

# Osnovi računarstva II

## Čas 3

Miloš Daković

Elektrotehnički fakultet – Podgorica

1. mart 2021.

# Softver za numerička izračunavanja

- MATLAB

- Standard za inženjerske proračune
- Aktualna verzija je 9.9 (MATLAB 2020b). Za ono što ćemo mi raditi dovoljno je da verzija bude 6.5 (2002) ili veća.
- + Mnoštvo proširenja za specifične primjene *toolbox*-ovi
- Visoka cijena

- Octave

- + Open source (GNU Licenca)
- Aktualna verzija je 6.2.0.  
<http://www.gnu.org/software/octave/>
- + dobra kompatibilnost sa Matlab-om, cijena
- korisnički interfejs, brzina izvršavanja

- Python

- + Open source
- Aktualna verzija je 3.9.2. <http://www.python.org>

- Julia, FreeMat, SciLab, R, ...

# MATLAB/Octave - elementarna izračunavanja

- MATLAB i Octave su interpreteri (izvršavaju komande jednu za drugom bez prevođenja (kompajliranja)).
- Radno okruženje MATLAB-a ima više prozora. Naš fokus će biti na „Command window“ prozoru.
- Jednostavna izračunavanja vršimo tako što otkucamo izraz i pritisnemo taster ENTER.
- na primjer na komandu:  $2+3.14*(7-3)+(2/3)^7+3e-2$   
MATLAB/Octave odgovara sa: **ans = 14.6485**
- Osnovne računske operacije:  $+$   $-$   $*$   $/$  , stepenovanje:  $^$  , za odvajanje cijelog i decimalnog dijela broja se koristi tačka, zagrade u izrazima koristimo na standardni način, notacija  $8.854e-12$  predstavlja broj  $8.854 \cdot 10^{-12}$ , operator množenja ne smijemo izostavljati —  $3(4+2)$  rezultuje porukom o grešci..

# Varijable

- Operator dodjele vrijednosti je `=`
- Naziv varijable se može sastojati od slova i brojeva, pri čemu prvi simbol mora biti slovo. Mala i velika slova se razlikuju (Case sensitive). U nazivu je dozvoljen simbol podvlaka `_`.
- Varijable nije potrebno deklarirati. Tip varijable se određuje na osnovu tipa izraza na desnoj strani znaka jednakosti.
- Jednom definisana varijabla se može koristiti u narednim izrazima.
- Primjeri dodjele vrijednosti:

```
a = 12
```

```
B = 5*2-3
```

```
b = 'tekst'
```

```
c23 = a*B + 8
```

```
a = 0
```

```
d = a*c23
```

# Radni prostor

- Skup svih definisanih varijabli je radni prostor. Možemo ga tumačiti kao dio RAM memorije koji sadrži varijable.
- Radni prostor možemo sačuvati komandom **save ime** koja na disku pravi fajl `ime.mat` u kome se nalazi trenutni sadržaj radnog prostora.
- Komanda **save ime a B c23** može se koristiti za selektivno čuvanje varijabli ako im navedemo imena odvojena razmacima.
- Komandom **load ime** učitavamo ranije sačuvani radni prostor iz fajla `ime.mat` u radnu memoriju.
- Komandom **clear** brišemo radni prostor.
- Komandom **who** saznajemo imena svih varijabli u radnom prostoru. Komanda **whos** će nam za svaku varijablu dati dodatne informacije (tip varijable, zauzeće memorije u bajtovima...)

# Konstante i kompleksni brojevi

- Konstante: `pi i j eps Inf NaN`. Znamo šta je  $\pi$ ,  $i$  i  $j$  su oznake za imaginarnu jedinicu, Rezultat izraza `2/0` je `Inf`, dok izraz `0/0` daje rezultat `NaN`.
- Sa kompleksnim brojevima radimo na „prirodan“ način:

$$x = 1+3*j$$

$$y = 2i*x$$

$$z = (1+j) / (1-j)$$

$$ili: y = 2*i*x$$

$$ili: z = (1+1j) / (1-1j)$$

- Ako koristite konstante `i` i/ili `j`, nemojte koristiti varijable sa istim imenom. Primjer:

$$i = 5$$

$$Q = 2+3*i$$

Varijabla `Q` ovdje dobija vrijednost `17`.

# Vektori i matrice

- Vektor vrstu definišemo koristeći se uglastim zagradama i zapedom (ili razmakom) za odvajanje elemenata.  $\mathbf{A} = [2, 5, 8, 1]$
- Vektor kolonu definišemo koristeći se tačka-zarezom za odvajanje elemenata.  $\mathbf{B} = [4; 0; 9]$
- Matricu definišemo ovako  $\mathbf{C} = [1, 2, 3; 4, 5, 6]$
- Matematički zapisi:

$$\mathbf{A} = [2 \ 5 \ 8 \ 1] \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- Dužinu vektora  $\mathbf{A}$  dobijamo funkcijom  $\mathbf{length}(\mathbf{A})$
- Dimenzije marice  $\mathbf{C}$  dobijamo funkcijom  $\mathbf{size}(\mathbf{C})$

# Vektori i matrice – indeksiranje

- Elementu vektora pristupamo navodeći indeks u zagradi:  $A(3)$
- Za matricu navodimo vrstu i kolonu elementa:  $C(2, 3)$
- **end** označava poslednji elemenat:  $A(\text{end})$   $C(\text{end}, \text{end}-1)$
- Indeksi mogu biti zadati u obliku niza:  $A([1, 2, 4, 3, 1])$
- Kod matrica se tako dobijaju podmatrice:  $C([1, 2], [2, 3])$
- Ako umjesto indeksa stavimo  $:$  podrazumijeva se da uzimamo sve elemente. Treću kolonu matrice  $C$  dobijamo kao  $C(:, 3)$
- Specijalno, ako je  $C$  matrica tada je  $C(:)$  vektor kolona dobijen nadovezivanjem kolona matrice  $C$ . Dodatno, u posmatranom primjeru  $C(3)$  daje rezultat 2.

$$A = [2 \quad 5 \quad 8 \quad 1] \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$



# Specijalne matrice

- Matrica dimenzija  $N \times M$  čiji su svi elementi jednaki nuli dobija se funkcijom `zeros(N, M)`. Ako je kvadratna može i `zeros(N)`.
- Funkcije `ones(N, M)` i `ones(N)` elemente postavljaju na vrijednost 1.
- Jedinična matrica (jedinice na glavnoj dijagonali) dobija se funkcijom `eye(N)`. I ovdje je moguće `eye(N, M)`.
- `rand(N, M)` daje matricu sa slučajnim vrijednostima od 0 do 1.
- `randn(N, M)` daje matricu sa slučajnim vrijednostima koje podliježu Gausovoj raspodjeli vjerovatnoća.
- `magic(N)` daje „magični kvadrat“.
- MATLAB i Octave posjeduju odličan sistem pomoći. Ako želimo saznati više informacija o nekoj funkciji, na primjer `magic` dovoljno je zadati komandu `help magic`.

# Blok matrice i operator :

- Složene matrice možemo zadavati blok po blok, vodeći računa da se blokovi moraju ispravno „složiti“ inače dobijamo poruku greške. Na primjer ako je matrica  $S$  dimenzija  $2 \times 6$ ,  $P$  dimenzija  $3 \times 3$  i vektor  $V$  dimenzija  $5 \times 1$  tada sa:  $A = [V, [S; P, \text{eye}(3)]]$  dobijamo matricu od pet vrsta i šest kolona.
- $a = 1:7$  definiše niz  $a$  kao vektor vrstu sa elementima 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7.
- $b = 1:3:15$  definiše niz  $b$  kao vektor vrstu sa elementima 1, 4, 7, 10 i 13. Uočite da je drugi podatak korak i da se krajnji podatak može a ne mora pojaviti u rezultujućem nizu.
- Operator `:` se često koristi u radu sa vrstama i kolonama matrica. Na primjer  $D = C(1:2:\text{end}, :)$  izdvaja sve neparne kolone matrice  $C$  u novu matricu  $D$ .

# Operacije sa matricama i poljima brojeva

- Sabiranje i oduzimanje:  $A = (B+C) - D + 3$  – moraju biti istih dimenzija. Specijalno jedan sabirak može biti skalar.
- Transponovanje:  $A = B'$  ili  $A = B.'$  . Kod kompleksnih matrica  $A = B'$  ujedno i konjuguje sve elemente.
- Matrično množenje:  $A = B * C$  – unutrašnje dimenzije se moraju poklapati, ili jedan činilac mora biti skalar.
- Množenje polja brojeva:  $A = B * C$  –  $B$  i  $C$  moraju biti istih dimenzija, množenje se vrši element po element.
- Stepenuvanje matrica:  $A = B^3$  – matrična operacija,  $B$  mora biti kvadratna matrica.
- Stepenuvanje polja brojeva:  $A = B.^3$  – svaki element matrice  $B$  se diže na treći stepen.

# Operacije sa matricama i poljima brojeva

- **det(A)** je determinanta matrice  $A$  (mora biti kvadratna).
- **inv(A)** je inverzna matrica matrice  $A$  (mora biti kvadratna).
- Dvije matrice, istih dimenzija, možemo podijeliti „element po element“ ovako:  $A = B ./ C$
- Postoji i „matrično dijeljenje“  $A = B / C$  i  $D = B \setminus C$ , koje se za slučaj kvadratnih matrica svodi na  $A = B \times C^{-1}$  i  $D = B^{-1} \times C$
- **flipud(A)** – provjerite šta radi sa **help** komandom
- **fliplr(A)** – provjerite šta radi sa **help** komandom
- Ako je  $A$  proizvoljna matrica dimenzija  $5 \times 7$  šta će biti rezultat izvršenja komande:

$$T = A(:, \text{end}:-1:1) - \text{fliplr}(A)$$

# Matematičke funkcije

- **abs (x)** apsolutna vrijednost
- **real (x)** realni dio
- **imag (x)** imaginarni dio
- **conj (x)** konjugovanje
- **sqrt (x)**  $\sqrt{x}$
- **exp (x)**  $e^x$
- **log (x)**  $\ln x$
- **log10 (x)**  $\log_{10} x$
- **sign (x)** znak broja
- **sin (x)**
- **cos (x)**
- **tan (x)**  $\operatorname{tg} x$
- **asin (x)**  $\arcsin x$
- **acos (x)**  $\arccos x$
- **atan (x)**  $\operatorname{arctg} x$
- **round (x)** najbliži cio broj
- **ceil (x)** veći cio broj
- **floor (x)** manji cio broj
- **fix (x)** šta li ona radi?
- **gcd (a, b)**  
najveći zajednički djelilac
- **lcm (a, b)**  
najmanji zajednički sadržalac
- **rem (a, b)**  
ostatak pri dijeljenju  $a$  sa  $b$

# Funkcije, vektori i matrice, kraj rada

- Većina standardnih matematičkih funkcija dozvoljava da im se kao argument proslijedi vektor ili matrica. Tada se funkcija primjenjuje na svaki element vektora (odnosno matrice) a rezultat je istih dimenzija kao ulazni podatak.
- Neka nam je zadatak da napravimo tablicu vrijednosti sinusa i kosinusa za sve uglove od 0 do 180 stepeni sa korakom od 15 stepeni. Jedan od načina rješavanja ovog zadatka je:

```
x = (0:15:180)';  
y = x*pi/180;  
T = [x, sin(y), cos(y)]
```

- Tačka-zarez na kraju komande sprečava ispis rezultata u komandnom prozoru.
- Komandom **exit** završavamo rad.