Osnovi računarstva II
Čas 5

Miloš Daković

Elektrotehnički fakultet – Podgorica

18. mart 2024.

3D grafika

- Predstaviti 3D liniju ili površ koristeći se dvodimenzionom površinom nije jednostavan zadatak. Mora se na neki način izvršiti projekcija 3D objekta na ravan (ravan ekrana ili papira).
- Posmatraćemo dva tipa zadataka: crtanje linija u tri dimenzije i crtanje površi u tri dimenzije.
- Linija se crta kao niz povezanih tačaka pri čemu je potrebno za svaku tačku zadati tri koordinate (x, y, z).
- Površ se crta preko elementarnih površi (oblika trougla ili četvorougla). Često se mora voditi računa da li je površ „vidljiva“ ili je zaklonjena nekom drugom površi.

3D grafika – linije (krive)

- Komanda `plot3(x,y,z)` crta liniju u 3D. Nizovi x, y i z imaju jednake dužine i predstavljaju koordinate tačaka koje čine liniju.
- Grafiku se mogu dodati oznake standardnim komandama `xlabel`, `ylabel`, `title`, `grid`. Dodaje se funkcija `zlabel`, a funkciji `text` prosljeđujemo 4 argumenta, tri koordinate i tekst koji tamo treba postaviti.
- Komandom `view(azimut,elevacija)` se podešava „pogled“ na 3D grafik. Parametri $azimut$ i $elevacija$ su uglovi u stepenima.
- Komandi `axis` se u ovom slučaju prosljeđuje niz od 6 vrijednosti $[x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}, z_{min}, z_{max}]$.

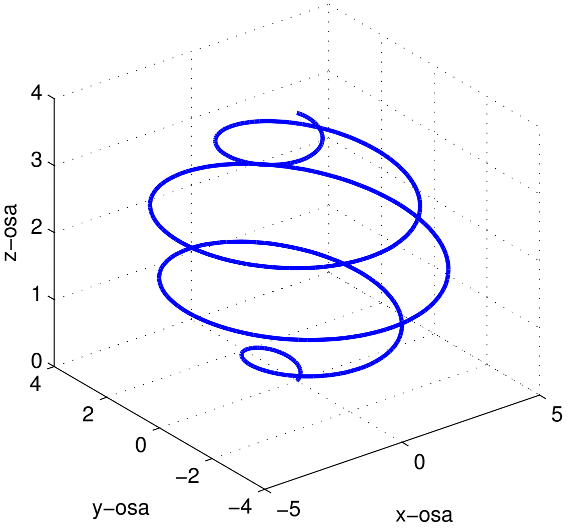
3D grafika – primjer krive linije

Neka je kriva linija zadata jednačinama:

$$x(t) = t(4-t)\cos(2\pi t)$$
$$y(t) = t(4-t)\sin(2\pi t)$$
$$z(t) = t$$

za $0 \leq t \leq 4$.

```
t = 0:0.01:4;
x = (t.*(4-t)).*
      cos(2*pi*t);
y = (t.*(4-t)).*
      sin(2*pi*t);
z = t;
plot3(x,y,z);
```



3D grafika – površi

- Komanda `[X,Y]=meshgrid(x1,y1)` kreira dvodimenzione matrice X i Y čiji su elementi određeni vektorima x_1 i y_1. Ovo će biti „domen“ naše površi. Za svaku tačku domena izračunamo vrijednosti funkcije $Z = f(X,Y)$.
- Komanda `mesh(X,Y,Z)` crta „mrežastu“ površ.
- Komanda `surf(X,Y,Z)` boji elementarne površi. Dodatnom komandom `shading interp` mijenja se izgled grafika.
- Komanda `contour(X,Y,Z)` crta konturne linije površi.
- Komanda `imagesc(x1,y1,Z)` bojom predstavlja z koordinatu.
- Komanda `colorbar` na grafik dodaje objašnjenje numeričkih vrijednosti boja dok `colormap(paleta)` bira paletu boja. Često korišćene palete su `jet`, `hot`, `gray`,...
- Još komandi: `waterfall(X,Y,Z)`, `quiver(X,Y,Z)`, `meshc(X,Y,Z)`, `contour3(X,Y,Z)`...

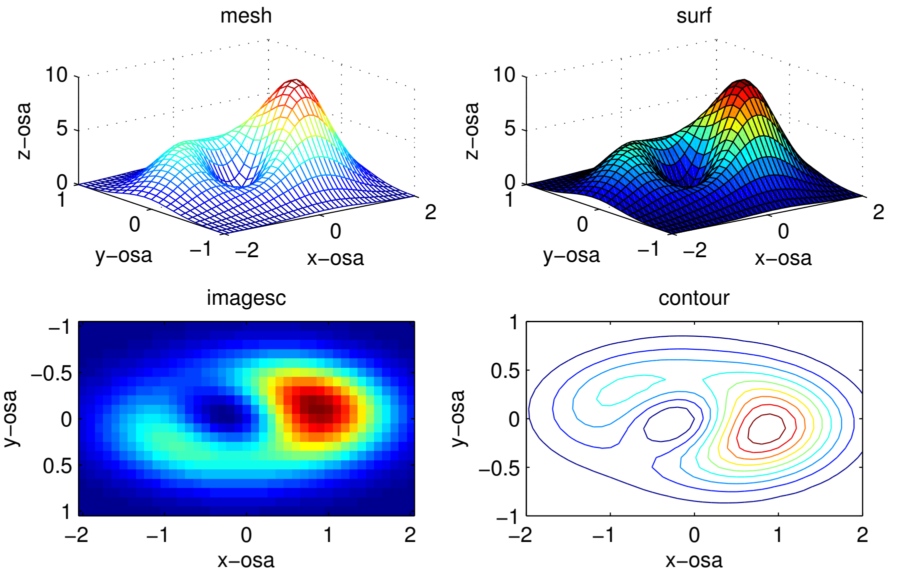
3D grafika – primjer površi

- Posmatrajmo površ definisanu sa

$$z = f(x, y) = \left((4x+1)^2 - 16xy + 48y^2\right) e^{-x^2-5y^2}$$

  na oblasti $-2 \leq x \leq 2$ i $-1 \leq y \leq 1$.
- Koristićemo korak od 0.1 po x i po y osi. Komandom **`meshgrid`** formiraćemo parove tačaka (x, y) gdje računamo vrijednosti funkcije $f(x, y)$.
- Grafike nacrtajmo na četiri načina, koristeći se komandama: **`mesh`**, **`surf`**, **`imagesc`** i **`contour`**.
- Razmislite kako na graficima da nekim markerom (kružić, zvjezdica...) obilježimo tačku gdje funkcija uzima najveću vrijednost. Mogu vam pomoći komande: **`max`** (biće objašnjena uskoro), **`hold on`**, **`hold off`**, **`plot3`**, **`plot`**,

3D grafika – primjer površi



3D grafika – primjer površi – komande

```
x1 = -2:0.1:2;
y1 = -1:0.1:1;
[x,y] = meshgrid(x1,y1);
z = ((4*x+1).^2-16*x.*y+48*y.^2).*exp(-x.^2-5*y.^2);

subplot(2,2,1)
  mesh(x,y,z);
  xlabel('x-osa'), ylabel('y-osa'), zlabel('z-osa')
subplot(2,2,2)
  surf(x,y,z);
subplot(2,2,3)
  imagesc(x1,y1,z);
subplot(2,2,4)
  contour(x,y,z);
print Cas5_sl1 -depsc2
```

Analiza podataka – funkcije max i min

- Funkcija `max` vraća najveću vrijednost proslijeđenog vektora.
- Možemo je pozvati ovako: `M = max(X)`.
- Drugi način pozivanja je slučaj kada od funkcije tražimo da vrati dvije vrijednosti: `[M,p] = max(X)`. Najveća vrijednost se smješta u varijablu M dok se pozicija najveće vrijednosti u nizu X smješta u varijablu p.
- Ukoliko se ovoj funkciji proslijedi matrica, tada se maksimum (i odgovarajuća pozicija) određuje za svaku kolonu posebno i kao rezultat dobijamo niz vrijednosti.
- Na isti način se koristi i funkcija `min`, s tim što ona određuje minimum.
- Ako je A matrica šta je `min(min(A))`? Šta će sadržati varijabla p nakon izvršenja komande `[M,p]=max(min(A))`?

Analiza podataka – suma, proizvod, prosjek

- Funkcija **`sum(X)`** daje zbir svih elemenata niza X.
- Funkcija **`prod(X)`** daje proizvod svih elemenata niza X.
- Funkcija **`mean(X)`** daje prosječnu vrijednost elemenata niza X.
- Funkcija **`median(X)`** daje „srednji“ element niza X.
- Funkcija **`sort(X)`** vraća elemente niza X sortirane u neopadajući poredak. Ukoliko od ove funkcije tražimo dvije izlazne vrijednosti **`[S,p] = sort(X)`** tada se u varijablu p upisuju pozicije sortiranih elemenata u originalnom nizu.
- Ako navedenim funkcijama proslijedimo matricu, one navedenu operaciju izvode za svaku kolonu matrice i vraćaju niz vrijednosti.
- Šta je rezultat izvršenja **`sum(1:2:39)`**? Ako je X niz šta ćemo dobiti izvršenjem komandi: **`[S,p]=sort(X)`** i **`X(p([1,2]))`**?

Analiza podataka – cumsum, cumprod i diff

- Za niz X dužine N funkcija `S = cumsum(X)` će vratiti niz parcijalnih suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
- Primjer: `cumsum([1,4,7,2])` vraća `[1, 5, 12, 14]`.
- Funkcija `cumprod` umjesto sabiranja množi odgovarajuće elemente. Na primjer `cumprod(1:10)` vraća niz faktorijela brojeva od 1 do 10.
- Funkcija `D = diff(X)` vraća niz takav da je $D_n = X_{n+1} - X_n$ za $n = 1, 2, ..., N-1$ gdje je N dužina niza X. Uočite da dobijeni niz ima jedan element manje od polaznog.
- Primjer: `diff([2,4,4,7,2])` vraća `[2, 0, 3, -5]`.

Numeričko računanje određenih integrala

- Iz matematike je poznato pravougaono pravilo integracije
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(a+k\Delta_x)\Delta_x, \qquad \Delta_x = \frac{b-a}{N}$$
Možemo ga tumačiti ovako: Izračunajmo vrijednosti funkcije na zadatom intervalu od a do b u N ravnomjerno raspoređenih tačaka. Saberimo dobijene vrijednosti i pomnožimo ih sa korakom.

- Primjer: Nađimo $I = \int_0^{\pi} \frac{x^2+sin(x)}{1+e^{-x}}dx$

```
dx = pi/200;                          'Koliko tačaka uzeti?'
x = 0:dx:pi-dx;                              'Zašto pi-dx ?'
f = (x.^2+sin(x))./(1+exp(-x));
I = sum(f)*dx
```

Numeričko računanje integrala

- Posmatrajmo integrale sa promjenljivom gornjom granicom $\int_a^x f(t)dt$ gdje je x u nekom intervalu $a \leq x \leq b$.
- Primjer: Nađimo $I(t) = \int_0^t \frac{x^2 + sin(x)}{1 + e^{-x}} dx$ za $0 \leq t \leq 2\pi$.

  Nacrtajmo grafik fukncije $I(t)$.

```
dt = pi/200;                    'Koliko tačaka uzeti?'
t = 0:dt:2*pi-dt;
f = (t.^2+sin(t))./(1+exp(-t));
I = cumsum(f)*dt;
plot(t+dt,I)                    'Zašto t+dt ?'
```

Numeričko računanje izvoda

- Poznato je da se izvod neke funkcije $f(t)$ može približno izračunati kao $\dfrac{df(t)}{dt} \approx \dfrac{f(t+\Delta_t)-f(t)}{\Delta_t}$.
- Pretpostavimo da smo mjerili poziciju $x(t)$ nekog tijela u vremenskim trenucima t. Neka su rezultati mjerenja smješteni u nizovima X i T (očigledno trebaju biti jednake dužine i niz T je rastući). Odredimo i nacrtajmo brzinu tijela $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$.
- Smatrajući da su varijable X i T definisane u radnom prostoru zadatak možemo riješiti ovako:

```
V = diff(X)./diff(T);
plot(t(1:end-1)+dt/2,V)                'Zašto ovako?'
```

Ukoliko su svi vremenski trenuci ravnomjerno raspoređeni sa razmakom d tada umjesto `diff(T)` možemo staviti `d`.

Algoritmi – primjeri zadataka

1. Ulazni podatak je broj N ($N > 3$) i kvadratna matrica A reda N. Naći kvadratnu podmatricu reda tri matrice A kod koje je zbir elemenata maksimalan. Na izlazu prikazati podmatricu i zbir njenih elemenata. *Znate li šta je podmatrica?*

2. Prethodni zadatak riješiti uz pretpostavku da se podmatrica dobija izborom tri uzastopne vrste i tri uzastopne kolone matrice A.

3. Pronaći sve prirodne brojeve n ($n \leq M$, M je ulazni podatak) koji imaju osobinu da je $n^2 + 2$ prost broj. Napomena: broj n je prost ako nema drugih djelilaca osim 1 i n.

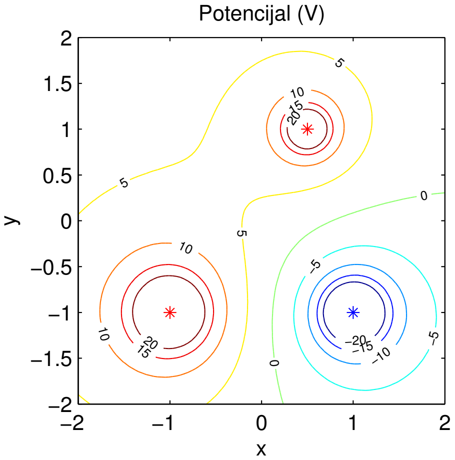
4. Naći najmanji prirodan broj n takav da je:

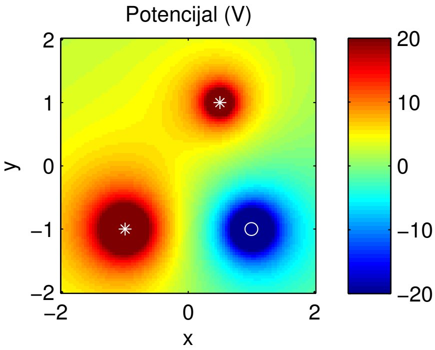
$$\frac{n^3 - 40n^2 - 700n + 1200}{50n^2 + 72n + 1500} > \pi$$

Zadatak - elektrostatika

- Posmatraju se tri tačkasta naelektrisanja u ravni. Prvo naelektrisanje $Q_1 = 1\text{nC}$ nalazi se na poziciji $(-1,-1)$, naelektrisanje $Q_2 = -1\text{nC}$ nalazi se na poziciji $(1,-1)$, dok se treće naelektrisanje $Q_3 = 0.5\text{nC}$ nalazi na poziciji $(0.5,1)$.
- Izračunajte potencijal u tačkama ravni $-2 \leq x \leq 2$ i $-2 \leq y \leq 2$ uzimajući po 98 tačaka duž svake koordinatne ose. Sve dimenzije su u metrima.
- Potencijal predstavite grafički konturnim linijama za vrijednosti potencijala od -20V do 20V sa korakom od 5V.
- Dodatno potencijal predstavite `imagesc` funkcijom ograničavajući se na vrijednosti od -20V do 20V.

Zadatak - elektrostatika – rezultat





Zadatak - elektrostatika – predlog rješenja

```
dd=4/97;
x1d=-2:dd:2;
y1d=-2:dd:2;
[x,y]=meshgrid(x1d,y1d);
e0=8.854e-12;

x1=-1; y1=-1; Q1=1e-9;
r1=sqrt((x-x1).^2+(y-y1).^2);
v1=1/(4*pi*e0)*Q1./r1;
x2=1; y2=-1; Q2=-1e-9;
r2=sqrt((x-x2).^2+(y-y2).^2);
v2=1/(4*pi*e0)*Q2./r2;
x3=0.5; y3=1; Q3=0.5e-9;
r3=sqrt((x-x3).^2+(y-y3).^2);
v3=1/(4*pi*e0)*Q3./r3;

v=v1+v2+v3;
```

```
subplot(1,2,1)
[c,h]=contour(x,y,v,-20:5:20);
clabel(c,h,'FontSize',6)
xlabel('x'), ylabel('y')
axis square
hold on
plot(x1,y1,'r*')
plot(x2,y2,'b*')
plot(x3,y3,'r*')
hold off

subplot(1,2,2)
imagesc(x1d,y1d,v,[-20,20]);
xlabel('x'), ylabel('y')
colorbar
axis square
axis xy
```