

Osnovi računarstva II

Čas 5

Miloš Daković

Elektrotehnički fakultet – Podgorica

11. mart 2019.

- Predstaviti 3D liniju ili površ koristeći se dvodimenzionom površinom nije jednostavan zadatak. Mora se na neki način izvršiti projekcija 3D objekta na ravan (ravan ekrana ili papira).
- Posmatračemo dva tipa zadataka: crtanje linija u tri dimenzije i crtanje površi u tri dimenzije.
- Linija se crta kao niz povezanih tačaka pri čemu je potrebno za svaku tačku zadati tri koordinate (x, y, z) .
- Površ se crta preko elementarnih površi (oblika trougla ili četvorougla). Često se mora voditi računa da li je površ „vidljiva“ ili je zaklonjena nekom drugom površi.

3D grafika – linije (krive)

- Komanda **plot3(x, y, z)** crta liniju u 3D. Nizovi *x*, *y* i *z* imaju jednake dužine i predstavljaju koordinate tačaka koje čine liniju.
- Grafiku se mogu dodati oznake standardnim komandama **xlabel**, **ylabel**, **title**, **grid**. Dodaje se funkcija **zlabel**, a funkciji **text** prosljeđujemo 4 argumenta, tri koordinate i tekst koji tamo treba postaviti.
- Komandom **view(azimut, elevacija)** se podešava „pogled“ na 3D grafik. Parametri *azimut* i *elevacija* su uglovi u stepenima.
- Komandi **axis** se u ovom slučaju prosljeđuje niz od 6 vrijednosti [*xmin*, *xmax*, *ymin*, *ymax*, *zmin*, *zmax*].

3D grafika – primjer krive linije

Neka je kriva linija
zadata jednačinama:

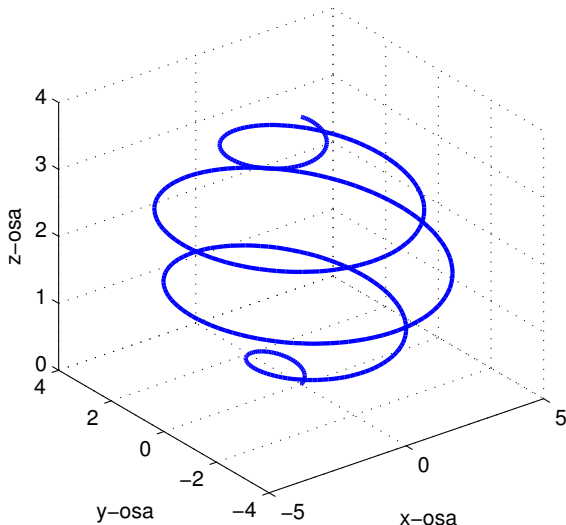
$$x(t) = t(4-t) \cos(2\pi t)$$

$$y(t) = t(4-t) \sin(2\pi t)$$

$$z(t) = t$$

za $0 \leq t \leq 4$.

```
t = 0:0.01:4;  
x = (t.*(4-t)).*  
    cos(2*pi*t);  
y = (t.*(4-t)).*  
    sin(2*pi*t);  
z = t;  
plot3(x,y,z);
```



3D grafika – površi

- Komanda `[X, Y]=meshgrid(x1, y1)` kreira dvodimenzionalnu matricu X i Y čiji su elementi određeni vektorima x_1 i y_1 . Ovo će biti „domen“ naše površi. Za svaku tačku domena izračunamo vrijednosti funkcije $Z = f(X, Y)$.
- Komanda `mesh(X, Y, Z)` crta „mrežastu“ površ.
- Komanda `surf(X, Y, Z)` boji elementarne površi. Dodatnom komandom `shading interp` mijenja se izgled grafika.
- Komanda `contour(X, Y, Z)` crta konturne linije površi.
- Komanda `imagesc(x1, y1, Z)` bojom predstavlja z koordinatu.
- Komanda `colorbar` na grafik dodaje objašnjenje numeričkih vrijednosti boja dok `colormap(paleta)` bira paletu boja. Često korišćene palete su `jet`, `hot`, `gray`,...
- Još komandi: `waterfall(X, Y, Z)`, `quiver(X, Y, Z)`, `meshc(X, Y, Z)`, `contour3(X, Y, Z)` ...

3D grafika – primjer površi

- Posmatrajmo površ definisanu sa

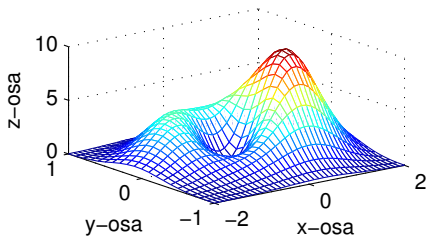
$$z = f(x, y) = ((4x + 1)^2 - 16xy + 48y^2) e^{-x^2 - 5y^2}$$

na oblasti $-2 \leq x \leq 2$ i $-1 \leq y \leq 1$.

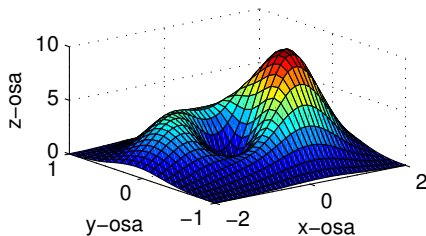
- Koristićemo korak od **0.1** po x i po y osi. Komandom **meshgrid** formiraćemo parove tačaka (x, y) gdje računamo vrijednosti funkcije $f(x, y)$.
- Grafike nacrtajmo na četiri načina, koristeći se komandama: **mesh**, **surf**, **imagesc** i **contour**.
- Razmislite kako na graficima da nekim markerom (kružić, zvjezdica...) obilježimo tačku gdje funkcija uzima najveću vrijednost. Mogu vam pomoći komande: **max** (biće objašnjena uskoro), **hold on**, **hold off**, **plot3**, **plot**,

3D grafika – primjer površi

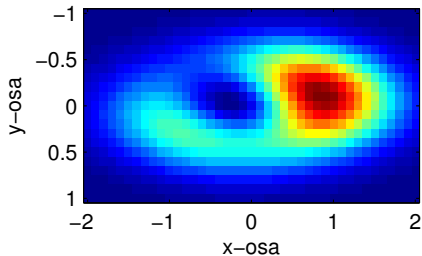
mesh



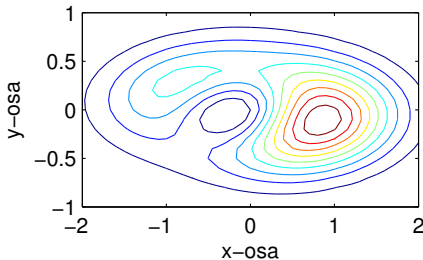
surf



imagesc



contour



3D grafika – primjer površi – komande

```
x1 = -2:0.1:2;  
y1 = -1:0.1:1;  
[x,y] = meshgrid(x1,y1);  
z = ((4*x+1).^2-16*x.*y+48*y.^2) .*exp(-x.^2-5*y.^2);  
  
subplot(2,2,1)  
    mesh(x,y,z);  
    xlabel('x-osa'), ylabel('y-osa'), zlabel('z-osa')  
subplot(2,2,2)  
    surf(x,y,z);  
subplot(2,2,3)  
    imagesc(x1,y1,z);  
subplot(2,2,4)  
    contour(x,y,z);  
print Cas5_s11 -depsc2
```


Analiza podataka – funkcije max i min

- Funkcija **max** vraća najveću vrijednost prosljeđenog vektora.
- Možemo je pozvati ovako: $M = \max(X)$.
- Drugi način pozivanja je slučaj kada od funkcije tražimo da vrati dvije vrijednosti: $[M, p] = \max(X)$. Najveća vrijednost se smješta u varijablu M dok se pozicija najveće vrijednosti u nizu X smješta u varijablu p .
- Ukoliko se ovoj funkciji proslijedi matrica, tada se maksimum (i odgovarajuća pozicija) određuje za svaku kolonu posebno i kao rezultat dobijamo niz vrijednosti.
- Na isti način se koristi i funkcija **min**, s tim što ona određuje minimum.
- Ako je A matrica šta je $\min(\min(A))$? Šta će sadržati varijabla p nakon izvršenja komande $[M, p] = \max(\min(A))$?

Analiza podataka – suma, proizvod, prosjek

- Funkcija **sum**(X) daje zbir svih elemenata niza X .
- Funkcija **prod**(X) daje proizvod svih elemenata niza X .
- Funkcija **mean**(X) daje prosječnu vrijednost elemenata niza X .
- Funkcija **median**(X) daje „srednji“ element niza X .
- Funkcija **sort**(X) vraća elemente niza X sortirane u neopadajući poredak. Ukoliko od ove funkcije tražimo dvije izlazne vrijednosti **[S, p] = sort**(X) tada se u varijablu p upisuju pozicije sortiranih elemenata u originalnom nizu.
- Ako navedenim funkcijama prosljedimo matricu, one navedenu operaciju izvode za svaku kolonu matrice i vraćaju niz vrijednosti.
- Šta je rezultat izvršenja **sum(1:2:39)**? Ako je X niz šta ćemo dobiti izvršenjem komandi: **[S, p]=sort**(X) i **$X(p([1, 2]))$** ?

- Za niz X dužine N funkcija $S = \text{cumsum}(X)$ će vratiti niz parcijalnih suma $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
- Primjer: $\text{cumsum}([1, 4, 7, 2])$ vraća $[1, 5, 12, 14]$.
- Funkcija cumprod umjesto sabiranja množi odgovarajuće elemente. Na primjer $\text{cumprod}(1:10)$ vraća niz faktoriijela brojeva od 1 do 10.
- Funkcija $D = \text{diff}(X)$ vraća niz takav da je $D_n = X_{n+1} - X_n$ za $n = 1, 2, \dots, N - 1$ gdje je N dužina niza X . Uočite da dobijeni niz ima jedan element manje od polaznog.
- Primjer: $\text{diff}([2, 4, 4, 7, 2])$ vraća $[2, 0, 3, -5]$.

Numeričko računanje određenih integrala

- Iz matematike je poznato pravougaono pravilo integracije

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(a + k\Delta_x) \Delta_x, \quad \Delta_x = \frac{b-a}{N}$$

Možemo ga tumačiti ovako: Izračunajmo vrijednosti funkcije na zadanom intervalu od a do b u N ravnomjerno raspoređenih tačaka. Saberimo dobijene vrijednosti i pomnožimo ih sa korakom.

- Primjer: Nađimo $I = \int_0^{\pi} \frac{x^2 + \sin(x)}{1 + e^{-x}} dx$

$dx = \text{pi}/200;$

$x = 0:dx:\text{pi}-dx;$

$f = (x.^2 + \sin(x)) ./ (1 + \exp(-x));$

$I = \text{sum}(f) * dx$

'Koliko tačaka uzeti?'

'Zašto pi-dx?'

Numeričko računanje integrala

- Posmatrajmo integrale sa promjenljivom gornjom granicom

$$\int_a^x f(t) dt \text{ gdje je } x \text{ u nekom intervalu } a \leq x \leq b.$$

- Primjer: Nađimo $I(t) = \int_0^t \frac{x^2 + \sin(x)}{1 + e^{-x}} dx$ za $0 \leq t \leq 2\pi$.

Nacrtajmo grafik funkcije $I(t)$.

```
dt = pi/200;
```

'Koliko tačaka uzeti?'

```
t = 0:dt:2*pi-dt;
```

```
f = (t.^2+sin(t))./(1+exp(-t));
```

```
I = cumsum(f)*dt;
```

```
plot(t+dt, I)
```

'Zašto t+dt?'

Numeričko računanje izvoda

- Poznato je da se izvod neke funkcije $f(t)$ može približno izračunati kao $\frac{df(t)}{dt} \approx \frac{f(t + \Delta_t) - f(t)}{\Delta_t}$.
- Pretpostavimo da smo mjerili poziciju $x(t)$ nekog tijela u vremenskim trenucima t . Neka su rezultati mjerenja smješteni u nizovima X i T (očigledno trebaju biti jednake dužine i niz T je rastući). Odredimo i nacrtajmo brzinu tijela $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.
- Smatrajući da su varijable X i T definisane u radnom prostoru zadatak možemo riješiti ovako:

```
V = diff(X) ./diff(T);
```

```
plot(t(1:end-1)+dt/2, V)
```

'Zašto ovako?'

Ukoliko su svi vremenski trenuci ravnomjerno raspoređeni sa razmakom d tada umjesto **diff(T)** možemo staviti **d**.

Algoritmi – primjeri zadataka

- 1 Ulazni podatak je broj N ($N > 3$) i kvadratna matrica A reda N . Naći kvadratnu podmatricu reda tri matrice A kod koje je zbir elemenata maksimalan. Na izlazu prikazati podmatricu i zbir njenih elemenata. *Znate li šta je podmatrica?*
- 2 Prethodni zadatak riješiti uz pretpostavku da se podmatrica dobija izborom tri uzastopne vrste i tri uzastopne kolone matrice A .
- 3 Pronaći sve prirodne brojeve n ($n \leq M$, M je ulazni podatak) koji imaju osobinu da je $n^2 + 2$ prost broj. Napomena: broj n je prost ako nema drugih djelilaca osim 1 i n .
- 4 Naći najmanji prirodan broj n takav da je:

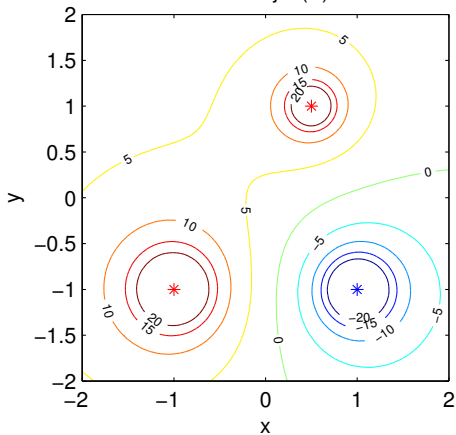
$$\frac{n^3 - 40n^2 - 700n + 1200}{50n^2 + 72n + 1500} > \pi$$

Zadatak - elektrostatika

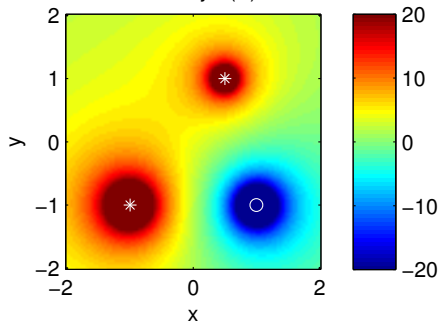
- Posmatraju se tri tačkasta naelektrisanja u ravni. Prvo naelektrisanje $Q_1 = 1\text{nC}$ nalazi se na poziciji $(-1, -1)$, naelektrisanje $Q_2 = -1\text{nC}$ nalazi se na poziciji $(1, -1)$, dok se treće naelektrisanje $Q_3 = 0.5\text{nC}$ nalazi na poziciji $(0.5, 1)$.
- Izračunajte potencijal u tačkama ravni $-2 \leq x \leq 2$ i $-2 \leq y \leq 2$ uzimajući po 98 tačaka duž svake koordinatne ose. Sve dimenzije su u metrima.
- Potencijal predstavite grafički konturnim linijama za vrijednosti potencijala od -20V do 20V sa korakom od 5V .
- Dodatno potencijal predstavite **imagesc** funkcijom ograničavajući se na vrijednosti od -20V do 20V .

Zadatak - elektrostatika – rezultat

Potencijal (V)



Potencijal (V)



Zadatak - elektrostatika – predlog rješenja

```
dd=4/97;
x1d=-2:dd:2;
y1d=-2:dd:2;
[x,y]=meshgrid(x1d,y1d);
e0=8.854e-12;

x1=-1; y1=-1; Q1=1e-9;
r1=sqrt((x-x1).^2+(y-y1).^2);
v1=1/(4*pi*e0)*Q1./r1;
x2=1; y2=-1; Q2=-1e-9;
r2=sqrt((x-x2).^2+(y-y2).^2);
v2=1/(4*pi*e0)*Q2./r2;
x3=0.5; y3=1; Q3=0.5e-9;
r3=sqrt((x-x3).^2+(y-y3).^2);
v3=1/(4*pi*e0)*Q3./r3;

v=v1+v2+v3;

subplot(1,2,1)
[c,h]=contour(x,y,v,-20:5:20);
clabel(c,h,'FontSize',6)
xlabel('x'), ylabel('y')
axis square
hold on
plot(x1,y1,'r*')
plot(x2,y2,'b*')
plot(x3,y3,'r*')
hold off

subplot(1,2,2)
imagesc(x1d,y1d,v,[-20,20]);
xlabel('x'), ylabel('y')
colorbar
axis square
axis xy
```