

Osnovi računarstva II

Čas 10

Miloš Daković

Elektrotehnički fakultet – Podgorica

28. april 2025.

Rješavanje problema u simboličkom obliku

- Octave i MATLAB su softverski paketi sa primarnom namjenom da efikasno izvršavaju složena izračunavanja koja uključuju realne i kompleksne skalarne vrijednosti, vektore, matrice... Većina proračuna se izvode u floating-point aritmetici, gdje su numeričke vrijednosti predstavljene u 64-bitnom zapisu.
- Postoji široka klasa problema gdje se rješenje problema zahtijeva u simboličkom a ne u numeričkom obliku. Na primjer:

$$\int_0^1 \arcsin(x) dx = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.5707963267948966$$

$$ax + 3 = b \quad \implies \quad x = \frac{b - 3}{a}$$

Softverski paketi (computer algebra systems)

- MATHEMATICA – komercijalni softver, izuzetnih mogućnosti, sintaksa blago odudara od standardne matematičke sintakse.

`Integrate[ Exp[x] Sin[x], {x, 0, Pi} ]`

- MAPLE – komercijalni softver visokih performansi, sintaksa je bliža standardnim matematičkim zapisima

`integrate( exp(x)*sin(x), x = 0..Pi )`

- MATLAB symbolic math toolbox, Octave symbolic package
- SymPy – python biblioteka za simbolički račun
- **Maxima** – open source paket, GPL licenca, njega ćemo koristiti u nastavi iz ovog predmeta

`integrate( exp(x)*sin(x), x, 0, %pi )`

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

Maxima

- Web strane:

<http://maxima.sourceforge.net>

<https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>

- Windows, Linux, MAC, Android verzije
- Osnovna verzija koristi tekstualni korisnički interfejs, **wxMaxima** koristi grafički korisnički interfejs.
- Istorijat: MIT, 1968 (Macsyma), 1982 (Maxima), 1998 (GPL licenca)
- Ulazna i izlazna polja su obolježena sa (%*inn*) i (%*onn*) gdje je *nn* redni broj ulaznog, odnosno izlaznog podatka.
- Ulazni izrazi se završavaju sa ; a izračunavaju se tasterskom kombinacijom <SHIFT><ENTER> (wxMaxima) ili samo <ENTER> (Maxima)

Maxima – izrazi

- Osnovni izrazi:

```
2^64;  
(a+sqrt(x))^6;  
2*x + 3 = 7;  
15!;
```

- Varijable:

```
a: 42;  
f: sqrt(x^2+y^2);  
j1: x^2 + a*x -18 = x+1;
```

- Dobijanje numeričke vrijednosti:

```
float(sqrt(15));  
float(2^1024);  
bfloat(2^1500);
```

- Konstante:

```
%pi    π  
%i      imaginarna jedinica  
%e       $e \approx 2.71818183$   
inf      $+\infty$ 
```

- Funkcije:

```
f(x) := sin(x)+cos(x);  
f(%pi/3);  
f(x)+f(-x);
```

- Liste i nizovi:

```
L: [1, x, x+y, x*y];  
L[3]+L[4];  
g[k] := 1/k^2;  
g[15]
```

Maxima - manipulacija izrazima

- Funkcija **combine**(*izraz*) pokušava da sabirke u zadatom izrazu svede na zajednički imenitelj i sabere ih.

combine($x/2+p*x/7$);

- Funkcija **expand**(*izraz*) pokušava da obavi množenja u zadatom izrazu (oslobađa se zagrada).

expand(($x+1$) * ($x+2$) ^3);

- Funkcija **factor**(*polinom*) pokušava da obavi faktORIZACIJU zadatog polinoma (ili cijelog broja) nad poljem cijelih brojeva.

factor($x^4-2*x^2-3*x-2$); **factor**(1998);

- Uvođenje smjene:

subst($x=t+2$, (x^2+1) / ($x-1$));

- Kanonična forma izraza **radcan**(*izraz*) može uprostiti izraze koji sadrže logaritme, eksponencijalne funkcije i korijene.

Maxima - uprošćavanje izraza

- Trigonometrijski izrazi:

```
trigexpand(trig_izraz)
trigsimp(trig_izraz)
trigexpand(cos(x+y)+cos(x-y));
trigsimp(tan(x)+cos(x));
```

- Racionalni izrazi:

```
ratsimp(izraz)
fullratsimp(izraz)
ratexpand(izraz)
```

- Izdvajanje koeficijenta polinoma `coeff(polinom, x^3)`
- Izdvajanje imenioca racionalnog izraza `denom(izraz)`
- Izdvajanje brojioca racionalnog izraza `num(izraz)`

Maxima - rješavanje jednačina

- Jednačine sa jednom nepoznatom

```
solve(x^3 - 2*x + 1 = 0, x);  
solve(x^2 + 2*x - 3*a = 0, x);  
solve(p*x+q, x);
```

- Sistemi jednačina

```
solve([x+y = 2, a*x - 1 = y], [x,y]);  
solve([x+y = 3, x^2 - y = 3], [x,y]);
```

- Eliminisanje varijable a iz skupa jednačina

```
eliminate([x+a*y = 0, a-x = 2], a);
```


Maxima - izvodi i integrali, crtanje grafika fukcije

- Primjer: Definišimo funkciju, nađimo njen prvi i drugi izvod, nule izvoda, vrijednost drugog izvoda u tačkama gdje je prvi izvod jednak nuli, neodređeni integral funkcije i integral u granicama od 0 do 1.

```
f(x) := 4*x/(2+x^2);  
fp: diff(f(x), x);  
nule1: solve(fp=0, x);  
fpp: radcan(diff(f(x), x, 2));  
subst(nule1[1], fpp);  
subst(nule1[2], fpp);  
subst(nule1[1], f(x));  
nule2: solve(fpp=0, x);  
integrate(f(x), x);  
integrate(f(x), x, 0, 1);  
plot2d(f(x), [x, -10, 10]);  
wxplot2d(f(x), [x, -10, 10]);
```

Maxima - limesi

- Funkcija `limit`

```
f(x) := x/(1+x^2);  
limit(f(x), x, inf);  
limit((sin(x)-x)^5/x^15, x, 0);
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x) - x)^5}{x^{15}}$$

- Moguće je definisati smjer kod računanja limesa ($x \rightarrow 0^+$)

Maxima - sume i proizvodi

- Funkcije **sum** i **product**

sum(2^k, k, 0, 10);

sum(1/n^2, n, 1, inf);

sum(1/k^2, k, 1, inf), simpsum;

product((1+x^k), k, 1, 5);

$$\sum_{k=0}^{10} 2^k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\prod_{k=1}^5 (1 + x^k)$$

- Razvoj funkcije **cos(x)** u Tejlorov red oko tačke **x = 0** do reda **10**

taylor(cos(x), x, 0, 10);

Maxima - završne napomene

- Maxima je složen paket sa mnoštvom mogućnosti. U okviru ovog predmeta upoznajemo se sa malim dijelom ovog sistema.
- Ugrađeni sistem pomoći: `? plot2d` ili `?? taylor`
- U izrazima možemo koristiti prethodne izlazne (i ulazne) izraze, na primjer `%o12 + %o15`
- Poslednji izlaz se može pozvati simbolom `% solve(%, x)`
- Ukoliko izraz završimo simbolom `$` umjesto `;` izlazni izraz će biti izračunat ali neće biti ispisan.
- wxMaxima ima grafički interfejs sa menijima kojima možemo aktivirati neke funkcije Maxima sistema. Preporučujem da kada neku operaciju izvodite korišćenjem menija protumačite i način kako je ta operacija implementirana u komandnoj liniji Maxime.