

Osnovi računarstva II

Čas 3

Miloš Daković

Elektrotehnički fakultet – Podgorica

3. mart 2025.

Softver za numerička izračunavanja

- MATLAB

- Standard za inženjerske proračune
- Aktuelna verzija je 24.1 (MATLAB 2024a).

<https://www.mathworks.com>

- + Mnoštvo proširenja za specifične primjene *toolbox*-ovi
- Visoka cijena

- Octave

- + Open source (GNU Licenca)
- Aktuelna verzija je 9.4.0.
- + dobra kompatibilnost sa Matlab-om, cijena
- korisnički interfejs, brzina izvršavanja

<https://octave.org>

- Python

- + Open source
- Aktuelna verzija je 3.13.2.

<http://www.python.org>

- Julia, FreeMat, SciLab, R, ...

MATLAB/Octave - elementarna izračunavanja

- MATLAB i Octave su interpreteri (izvršavaju komande jednu za drugom bez prevođenja (kompajliranja)).
- Radno okruženje MATLAB-a ima više prozora. Naš fokus će biti na „Command window” prozoru.
- Jednostavna izračunavanja vršimo tako što otkucamo izraz i pritisnemo taster ENTER.
- na primjer na komandu: $2+3 \cdot 14 \cdot (7-3) + (2/3)^7 + 3e-2$
MATLAB/Octave odgovara sa: **ans = 14.6485**
- Osnovne računske operacije: $+$ $-$ $*$ $/$, stepenovanje: $^$, za odvajanje cijelog i decimalnog dijela broja se koristi **tačka**, zagrade u izrazima koristimo na standardni način, notacija **$8.854e-12$** predstavlja broj $8.854 \cdot 10^{-12}$, operator množenja ne smijemo izostavljati — **$3(4+2)$** rezultuje porukom o grešci..

Varijable

- Operator dodjele vrijednosti je **=**
- Naziv varijable se može sastojati od slova i brojeva, pri čemu prvi simbol mora biti slovo. Mala i velika slova se razlikuju (Case sensitive). U nazivu je dozvoljen simbol podvlaka **_**.
- Varijable nije potrebno deklarirati. Tip varijable se određuje na osnovu tipa izraza na desnoj strani znaka jednakosti.
- Jednom definisana varijabla se može koristiti u narednim izrazima.
- Primjeri dodjele vrijednosti:

a = 12

B = 5*2-3

b = 'tekst'

c23 = a*B + 8

a = 0

d = a*c23

Radni prostor

- Skup svih definisanih varijabli je radni prostor. Možemo ga tumačiti kao dio RAM memorije koji sadrži varijable.
- Radni prostor možemo sačuvati komandom **save ime** koja na disku pravi fajl `ime.mat` u kome se nalazi trenutni sadržaj radnog prostora.
- Komanda **save ime a B c23** može se koristiti za selektivno čuvanje varijabli ako im navedemo imena odvojena razmacima.
- Komandom **load ime** učitavamo ranije sačuvani radni prostor iz fajla `ime.mat` u radnu memoriju.
- Komandom **clear** brišemo radni prostor.
- Komandom **who** saznajemo imena svih varijabli u radnom prostoru. Komanda **whos** će nam za svaku varijablu dati dodatne informacije (tip varijable, zauzeće memorije u bajtovima...)

Konstante i kompleksni brojevi

- Konstante: **π** **i** **j** **ϵ** **Inf** **NaN** . Znamo šta je π , i i j su oznake za imaginarnu jedinicu, Rezultat izraza **$2/0$** je **Inf** , dok izraz **$0/0$** daje rezultat **NaN** .
- Sa kompleksnim brojevima radimo na „prirodan” način:

$$x = 1 + 3*j$$

$$y = 2*i*x$$

$$z = (1+j) / (1-j)$$

$$\text{ili: } y = 2*i*x$$

$$\text{ili: } z = (1+i) / (1-i)$$

- Ako koristite konstante **i** i/ili **j** , nemojte koristiti varijable sa istim imenom. Primjer:

$$i = 5$$

$$Q = 2 + 3*i$$

Varijabla **Q** ovdje dobija vrijednost **17** .

Vektori i matrice

- Vektor vrstu definišemo koristeći se uglastim zagradama i zapedom (ili razmakom) za odvajanje elemenata. $\mathbf{A} = [2, 5, 8, 1]$
- Vektor kolonu definišemo koristeći se tačka-zarezom za odvajanje elemenata. $\mathbf{B} = [4; 0; 9]$
- Matricu definišemo ovako $\mathbf{C} = [1, 2, 3; 4, 5, 6]$
- Matematički zapisi:

$$\mathbf{A} = [2 \quad 5 \quad 8 \quad 1] \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- Dužinu vektora $\mathbf{A}$ dobijamo funkcijom $\text{length}(\mathbf{A})$
- Dimenzije marice $\mathbf{C}$ dobijamo funkcijom $\text{size}(\mathbf{C})$

Vektori i matrice – indeksiranje

- Elementu vektora pristupamo navodeći indeks u zagradi: $A(3)$
- Za matricu navodimo vrstu i kolonu elementa: $C(2, 3)$
- **end** označava poslednji elemenat: $A(\text{end})$ $C(\text{end}, \text{end}-1)$
- Indeksi mogu biti zadati u obliku niza: $A([1, 2, 4, 3, 1])$
- Kod matrica se tako dobijaju podmatrice: $C([1, 2], [2, 3])$
- Ako umjesto indeksa stavimo **:** podrazumijeva se da uzimamo sve elemente. Treću kolonu matrice C dobijamo kao $C(:, 3)$
- Specijalno, ako je C matrica tada je $C(:)$ vektor kolona dobijen nadovezivanjem kolona matrice C . Dodatno, u posmatranom primjeru $C(3)$ daje rezultat **2** (treći element u matrici C).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Specijalne matrice

- Matrica dimenzija $N \times M$ čiji su svi elementi jednaki nuli dobija se funkcijom **zeros** (N, M) . Ako je kvadratna može i **zeros** (N) .
- Funkcije **ones** (N, M) i **ones** (N) elemente postavljaju na vrijednost 1.
- Jedinična matrica (jedinice na glavnoj dijagonali) dobija se funkcijom **eye** (N) . I ovdje je moguće **eye** (N, M) .
- **rand** (N, M) daje matricu sa slučajnim vrijednostima od 0 do 1.
- **randn** (N, M) daje matricu sa slučajnim vrijednostima koje podliježu Gausovoj raspodjeli vjerovatnoća.
- **magic** (N) daje „magični kvadrat”.
- MATLAB i Octave posjeduju odličan sistem pomoći. Ako želimo saznati više informacija o nekoj funkciji, na primjer **magic** dovoljno je zadati komandu **help magic**.

Blok matrice i operator :

- Složene matrice možemo zadavati blok po blok, vodeći računa da se blokovi moraju ispravno „složiti” inače dobijamo poruku greške. Na primjer ako je matrica S dimenzija 2×6 , P dimenzija 3×3 i vektor V dimenzija 5×1 tada sa: $A = [V, [S; P, \text{eye}(3)]]$ dobijamo matricu od pet vrsta i šest kolona.
- $a = 1:7$ definiše niz a kao vektor vrstu sa elementima 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7.
- $b = 1:3:15$ definiše niz b kao vektor vrstu sa elementima 1, 4, 7, 10 i 13. Uočite da je drugi podatak korak i da se krajnji podatak može a ne mora pojaviti u rezultujućem nizu.
- Operator `:` se često koristi u radu sa vrstama i kolonama matrica. Na primjer $D = C(1:2:\text{end}, :)$ izdvaja sve neparne vrste matrice C u novu matricu D .

Operacije sa matricama i poljima brojeva

- Sabiranje i oduzimanje: $A = (B+C) - D + 3$ – moraju biti istih dimenzija. Specijalno jedan sabirak može biti skalar.
- Transponovanje: $A = B'$ ili $A = B.'$. Kod kompleksnih matrica $A = B'$ ujedno i konjuguje sve elemente.
- Matrično množenje: $A = B * C$ – unutrašnje dimenzije se moraju poklapati, ili jedan činilac mora biti skalar.
- Množenje polja brojeva: $A = B * C$ – B i C moraju biti istih dimenzija, množenje se vrši element po element.
- Stepenuvanje matrica: $A = B^3$ – matrična operacija, B mora biti kvadratna matrica.
- Stepenuvanje polja brojeva: $A = B.^3$ – svaki element matrice B se diže na treći stepen.

Operacije sa matricama i poljima brojeva

- **det(A)** je determinanta matrice **A** (mora biti kvadratna).
- **inv(A)** je inverzna matrica matrice **A** (mora biti kvadratna).
- Dvije matrice, istih dimenzija, možemo podijeliti „element po element” ovako: **A = B./C**
- Postoji i „matrično dijeljenje” **A = B/C** i **D = B\C**, koje se za slučaj kvadratnih matrica svodi na **A = B × C⁻¹** i **D = B⁻¹ × C**
- **flipud(A)** – provjerite šta radi sa **help** komandom
- **fliplr(A)** – provjerite šta radi sa **help** komandom
- Ako je **A** proizvoljna matrica dimenzija **5 × 7** šta će biti rezultat izvršenja komande:
T = A(:,end:-1:1)-fliplr(A)

Matematičke funkcije

- **abs(x)** apsolutna vrijednost
- **real(x)** realni dio
- **imag(x)** imaginarni dio
- **conj(x)** konjugovanje
- **sqrt(x)** $\sqrt{x}$
- **exp(x)** e^x
- **log(x)** $\ln x$
- **log10(x)** $\log_{10} x$
- **sign(x)** znak broja
- **sin(x)**
- **cos(x)**
- **tan(x)** $\operatorname{tg} x$
- **asin(x)** $\arcsin x$
- **acos(x)** $\arccos x$
- **atan(x)** $\operatorname{arctg} x$
- **round(x)** najbliži cio broj
- **ceil(x)** veći cio broj
- **floor(x)** manji cio broj
- **fix(x)** šta li ona radi?
- **gcd(a, b)**
najveći zajednički djelilac
- **lcm(a, b)**
najmanji zajednički sadržalac
- **rem(a, b)**
ostatak pri dijeljenju a sa b

Funkcije, vektori i matrice, kraj rada

- Većina standardnih matematičkih funkcija dozvoljava da im se kao argument proslijedi vektor ili matrica. Tada se funkcija primjenjuje na svaki element vektora (odnosno matrice) a rezultat je istih dimenzija kao ulazni podatak.
- Neka nam je zadatak da napravimo tablicu vrijednosti sinusa i kosinusa za sve uglove od 0 do 180 stepeni sa korakom od 15 stepeni. Jedan od načina rješavanja ovog zadatka je:

```
x = (0:15:180)';  
y = x*pi/180;  
T = [x, sin(y), cos(y)]
```

- Tačka-zarez na kraju komande sprečava ispis rezultata u komandnom prozoru.
- Komandom **exit** završavamo rad.