ETF Matematika 1: SLJ i matrice, prava i ravan

Zadaci za samostalni rad

ETF, UCG, Novembar 2021.

1. Prava a leži u presjeku ravni $\alpha : z = 0$ i $\beta : y = 1$, a prava b leži u ravni $\gamma : x + y = 0$ i siječe pravu a pod pravim uglom. Napisati jednačinu prave b.

2. Date su prave $a : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$ i $b : x = y = z$. Ravan α sadrži pravu a i koordinatni početak. Ravan β sadrži pravu b i paralelna je sa pravom a. Odrediti jednačine ravni koje polove ugao između ravni α i β.

3. Date su ravni:

$$\alpha : x = y, \quad \beta : z = 1, \quad \gamma : x - z - 1 = 0.$$

Prava a leži u presjeku ravni α i β, a prava b leži u ravni γ i siječe pravu a pod uglom od $\frac{\pi}{3}$. Napisati jednačinu prave b.

4. Date su prave $a : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ i $b : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+3}{-2}$.

   (a) Dokazati da se prave a i b sijeku.

   (b) Ravan α je određena pravama a i b, a ravan β je normalna na ravan α, i siječe je po pravoj p koja polovi ugao između pravih a i b. Odrediti jednačinu prave p.

5. Date su ravan $\pi : 2x - y - z = 3$ i njoj paralelna prava $a : x = y = z$. Napisati jednačinu prave b koje leži u ravni π i paralelna je sa pravom a tako da im je međusobna udaljenost 3.

6. Koristeći Kramerovo pravilo riješiti sljedeći sistem linearnih jednačina u zavisnosti od parametra a:

$$\begin{aligned} 2x + az &= 0 \\ -ax + a^2y &= a - 1 \\ x + ay + az &= 0. \end{aligned}$$

7. Koristeći Kroneker-kapelijevu teoremu riješiti sistem linearnih jednačina u zavisnosti od parametra m:

$$\begin{aligned} m^2x + (1-m)y - (1-m^2)z &= m^2 \\ (m-1)y + mz &= m \\ mx - mz &= 0. \end{aligned}$$

8. Riješiti matričnu jednačinu $AXB - 2C = (CX^TA^T + E)^T$ ako je

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

9. Riješiti matričnu jednačinu $A^{-1}B = 2X(E - X)^{-1}$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$