ETF Matematika 1: Vektori i kompleksni brojevi

Zadaci za samostalni rad

ETF, UCG, Oktobar 2020.

1. Neka su B' i C' središta stranica AC i AB datog trougla $\triangle ABC$.

   (a) Ako je $\overrightarrow{BB'} = (-\frac{15}{2}, -\frac{15}{2}, \frac{3}{2})$ i $\overrightarrow{CC'} = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -3)$ odrediti koordinate vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

   (b) Ako je D podnožje visine iz tjemena C odrediti koordinate vektora $\overrightarrow{CD}$.

   (c) Ako je težište datog trougla u koordinatnom početku odrediti koordinate tačke D.

2. Tjemena paralelograma $ABCD$ su tačke $B(-1, 4, 3)$, $C(-5, 10, 2)$, i $D(2, -2, -3)$. Odrediti koordinate tačke T koja leži na duži AB tako da važi jednakost $\measuredangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CT}) = \measuredangle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CT})$.

3. Dati su jedinični vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Vektor $\vec{a}$ je normalan na vektore $4\vec{b} + 3\vec{c}$ i $\vec{b} - 7\vec{c}$, a ugao između vektora $2\vec{b} + \vec{c}$ i $\vec{b} - \vec{c}$ je $\frac{\pi}{3}$.

   (a) Pokazati da je vektor $\vec{a}$ normalan na vektore $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

   (b) Izračunati ugao između vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

   (c) Izračunati zapreminu tetraedra nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

4. Dati su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ takvi da važe jednakosti:
   $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2|\vec{c}| = 2$, $(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$,
   $\measuredangle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.
   Izračunati $\measuredangle(\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b})$.

5. Osnova piramide $ABCDE$ je jednakokraki trapez $ABCD$ u kojem je

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}| = 1.$$

   Strane ADE i BCE su jednakokrako-pravougli trouglovi sa pravim uglom kod tjemena D i C redom. Neka su tačke F i G središta ivica BC i DE. Izraziti vektor $\overrightarrow{FG}$ u bazi $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ i $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$, a zatim izračunati njegov intenzitet.

6. Neka je $ABCA'B'C'$ trostrana prizma kojoj su sve ivice dužine 1.

   (a) Ako je T podnožje visine iz tjemena B' trougla $\triangle A'B'C$, izraziti vektor $\overrightarrow{B'T}$ u bazi koju čine vektori $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$.

   (b) Ako je $\measuredangle(\vec{a}, \vec{c}) = \measuredangle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$ odrediti realne brojeve α, β i γ tako da važi jednakost: $\overrightarrow{B'T} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

7. Odrediti kompleksne brojeve z i w iz uslova:

$$z + \bar{w} = 6 + 3i, \quad i\bar{z} + \frac{w}{i} = 11 - 4i,$$

a zatim izračunati $\arg((w - z - i)^{2021})$.

8. Odrediti trigonometrijske oblike kompleksnih brojeva z koji zadovoljavaju uslove:

$$\operatorname{Im}(2z^5 + i) = 2, \quad 2z\bar{z} - |z| = 1, \quad \arg(z) \leq \frac{\pi}{6}.$$

9. Izračunati $\sqrt[4]{z+3}$ ako je $\arg\left(\frac{z^2}{i} \cdot \frac{2i-4}{6-3i}\right) = \arg(2z + 6i) = \pi$.

10. Kompleksan broj z leži u desnoj poluravni. Odrediti sve vrijednosti $\sqrt[3]{z}$ ako je broj $z + 4i\sqrt{3}$ realan, a $|z| = 8$.

11. Napisati u algebarskom obliku kompleksne brojeve z i w koji leže u donjoj poluravni i zadovoljavaju jednakosti

$$\arg(zw) = \pi, \quad 5\arg z = 7\arg w, \quad |z| = |w| = \sqrt{2}.$$