Osnovi računarstva II
Čas 8

Miloš Daković

Elektrotehnički fakultet – Podgorica

2. april 2018.

Polinomi

- Polinom stepena N je potpuno određen svojim koeficijentima. Obilježimo nezavisno promjenljivu sa x i koeficijente uz odgovarajući stepen x-a sa a_0, a_1, ..., a_N. Dobijamo:
$$P(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
- Polinom se u Octave/MATLAB okruženju zapisuje kao niz koeficijenata:
$$P = [a_N, a_{N-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0]$$
- Na primjer, polinom $P(x) = 7x^5 - 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 8$ definišemo nizom od šest koeficijenata:

```
P = [7,-2,6,5,0,8]
```

  Uočite da je prvi koeficijent u nizu vezan za najveći stepen u polinomu, da je poslednji koeficijent slobodni član polinoma i da je koeficijent a_k jednak nuli ukoliko se x^k ne pojavljuje u posmatranom polinomu.

Izračunavanje vrijednosti polinoma

- Vrijednost polinoma u nekoj tački dobijamo funkcijom **polyval**.
- Ova funkcija ima dva argumenta: prvi argument su koeficijenti posmatranog polinoma, a drugi argument vrijednost(i) nezavisno promjenljive u kojima računamo vrijednost polinoma.
- Drugi argument može biti skalar, niz ili matrica. Vrijednost polinoma se računa za svaki element posebno i dobija se rezultat istih dimenzija.
- Primjeri:

  `polyval([1,2,5],3)` $\to 20$

  `polyval([1,0,0,-1],1:4)` $\to [0,7,26,63]$
- Izračunati vrijednosti polinoma $P(x) = 2x^3 - x + 1$ za vrijednosti x od 0 do 2 sa korakom 0.1:

```
p = [2, 0, -1, 1]
x = 0:0.1:2
y = polyval(p,x)
```

Nule polinoma

- Nule polinoma dobijamo funkcijom **`roots`**. Prosljeđujemo joj koeficijente polinoma a ona nam vraća vektor kolonu sa nulama polinoma.
- Primjeri:
  `roots([1,0,-4])` $\rightarrow [-2;\ 2]$
  `roots([1,-2,2])` $\rightarrow [1+i;\ 1-i]$
- Ukoliko su nam nule polinoma poznate, koeficijente polinoma možemo dobiti komandom **`poly`** kojoj prosljeđujemo niz nula.
- Primjeri:
  `poly([1,2])` $\rightarrow [1,-3,2]$ $\quad (x-1)(x-2) = x^2-3x+2$
  `poly([-2,2,0,0])` $\rightarrow [1,0,-4,0,0]$
- Uočite da funkcija **`poly`** uvijek daje 1 kao koeficijent polinoma uz najveći stepen. Funkcije **`poly`** i **`roots`** su međusobno inverzne.

Množenje polinoma

- Množenje dva polinoma dobijamo funkcijom **conv**. Na primjer ako je $P(x) = x^2 - 3$ i $Q(x) = 2x^3 - x + 1$, tada koeficijente proizvoda $R(x) = P(x)Q(x)$ dobijamo ovako:
  conv([1,0,-3],[2,0,-1,1]) $\rightarrow [2, 0, -7, 1, 3, -3]$
  što znači da je rezultat množenja:
  $R(x) = 2x^5 - 7x^3 + x^2 + 3x - 3$
- Zadatak: Za dato N odredite zbir svih koeficijenata polinoma: $P(x) = (1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)\cdots(1+x+\ldots+x^N)$ i izračunajte vrijednost polinoma $y = P(x)$ za $x = 1/\pi$.

```
P=1;
for k=1:N
      P = conv(P,ones(k+1,1));
end
zbir = sum(P)
y = polyval(P,1/pi)
```

Dijeljenje polinoma

- Dijelienjem polinoma $P(x)$ sa polinomom $Q(x)$ dobijaju se dva polinoma: rezultat $R(x)$ i ostatak $S(x)$, takvi da vrijedi: $P(x) = Q(x)R(x) + S(x)$, pri čemu je stepen polinoma $S(x)$ manji od stepena polinoma $Q(x)$.
- Ovu uperaciju obavlja funkcija **`deconv`** koja ima dva ulazna argumenta (polinomi P i Q) i dvije izlazne vrijednosti (koeficijenti polinoma R i S).
- Primjer: Naći rezultat i ostatak pri dijeljenju polinoma $4x^6 + x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 7x + 1$ sa polinomom $x^2 - 2$. Rezultat dobijamo komandom:

```
[r,s]=deconv([4,1,-1,2,1,-7,1],[1,0,-2])
```

$r : [4, 1, 7, 4, 15]$ $\qquad R(x) = 4x^4 + x^3 + 7x^2 + 4x + 15$

$s : [0, 0, 0, 0, 0, 1, 31]$ $\qquad S(x) = x + 31$

- Uočite da niz koeficijenata **`s`** ima nule na početku tako da je operacija: **`conv(r,q)+s`** izvodiva.

Sabiranje i oduzimanje polinoma

- Jednostavno saberemo (oduzmemo) odgovarajuće koeficijente. Problem se javlja kada polinomi nijesu istog stepena. U tom slučaju možemo polinomu nižeg stepena na početak dodati odgovarajući broj nula.
- Moguće rješenje:

```
function p = SabiranjePolinoma(a,b)
d = [length(a), length(b)];
n = max(d)-d;
p = [zeros(n(1),1),a]+[zeros(n(2),1),b];
```

- Razmislite kako bi se iz rezultata mogli eliminisati nulti koeficijenti na početku niza. Oni će se pojaviti, na primjer, u slučaju sabiranja polinoma x^3-2x^2+3x+7 i polinoma $-x^3+2x^2+x+1$.
- Pokušajte napraviti drugačiji algoritam za sabiranje polinoma.

Izvod polinoma

- Napišite funkcijski fajl ***izvod.m*** koji uzima koeficijente polinoma $P(x)$ a vraća koeficijente izvoda ovog polinoma po varijabli x, $P'(x) = \frac{d}{dx}P(x)$.
- Iz matematike znamo da je izvod $a_k \cdot x^k$ jednak $k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$ za $k > 0$. Izvod konstantnog člana a_0 je nula.
- Predlog rješenja:

```
function r = izvod(p)
d = length(p)-1;
r = p(1:end-1) .* (d:-1:1);
```

- Analizirajte predloženo rješenje. Provjerite ga na nekolika primjera. Pokušajte da nađete izvod konstantnog polinoma $P(x) = 7$. Modifikujte rješenje tako da i u ovom slučaju daje očekivani rezultat.

Integral polinoma

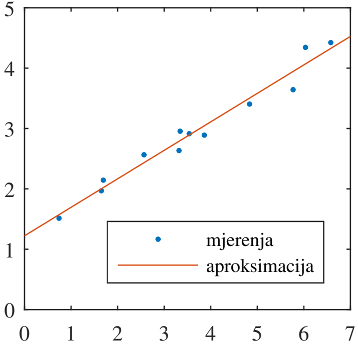
- Napišite funkcijski fajl ***integral.m*** koji uzima koeficijente polinoma $P(x)$ a vraća koeficijente integrala ovog polinoma po varijabli x, $P'(x) = \frac{d}{dx}P(x)$. Drugi ulazni argument je opciona integraciona konstanta, čija je podrazumijevana vrijednost nula.
- Znamo da je integral $a_k \cdot x^k$ jednak $\frac{1}{k+1} \cdot a_k \cdot x^{k+1} + konstanta$.
- Predlog rješenja:

```
function r = integral(p,c)
if nargin<2
    c = 0;
end
r = [p ./ (length(p):-1:1) , c];
```

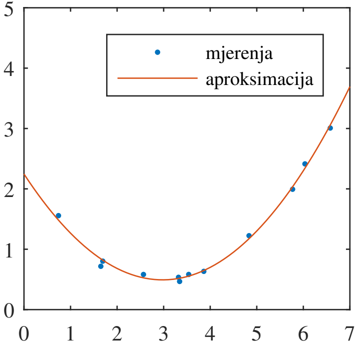
- Analizirajte predloženo rješenje.

Polinomi – aproksimacija i interpolacija podataka

- Često nam je potrebno odrediti koeficijente polinoma, datog stepena, koji na najbolji mogući način aproksimira (i interpolira) dati skup mjerenja.



$y = ax + b$



$y = ax^2 + bx + c$

Aproksimacija i interpolacija podataka

- Funkcija **polyfit** se koristi za rješavanje ovakvih problema.
- Funkcija ima tri ulazna argumenta. Privi i drugi su nizovi x i y koji moraju biti istih dimenzija a predstavljaju mjerenja. Treći argument je stepen polinoma kojim želimo aproksimirati zadata mjerenja.
- Funkcija vraća koeficijente polinoma traženog stepena koji aproksimira mjerene podatke sa najmanjom kvadratnom greškom.
- Dobijeni polinom možemo izračunati za proizvoljnu vrijednost argumenta x i time interpolirati skup mjerenja.

```
X = [ 1,  2, 5,  7,  15];
Y = [19, 12, 3,  7, 103];
p = polyfit(X,Y,2)
y3= polyval(p,3)
x = 0:0.1:15;
y = polyval(p,x);
plot(x,y,X,Y,'*')
```

Stringovi

- Octave i MATLAB prepoznaju varijable tekstualnog tipa. Ranije smo vidjeli da se one mogu definisati korišćenjem apostrofa. Ukoliko se apostrof pojavljuje u stringu koji zadajemo potrebno ga je dva puta ponoviti.

```
str1 = 'Tekstualni tip varijable'
str2 = 'Apostrof '' u tekstu'
```

- Ove varijable su vektor vrste, pri čemu je svaki element vektora jedno slovo. Indeksiranjem možemo dobiti:

  `str1(1:5)` početnih pet slova u stringu (ako ih ima toliko)
  `str1(2:2:end)` svako drugo slovo u stringu
  `str1(end:-a:1)` „naopako“ napisan string
  `str3 = [str1, ' ', str2]` tri stringa spojena u jedan
  `str1(12)='T'` stavljamo T na mjestu dvanaestog slova

Funkcije za rad sa stringovima

- `length(s)` dužina stringa s
- `blanks(N)` string od N razmaka (blanko karaktera)
- `deblank(s)` uklanja blanko karaktere sa kraja stringa
- `strcmp(s1,s2)` poredi dva stringa na jednakost
- `strcmpi(s1,s2)` poredi dva stringa na jednakost ne vodeći računa o malim i velikim slovima
- `num2str(x)` prevodi broj x u njegov tekstualni zapis
- `int2str(n)` prevodi cio broj x u njegov tekstualni zapis
- `str2num(s)` konvertuje string s u broj
- `eval(s)` tumači string s kao Octave/MATLAB komandu i izvršava ga. Na primjer, ako je u vrijednost varijable $n = 3$ komanda:

  ```
  eval(['x',int2str(n),'=17'])
  ```

  će dodijeliti vrijednost 17 varijabli $x3$.

Funkcije za rad sa stringovima

- **`abs(s)`** daje numeričke vrijednosti kodova svih karaktera u stringu s. **`abs('A')`** daje vrijednost 65 (ASCII kod slova 'A').
- **`char(n)`** niz numeričkih vrijednosti (kodova) pretvara u niz karaktera (string). **`char(67)`** je slovo 'C'.
- **`strfind(s1,s2)`** traži string s_2 u stringu s_1 i ako ga pronađe vraća odgovarajuću poziciju. U suprotnom vraća nulu.
- **`strrep(s1,s2,s3)`** svako pojavljivanje stringa s_2 u stringu s_1 zamjenjuje stringom s_3.
- **`regexp(s,re)`** pretražuje pojavljivanja regularnog izraza re u stringu s. Na primjer **`regexp(s,'d+')`** pronalazi cijele brojeve u stringu. Provjerite dokumentaciju za ovu komandu komandama **`help`** i **`doc`**.
- **`lower(s)`** (**`upper(s)`**) konvertuje sva slova u mala (velika) slova
- **`split`**, **`bin2dec`**, **`dec2bin`**, **`dec2hex`**, **`hex2dec`**, . . . Komanda **`help strfun`** daje spisak svih funkcija za rad sa stringovima.

Primjer rada sa stringovima

- U stringu s potrebno je svako pojavljivanje slova ’c’ zamijeniti slovom ’d’.
- Moguće rješenje:

```
for k=1:length(s)
    if s(k)=='c'
        s(k)='d';
    end
end
```

- Može i ovako:

```
strrep(s,'c','d')
```

- Ili ovako:

```
s(s=='c')='d'
```

Zadatak sa stringovima

- String sadrži neki izraz u kojem se pojavljuju male i srednje zagrade. Napisati funkciju ***provjera.m*** koja će ispitati da li su, u datom stringu, zagrade „korektno“ postavljene.
- Korektnost zagrada se provjerava tako što se otvorena i zatvorena zagrada moraju poklapati po tipu.
  Naime, stringovi: $'(x+[a-b]c)+1'$ i $'(1+(2+[3+(4+5)]))'$
  imaju korektno postavljene zagrade,
  dok stringovi: $'(x+1]'$ i $'(a+(b+[c+(d+e]-g)-h)-c)-f'$
  nemaju korektne zagrade.
- Funkcija vraća vrijednost 1 za korektne zagrade i 0 ako zagrade nijesu korektne.
- Ukoliko se od funkcije traže dvije izlazne vrijednosti, druga vrijednost je pozicija u stringu na kojoj je greška u postavljanju zagrada otkrivena. Za string $'[a+b)+(c+d]'$ odgovor treba biti 5.

Ostali zadaci

- Nađite zbir: $1^2+3^2+\cdots+99^2$
- Izračunajte: $\sin 15^\circ + \sqrt{\frac{1}{\pi+1}}$
- Elementi kvadratne matrice A reda N su definisani kao

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{za } i<j \\ 1 & \text{za } i=j \\ \frac{1}{i-j} & \text{za } i>j \end{cases}$$

  Izračunajte determinantu matice A za $N=7$, $N=12$ i $N=100$.
- Za zadati prirodan broj n odredite sve moguće načine kako se n može zapisati u obliku zbira kvadrata tri prirodna broja pri čemu redoslijed sabiraka nije bitan. Nađite sva rješenja za $n=386$ i $n=383$. Odredite koliko brojeva u intervalu od 1 do 100 ne može biti zapisano na ovaj način i koji su to brojevi.