Osnovi računarstva II
Čas 8

Miloš Daković

Elektrotehnički fakultet – Podgorica

5. april 2021.

Polinomi

- Polinom stepena N je potpuno određen svojim koeficijentima. Obilježimo nezavisno promjenljivu sa x i koeficijente uz odgovarajući stepen x-a sa a_0, a_1, ..., a_N. Dobijamo:
$$P(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
- Polinom se u Octave/MATLAB okruženju zapisuje kao niz koeficijenata:
$$P = [\, a_N,\ a_{N-1}, \ldots,\ a_2,\ a_1,\ a_0 \,]$$
- Na primjer, polinom $P(x) = 7x^5 - 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 8$ definišemo nizom od šest koeficijenata:

```
P = [7,-2,6,5,0,8]
```

Uočite da je prvi koeficijent u nizu vezan za najveći stepen u polinomu, da je poslednji koeficijent slobodni član polinoma i da je koeficijent a_k jednak nuli ukoliko se x^k ne pojavljuje u posmatranom polinomu.

Izračunavanje vrijednosti polinoma

- Vrijednost polinoma u nekoj tački dobijamo funkcijom **`polyval`**.
- Ova funkcija ima dva argumenta: prvi argument su koeficijenti posmatranog polinoma, a drugi argument vrijednosti nezavisno promjenljive u kojima računamo vrijednost polinoma.
- Drugi argument može biti skalar, niz ili matrica. Vrijednost polinoma se računa za svaki element posebno i dobija se rezultat istih dimenzija.
- Primjeri:

  `polyval([1,2,5],3)` $\to 20$

  `polyval([1,0,0,-1],1:4)` $\to [0,7,26,63]$
- Izračunati vrijednosti polinoma $P(x) = 2x^3 - x + 1$ za vrijednosti x od 0 do 2 sa korakom 0.1:

```
p = [2, 0, -1, 1]
x = 0:0.1:2
y = polyval(p,x)
```

Nule polinoma

- Nule polinoma dobijamo funkcijom **`roots`**. Prosljeđujemo joj koeficijente polinoma a ona nam vraća vektor kolonu sa nulama polinoma.
- Primjeri:
  `roots([1,0,-4])` $\rightarrow [-2;\ 2]$
  `roots([1,-2,2])` $\rightarrow [1+i;\ 1-i]$
- Ukoliko su nam nule polinoma poznate, koeficijente polinoma možemo dobiti komandom **`poly`** kojoj prosljeđujemo niz nula.
- Primjeri:
  `poly([1,2])` $\rightarrow [1,-3,2]$ $\qquad (x-1)(x-2) = x^2-3x+2$
  `poly([-2,2,0,0])` $\rightarrow [1,0,-4,0,0]$
- Uočite da funkcija **`poly`** uvijek daje 1 kao koeficijent polinoma uz najveći stepen. Funkcije **`poly`** i **`roots`** su međusobno inverzne.

Množenje polinoma

- Množenje dva polinoma dobijamo funkcijom `conv`. Na primjer ako je $P(x) = x^2 - 3$ i $Q(x) = 2x^3 - x + 1$, tada koeficijente proizvoda $R(x) = P(x)Q(x)$ dobijamo ovako:
  `conv([1,0,-3],[2,0,-1,1])` $\rightarrow [2, 0, -7, 1, 3, -3]$
  što znači da je rezultat množenja:
  $R(x) = 2x^5 - 7x^3 + x^2 + 3x - 3$
- Zadatak: Za dato N odredite zbir svih koeficijenata polinoma:
  $P(x) = (1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)\cdots(1+x+\ldots+x^N)$ i izračunajte vrijednost polinoma $y = P(x)$ za $x = 1/\pi$.

```
P=1;
for k=1:N
      P = conv(P,ones(1,k+1));
end
zbir = sum(P)
y = polyval(P,1/pi)
```

Dijeljenje polinoma

- Dijelienjem polinoma $P(x)$ sa polinomom $Q(x)$ dobijaju se dva polinoma: rezultat $R(x)$ i ostatak $S(x)$, takvi da vrijedi: $P(x) = Q(x)R(x) + S(x)$, pri čemu je stepen polinoma $S(x)$ manji od stepena polinoma $Q(x)$.
- Ovu uperaciju obavlja funkcija **`deconv`** koja ima dva ulazna argumenta (polinomi P i Q) i dvije izlazne vrijednosti (koeficijenti polinoma R i S).
- Primjer: Naći rezultat i ostatak pri dijeljenju polinoma $4x^6 + x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 7x + 1$ sa polinomom $x^2 - 2$. Rezultat dobijamo komandom:

```
[r,s]=deconv([4,1,-1,2,1,-7,1],[1,0,-2])
```

$r : [4, 1, 7, 4, 15]$ $\qquad R(x) = 4x^4 + x^3 + 7x^2 + 4x + 15$

$s : [0, 0, 0, 0, 0, 1, 31]$ $\qquad S(x) = x + 31$

- Uočite da niz koeficijenata ***s*** ima nule na početku tako da je operacija: **`conv(r,q)+s`** izvodiva.

Sabiranje i oduzimanje polinoma

- Jednostavno saberemo (oduzmemo) odgovarajuće koeficijente. Problem se javlja kada polinomi nijesu istog stepena. U tom slučaju možemo polinomu nižeg stepena na početak dodati odgovarajući broj nula.
- Moguće rješenje:

```
function p = SabiranjePolinoma(a,b)
d = [length(a), length(b)];
n = max(d)-d;
p = [zeros(n(1),1),a]+[zeros(n(2),1),b];
```

- Razmislite kako bi se iz rezultata mogli eliminisati nulti koeficijenti na početku niza. Oni će se pojaviti, na primjer, u slučaju sabiranja polinoma $x^3 - 2x^2 + 3x + 7$ i polinoma $-x^3 + 2x^2 + x + 1$.
- Pokušajte napraviti drugačiji algoritam za sabiranje polinoma.

Izvod polinoma

- Napišite funkcijski fajl ***izvod.m*** koji uzima koeficijente polinoma $P(x)$ a vraća koeficijente izvoda ovog polinoma po varijabli x, $P'(x) = \frac{d}{dx}P(x)$.
- Iz matematike znamo da je izvod $a_k \cdot x^k$ jednak $k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$, za $k > 0$. Izvod konstantnog člana a_0 je nula.
- Predlog rješenja:

```
function r = izvod(p)
d = length(p)-1;
r = p(1:d) .* (d:-1:1);
```

- Analizirajte predloženo rješenje. Provjerite ga na nekolika primjera. Pokušajte da nađete izvod konstantnog polinoma $P(x) = 7$. Modifikujte rješenje tako da i u ovom slučaju daje očekivani rezultat.

Integral polinoma

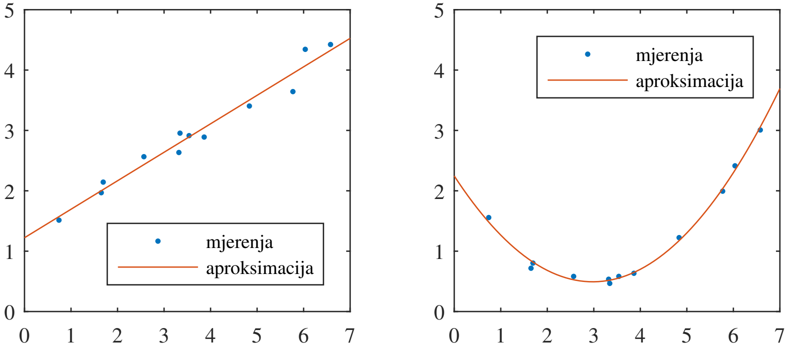
- Napišite funkcijski fajl ***integral.m*** koji uzima koeficijente polinoma $P(x)$ a vraća koeficijente integrala ovog polinoma po varijabli x, $R(x) = \int P(x)\,dx + C$. Drugi ulazni argument je opciona integraciona konstanta, čija je podrazumijevana vrijednost nula.
- Znamo da je integral $a_k \cdot x^k$ jednak $\frac{1}{k+1} \cdot a_k \cdot x^{k+1} + konstanta$.
- Predlog rješenja:

```
function r = integral(p,c)
if nargin<2
    c = 0;
end
r = [p ./ (length(p):-1:1) , c];
```

- Analizirajte predloženo rješenje.

Polinomi – aproksimacija i interpolacija podataka

- Često nam je potrebno odrediti koeficijente polinoma, datog stepena, koji na najbolji mogući način aproksimira (i interpolira) dati skup mjerenja.



$y = ax + b$ $\qquad$ $y = ax^2 + bx + c$

Aproksimacija i interpolacija podataka

- Funkcija **polyfit** se koristi za rješavanje ovakvih problema.
- Funkcija ima tri ulazna argumenta. Privi i drugi su nizovi x i y koji moraju biti istih dimenzija a predstavljaju mjerenja. Treći argument je stepen polinoma kojim želimo aproksimirati zadata mjerenja.
- Funkcija vraća koeficijente polinoma traženog stepena koji aproksimira mjerene podatke sa najmanjom kvadratnom greškom.
- Dobijeni polinom možemo izračunati za proizvoljnu vrijednost argumenta x i time interpolirati skup mjerenja.

```
X = [ 1,  2, 5,  7,  15];
Y = [19, 12, 3,  7, 103];
p = polyfit(X,Y,2)
y3= polyval(p,3)
x = 0:0.1:15;
y = polyval(p,x);
plot(x,y,X,Y,'*')
```