}{\partial \psi} & \frac{\partial N3}{\partial \xi} & \frac{\partial N4}{\partial \psi} & \frac{\partial N4}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

Diferenciranjem funkcija  $N_i$  po  $x$  i  $y$ , posredno preko  $\xi$  i  $\eta$ , matrica  $B$  dobija se u obliku:

$$B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\frac{1}{a}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{a}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{a}(1+\eta) & 0 & -\frac{1}{a}(1+\eta) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b}(1-\xi) & 0 & -\frac{1}{b}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{b}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{b}(1-\xi) \\ -\frac{1}{b}(1-\xi) & -\frac{1}{a}(1-\eta) & \frac{1}{b}(1+\xi) & \frac{1}{a}(1-\eta) & \frac{1}{b}(1+\xi) & \frac{1}{a}(1+\eta) & \frac{1}{b}(1-\xi) & -\frac{1}{a}(1+\eta) \end{bmatrix}$$

Matrica krutosti elementa, za slučaj ravnog stanja napona, kada je veličina  $D$  data izrazom,

$$\sigma = D \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \frac{E \alpha t}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrica  $D$  uspostavlja vezu između komponenta napona i komponenta deformacija zaizotropna tela

dobija se u poznatom obliku

$$k = \int_V B^T D B dV = h \int B^T D B dx dy = h \Delta B^T D B$$

## TEORIJSKA OSNOVA

Kod pravougaonih elemenata sa čvorovima u temenima obezbeđen je konrinitet pomeranja u elementu i na konturama između elemenata. Promena dilatacije  $\epsilon_x$  je linearna u odnosu na  $y$ , a konstantna u odnosu na  $x$ . Za dilataciju  $\epsilon_y$  važi obrnuto, dok je klizanje  $\gamma_{xy}$  linearno u odnosu na obe ose  $x$  i  $y$ . Iako ovaj element, kao vrlo jednostavan, daje rezultate zadovoljavajuće tačnosti, on ima jedan nedostatak koji se tiče ispunjenja uslova ravnoteže. Ako se izrazi za pomeranja unesu u homogene diferencijalne jednačine ravnoteže dobijaju se jednačine oblika:

$$\frac{1+\nu}{4(1-\nu)} (v_1 - v_2 + v_3 - v_4) = 0$$

$$\frac{1+\nu}{4(1-\nu)} (u_1 - u_2 + u_3 - u_4) = 0$$

koje su ispunjene ako su zadovoljeni uslovi  $v_1 = v_4$ ,  $v_2 = v_3$ ,  $u_1 = u_4$ ,  $u_2 = u_3$ .

U opštem slučaju ove nisu ispunjene, a odstupanje ovih jednačina od nule je proporcionalno deformaciji smicanja. Za uklanjanje ovog nedostatka usvojeno je proširenje interpolacionih polinoma sa još dva člana  $\alpha_5 x^2$  i  $\beta_5 y^2$  tako da oni imaju oblik:

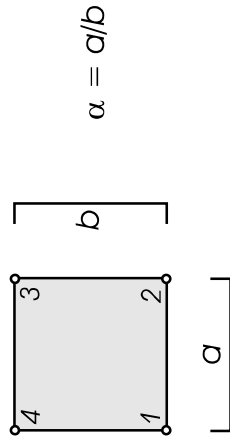
$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy + \beta_5 y^2$$

Dopunske generalisane koordinate  $\alpha_5$  i  $\beta_5$ , koje su iznad broja od osam stepeni slobode elementa, određuju se ta da homogene diferencijalne jednačine ravnoteže budu zadovoljene.

Matrica krutosti za ovaj element dobija se na isti način kao i prethodna i prikazana je na sledećoj strani. Rešenja koja se dobijaju primenom ovog elementa znatno brže konvergiraju ka tačnim rešenjima nego što je bio slučaj sa prethodnim elementom.

Matrica krutosti pravougaonog četvoročvornog elementa

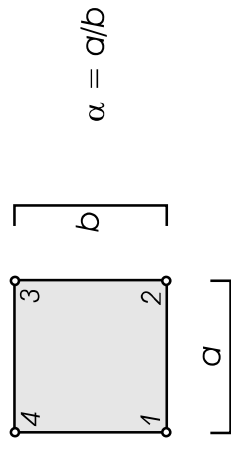


|   | 1                               | 2                               | 3                               | 4                               |                                 |
|---|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1 | $4\alpha^{-1} + 2(1-\nu)\alpha$ | $\frac{3}{2}(1+\nu)$            | $-4\alpha^{-1} + (1-\nu)\alpha$ | $-2\alpha^{-1} - (1-\nu)\alpha$ | $2\alpha^{-1} - 2(1-\nu)\alpha$ |
| 2 | $4\alpha + 2(1-\nu)\alpha^{-1}$ | $\frac{3}{2}(1-3\nu)$           | $2\alpha - 2(1-\nu)\alpha^{-1}$ | $-\frac{3}{2}(1+\nu)$           | $-\frac{3}{2}(1-3\nu)$          |
| 3 |                                 | $4\alpha^{-1} + 2(1-\nu)\alpha$ | $4\alpha + 2(1-\nu)\alpha^{-1}$ | $2\alpha^{-1} - 2(1-\nu)\alpha$ | $-2\alpha^{-1} - (1-\nu)\alpha$ |
| 4 |                                 |                                 |                                 | $4\alpha^{-1} + 2(1-\nu)\alpha$ | $4\alpha^{-1} + 2(1-\nu)\alpha$ |

$$K = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)}$$



Matrica krutosti pravougaonog četvoročvornog elementa

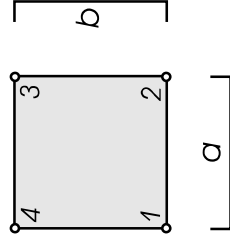


$$K = \frac{Eh}{$$

|   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |
| 4 |   |   |   |   |

SIMETRIČNO

Matrica krutosti pravougaonog četvoročvornog elementa



$$\alpha = a/b$$

$$A = 60 + \frac{30v^2}{1-v} =$$

$$B = 22.5(1-v) =$$

$$C = 30 - \frac{30v^2}{1-v} =$$

$$D = 22.5(1+v) =$$

$$F = 22.5(1-3v) =$$

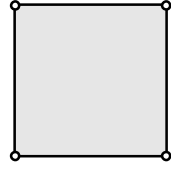
$K = \frac{Eh}{$

|   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |
| 4 |   |   |   |   |

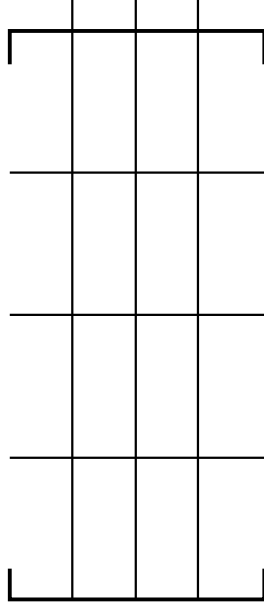
SIMETRIČNO



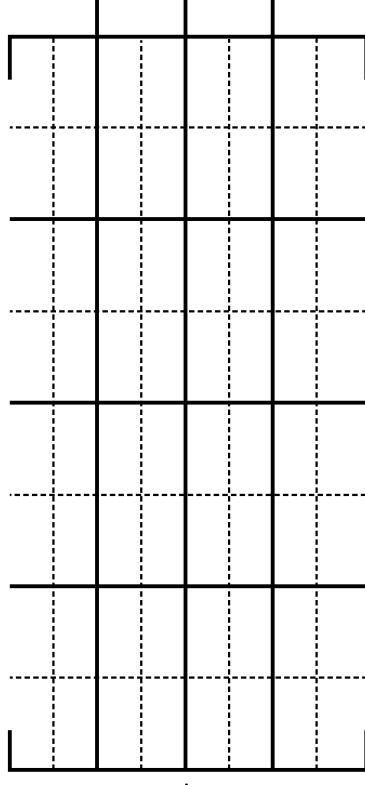
Element



$$K = \frac{Eh}{12(1 - \nu^2)}$$

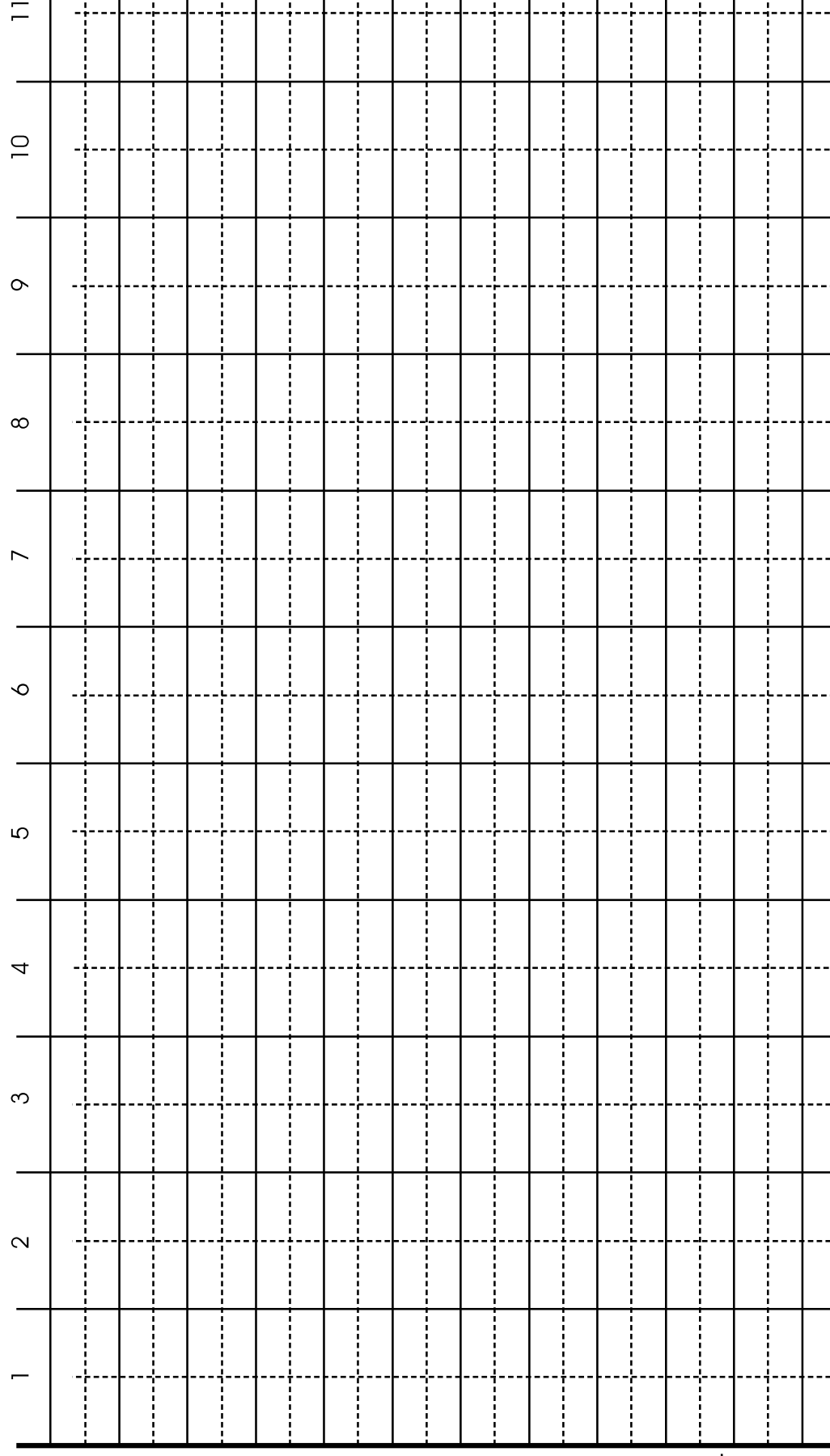


$$K = \frac{Eh}{\dots}$$



*Or subm*

*Element u matrici krutosti sistema*



$$K = \frac{Eh}{\dots}$$

# Matrica krutosti sistema

$$K = \frac{Eh}{\dots}$$

A 4x4 grid of squares. A dashed horizontal line runs between the second and third rows. The grid is composed of solid black lines for the outer border and the vertical dividers, and a dashed line for the horizontal divider.

$$K = \frac{Eh}{\dots}$$

A blank grid paper with a vertical axis labeled 1 to 11 and a horizontal axis labeled 1 to 10. The grid consists of solid lines forming a 10x10 area and dashed lines forming a 11x11 area.