

ETF Matematika 1:

granične vrijednosti, neprekidnost, diferencijalni račun

Zadaci za samostalni rad

ETF, UCG, Novembar 2020.

1. Izračunati: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + 1)}{n - 1}$
2. Izračunati: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n-1}} - 2n + \sqrt{n^2 + (-1)^n} \right)$
3. Izračunati: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{n - \sqrt{k}}}{2\sqrt{n^3} - (-1)^k \cdot \sqrt{k}} \right)$
4. Izračunati: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sum_{k=1}^{2n} 2^k} + \frac{1}{\sum_{k=1}^n 3^k}}$
5. Ispitati konvergenciju niza čiji je opšti član:

$$x_n = \frac{(2n)!}{(1 + \cos^2 1) \cdot (2 + \cos^2 2) \cdot \dots \cdot (2n + \cos^2(2n))}.$$

U zadacima 6-10 izračunati granične vrijednosti funkcija ne koristeći L'Hôpitalovo pravilo:

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(\sin x)}{\sin(g(x))}, \quad \text{za } g(x) = \ln(1+x)$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{e^x + 31} - 2}{x}$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + x^2} - xe^{\frac{1}{x^2}} \right)$
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2^x - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4})}{1 - x^2}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - \cos x}{x \sin x + \operatorname{arctg} x^2}$

11. Ne koristeći diferencijalni račun ispitati neprekidnost funkcije:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + 2\sqrt{-x})}{\ln(1 + \sqrt{-2x})}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \left(\frac{\sqrt{1+x}}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2/(e^x - 2^x)}, & x > 0 \end{cases}.$$

Ukoliko tačke prekida postoje, odrediti njihov karakter.

12. Ne koristeći diferencijalni račun ispitati neprekidnost funkcije:

$$g(x) = \begin{cases} \left(1 - e^{-1/\ln x^2}\right)^{-1}, & x \neq 0, x \neq \pm 1 \\ 0, & x = 0, x = \pm 1 \end{cases}$$

u tačkama $x = 0$, $x = -1$ i $x = e$, i odrediti karakter eventualnih tačaka prekida.

13. Ispitati neprekidnost funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{1-3x}\right)^x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{e^x}{x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x}, & x < 0 \end{cases}$$

u tački $x = 0$. Ukoliko postoje tačke prekida odrediti njihov karakter.

14. Odrediti oblast definisanosti i asimptote na grafik funkcije:

$$f(x) = x \arcsin \frac{1}{1 + e^x}.$$

15. Odrediti domen funkcije $f(x) = \ln(1-x) + 2x + \frac{1}{x-1}$, a zatim odrediti intervale monotoničnosti i lokalne ekstremume, i asimptote na grafik funkcije f .

16. Odrediti domen funkcije $f(x) = \ln\left(\frac{|x+3|}{1-x}\right)$, a zatim odrediti asimptote na grafik funkcije, intervale monotoničnosti i lokalne ekstremne vrijednosti.

17. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{|x-1|}.$$

18. Naći najmanju vrijednost zbira dužina odsječaka koje odsijeca od koordinatnih osa tangenta na krivu $y = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{2}{x}\right)$, $x > 0$.

19. Dužina poluprečnika velike kupe je R , a visine H . Mala kupa je upisana u veliku, tako da im se ose poklapaju, a vrh male kupe leži u centru osnove velike kupe. Koliku najveću zapreminu može imati mala kupa?

20. Odrediti tačku S na visini AA' trougla $\triangle ABC$ tako da zbir udaljenosti od tačke S do tjemena trougla bude minimalan, ako je poznato da je trougao $\triangle ABC$ jednakokraki sa kracima $AB = AC = 5$ i osnovicom $BC = 6$.
21. Hipotenuza pravouglog trougla leži na pravoj $y = 4x$, a tjeme kod pravog ugla na krivoj $y = \frac{1}{\frac{1}{4} - x}$, $x > \frac{1}{4}$. Katete tog trougla su paralelne sa koordinatnim osama. Odrediti minimalnu površinu takvog trougla i njegova tjemena.
22. Kroz tačku A na kružnici poluprečnika R povučena je tangenta. Odrediti tetivu BC paralelnu sa datom tangentom tako da proizvod dužina ivica trougla ABC bude maksimalan.